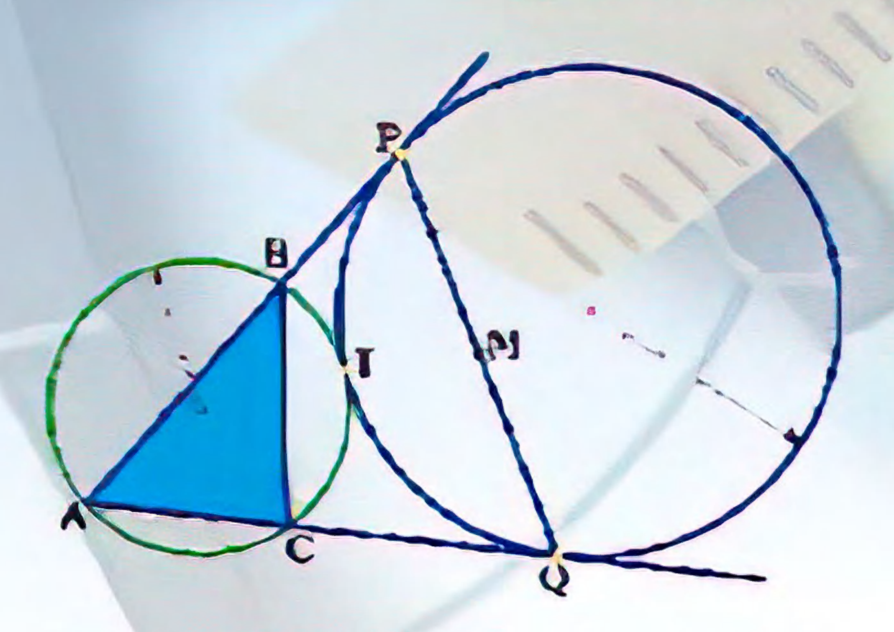
# 7 GEOMETRÍA

# PUNTOS NOTABLES

## TEORÍA - DEMOSTRACIONES
## TRAZOS AUXILIARES

PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

JULIO ORIHUELA BASTIDAS




En el gráfico P, Q y T son puntos de tangencia y MP=MQ. ¿Qué punto notable es M del triángulo ABC?



## GEOMETRÍA

# PUNTOS NOTABLES

### TEORÍA - DEMOSTRACIONES

**220 Problemas Resueltos**

**220 Problemas Propuestos**

*Incluye Problemas de Olimpiadas*

**JULIO ORIHUELA BASTIDAS**



# GEOMETRÍA

# PUNTOS NOTABLES

**Autor :** Julio César Orihuela Bastidas

© **Titular de la obra:** Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.

**Diseño y diagramación:** Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.

© **Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.**

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña - Teléfono 423-8154

Página web: www.editorialcuzcano.com.pe

**Primera edición** : setiembre 2018

**Tiraje** : 1 000 ejemplares

**Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°2018-14510**



**Distribución y ventas al por mayor y menor**

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña - Teléfono 423-8154

---

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de
Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L. en el mes de octubre de 2018

Jr. Coricancha N°675 Urb. Zárate S.J.L.

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña Lima - Perú

Teléfono 423-8154

# Introducción

El presente trabajo sobre Puntos Notables es producto de mucho tiempo de dedicación, así como una constante búsqueda de material bibliográfico, del mismo modo consulta a profesores y estudiantes, a los cuales va mi reconocimiento.

El contenido va dirigido principalmente a un público preuniversitario, pero dados los temas abarcados, puede también ser útil como preparación preolímpica o material de consulta de algunos profesores.

Se da inicio a la obra con una lista de los términos mas empleados en Geometría; se pasa luego a la definición de cada punto notable, se describe cada uno de ellos y se pasa enseguida a las demostraciones de las concurrencias y teoremas. Se da en algunos casos más de una demostración, los cuales pueden ser considerados, como guías, mas no son las únicas, ni las mejores, el lector debe intentarlo previamente y encontrará también nuevas formas.

En una segunda parte, estudiamos con todas sus demostraciones, otros puntos notables y los temas denominados como selectos, el cual va dirigido a un público con mayor experiencia, es cierto que algunos temas aquí desarrollados no son motivo de preguntas de examen de admisión, se creyó conveniente incluirlo, por la constante búsqueda de dar respuesta a muchas interrogantes. En esa búsqueda se incluyó en algunos casos la inclusión de otros temas como: semejanza, relaciones métricas y áreas; algunos temas nuevos como homotecia, inducción en la geometría e inversión, los cuales se explican brevemente.

La demostración dada al final, sobre el teorema de Morley, se desarrolla sólo con herramientas de geometría Euclídeana.

En cuanto al desarrollo de los problemas, se resalta la clasificación de problemas: tipo anual, semestral, semestral intensivo y repaso, así como también se han incluido problemas del Cepre Uni, se presenta de esta forma con el objetivo de que el estudiante pueda ubicarse según el ciclo que se encuentre y a su vez que vaya avanzando.

Se ha incluído también un grupo de problemas tomados de diferentes Olimpiadas Internacionales, con la finalidad de que el estudiante avance a mayores niveles cada vez.

***Julio Orihuela Bastidas***

## Agradecimiento

- A todo el grupo de la Editorial Cuzcano.
- A los profesores: Renzo Pardo, Jesús Silva, Luis Saavedra. Moisés Rayme, Richard Huamani y César Trucios.
- A todos mis alumnos de las distintas instituciones educativas.


## Dedicatoria

A mis padres Moisés y Margarita

Índice

# PUNTOS NOTABLES

Pág.

## INTRODUCCIÓN


1.- Terminología ..... 7
2.- Definición ..... 11
3.- Puntos notables asociados al triángulo ..... 12
- Incentro
- Excentro
- Circuncentro
- Ortocentro
- Baricentro
4.- Demostraciones de las concurrencias ..... 14
5.- Circunferencias inscrita, exinscrita y circunscrita al triángulo ..... 19
6.- Teoremas fundamentales ..... 21
7.- Criterios para identificar los puntos notables ..... 25
8.- Teoremas asociados a los puntos notables ..... 40
- Teorema de Nagel
- Teorema de Steiner
- Teorema de Carnot
- Teorema de Poncelet
- Teorema de Pitot y recíprocos
- Teorema de Steiner y recíprocos
9.- Triángulos especiales ..... 61
- Triángulo mediano
- Triángulo órtico
- Triángulo exincentral
- Triángulo tangencial
- Triángulo de contacto exterior
- Triángulo incentrico
- Triángulo pedal o podar
- Triángulo ceviano
10.- Teoremas sobre triángulos especiales ..... 65
- Otros triángulos especiales
- Triángulo anticeviano
- Triángulo intangencial
- Triángulo extangencial
11.- Rectas notables ..... 73
- Rectas paralelas
- Rectas antiparalelas
- Rectas isogonales
- Rectas isotómicas
- Recta de Simson-Wallace
- Recta de Euler
- Recta de Steiner
- Recta de Housel
- Recta de Nagel

Pág.

**12.- Circunferencia de los nueve puntos** ........ 86
- Teoremas sobre la circunferencia de los nueve puntos
- Teorema de Feverbach

**13.- Otros puntos notables** ........ 96
- Punto de Georgonne
- Punto de Nagel
- Punto de Poncelet
- Puntos conjugados isotómicos
- Punto Simediado o de Lemoine
- Punto Exmediano
- Punto Exsimediano
- Punto de Brocard
- Punto de Spieker
- Punto de Miquel
- Punto de Steiner
- Punto de Tarry
- Puntos de Jerabek
- Punto de Fermat - Torricelli
- Segundo punto de Fermat

**14.- Circunferencias notables** ........ 122
- Circunferencia de Mannheim
- Circunferencia de Conway
- Circunferencia de Adamas
- Circunferencia de Taylor
- Circunferencia Pedal
- Circunferencia de los cinco puntos
- Circunferencia de los ocho puntos
- Circunferencia de Brocard
- Circunferencia de Lemoine
- Segunda circunferencia de Lemoine
- Circunferencia de Steiner

**15.- Temas selectos** ........ 140
- Teorema de Loriga
- Demostración de la recta de Houssel
- Demostración de la recta de Nagel
- Teorema de Napoleón
- Teorema de Fagnano
- Primer teorema japonés
- Lugares geométricos
- Centro de gravedad de un triángulo
- Inducción en la geometría
- Baricentro de un polígono
- Circunferencia de Euler de polígonos inscritos
- Homotecia
- Demostración de la circunferencia de los nueve puntos
- Inversión
- Demostración del teorema de Feuerbach
- Teorema de Morley

◆ **PROBLEMAS RESUELTOS** ........ 187
◆ **PROBLEMAS PROPUESTOS** ........ 301
◆ **CLAVES**

# PUNTOS NOTABLES



GEOMETRÍA

*Objetivos :*

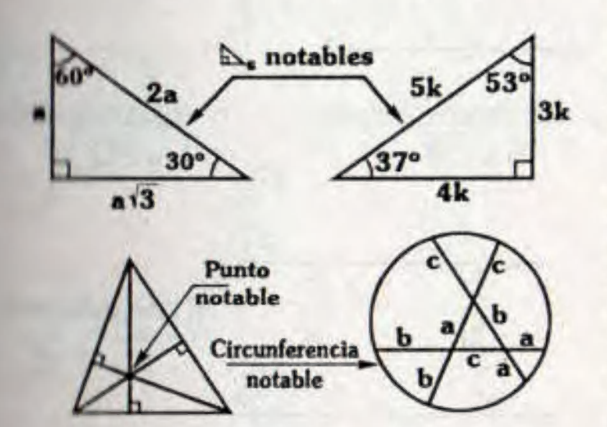
- *Conocer la definición de cada punto notable, así como su ubicación según el tipo de triángulo.*
- *Estudiar los teoremas y características relacionadas a los puntos notables y analizar los teoremas recíprocos.*
- *Identificar diferentes formas de concurrencia en diversas figuras.*
- *Impulsar en el estudiante la investigación y el deseo de profundizar cada tema, así como su relación con otros temas.*

## 1. TERMINOLOGÍA

Con el afán de hacer más comprensible la presente obra, se va a utilizar la siguiente terminología :

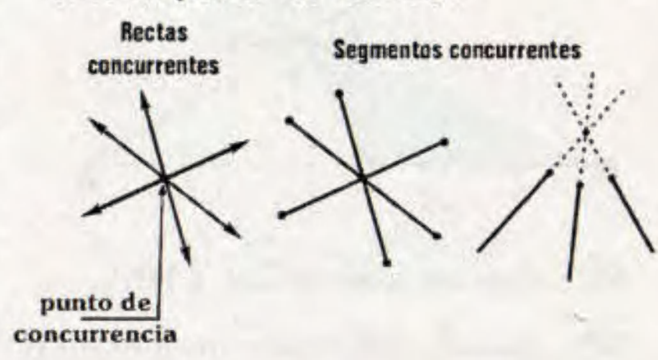
**NOTABLE:**

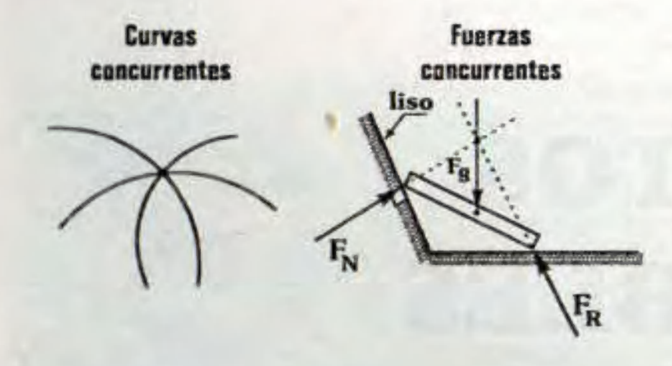
Digno de atención debido a las propiedades que posee, por ejemplo:

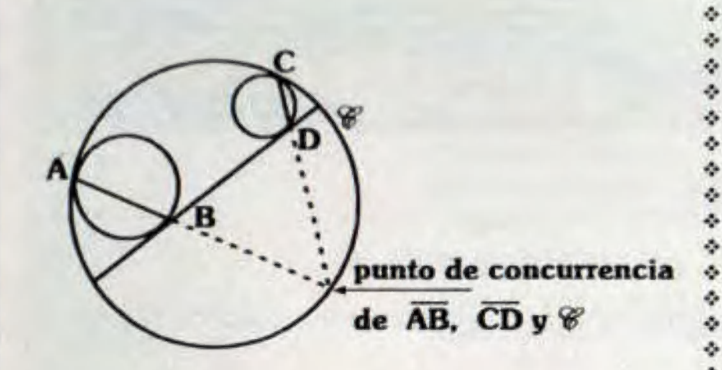



**CONCURRENCIA:**

Tres o más líneas son concurrentes cuando pasan por un mismo punto o si alguna(s) de las prolongaciones tienen un punto en común .



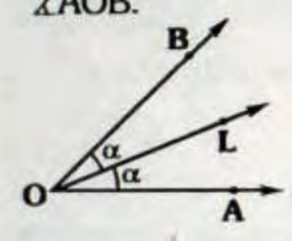


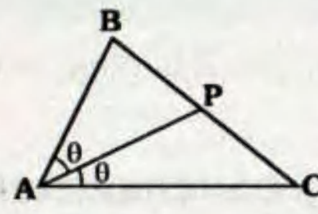

## BISECTRIZ:

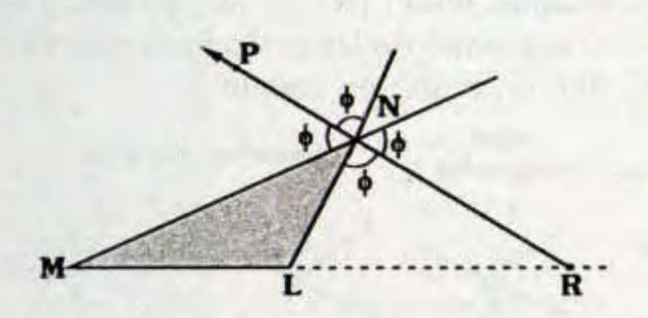
Consideremos los siguientes casos :

El rayo OL, es bisectriz del ∡AOB.




$\overline{AP}$ es bisectriz interior del ΔABC.




$\overline{NR}$ : Bisectriz exterior del Δ MNL.

$\overrightarrow{NP}$ : Bisectriz del ángulo exterior en N.

## PROLONGACIÓN DE UN SEGMENTO:

Prolongación de $\overline{BA}$ Prolongación de $\overline{AB}$

A B

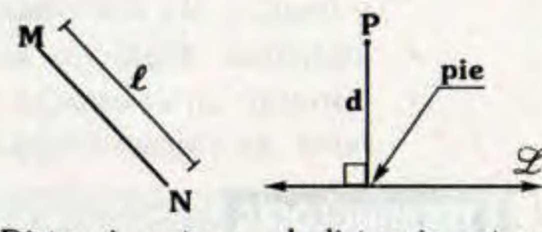
## BISECAR UN SEGMENTO:

Es cortar a un segmento en su punto medio, por ejemplo la mediatriz de un segmento lo biseca, las diagonales de un paralelogramo se bisecan, etc.

## NATURALEZA DE UN TRIÁNGULO:

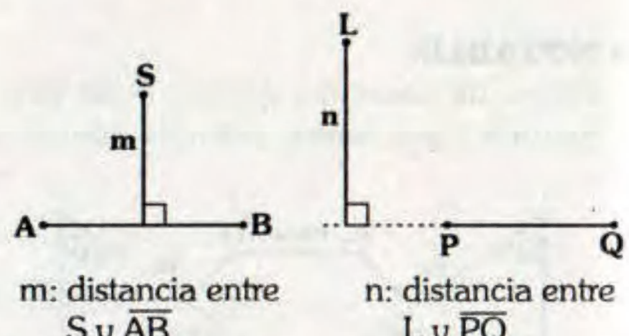
Generalmente se considera como la clasificación por las medidas angulares (triángulo rectángulo, acutángulo u obtusángulo).

## DISTANCIA:



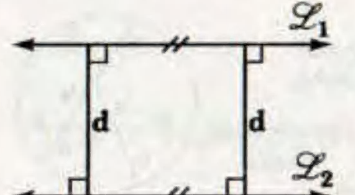

$\ell$ : Distancia entre M y N.

d: distancia entre P y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$




m: distancia entre S y $\overline{AB}$

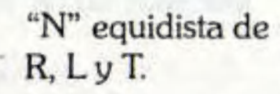
n: distancia entre L y $\overline{PQ}$



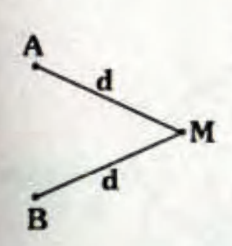

d : distancia entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

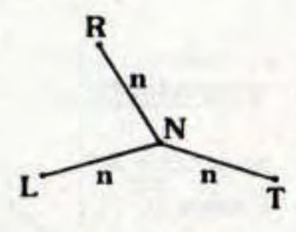
## EQUIDISTAR:

"M" equidista de A y B.

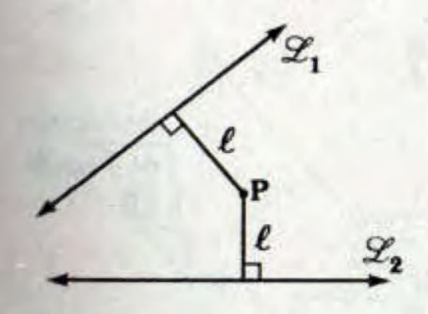


"N" equidista de R, L y T.

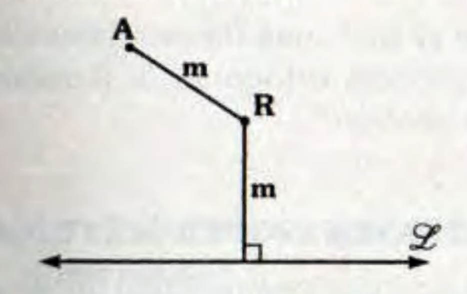


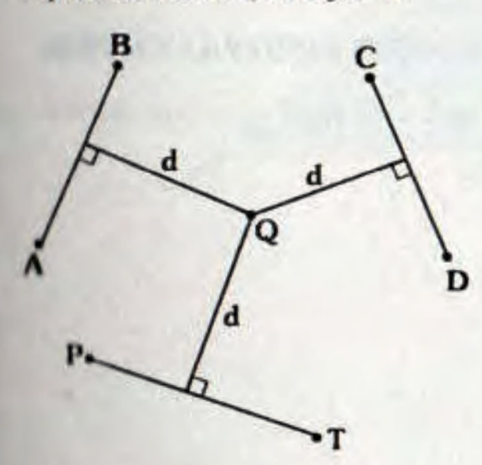

"P" equidista de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.




"R" equidista de A y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

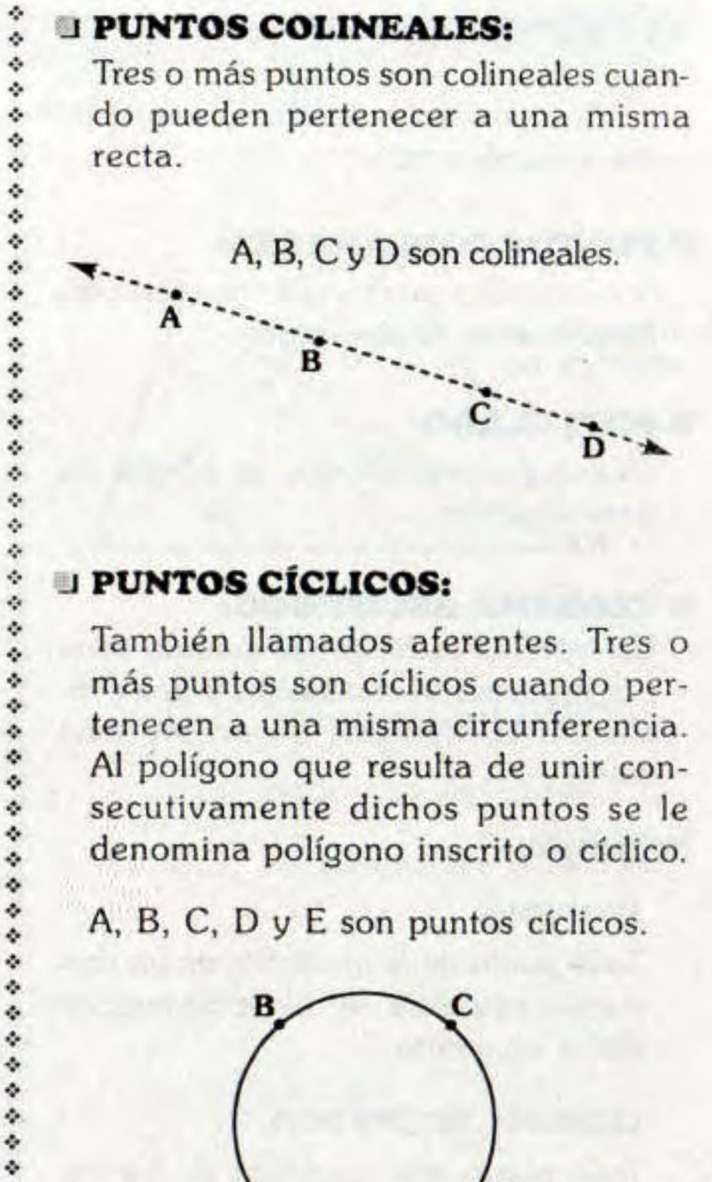



"Q" equidista de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{PT}$.




## PUNTOS COLINEALES:

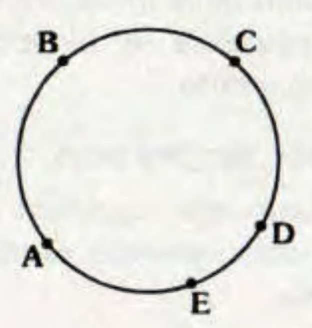
Tres o más puntos son colineales cuando pueden pertenecer a una misma recta.



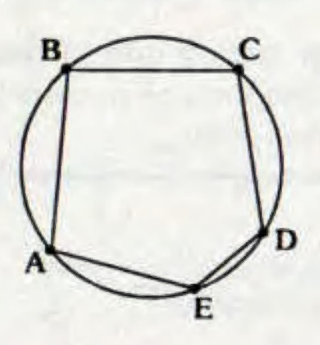

## PUNTOS CÍCLICOS:

También llamados aferentes. Tres o más puntos son cíclicos cuando pertenecen a una misma circunferencia. Al polígono que resulta de unir consecutivamente dichos puntos se le denomina polígono inscrito o cíclico.

A, B, C, D y E son puntos cíclicos.




ABCDE: es un pentágono inscrito.



**PUNTOS CONCÍCLICOS:**

Tres o más puntos son concíclicos cuando pueden pertenecer a una misma circunferencia.

**PUNTOS COPLANARES:**

Son aquellos puntos que pueden pertenecer a un mismo plano.

**POSTULADO:**

Es una proposición que se admite sin demostración

**TEOREMA RECÍPROCO:**

Un teorema es recíproco cuando tiene por hipótesis la conclusión y por conclusión la hipótesis de un teorema dado.

*Ejemplo:*

***TEOREMA:***

*Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.*

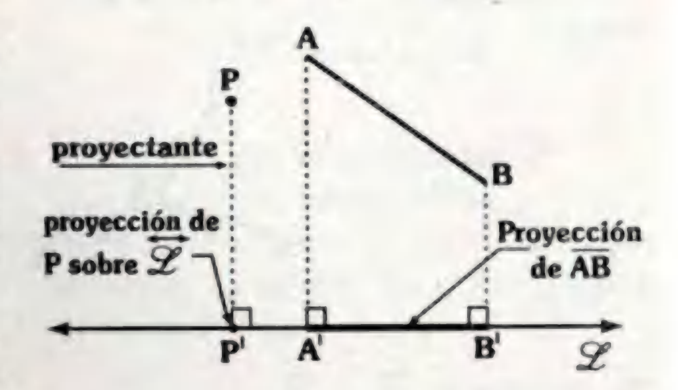
***TEOREMA RECÍPROCO:***

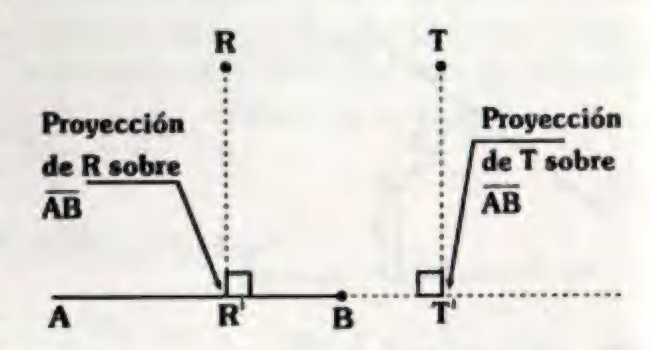
*Todo punto que equidista de los extremos del segmento pertenece a la mediatriz.*

**Observación**

*Tener en cuenta que el recíproco de todo teorema no necesariamente es verdadero.*

**PROYECCIÓN ORTOGONAL SOBRE UNA RECTA:**




Para el tema que desarrollaremos a la proyección ortogonal la llamaremos "proyección".

**REGIONES ISOPERIMÉTRICAS**

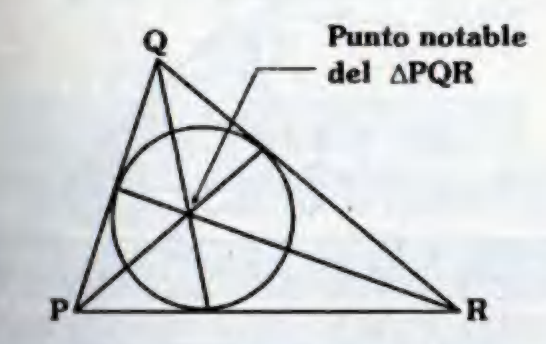
Son aquellas regiones que tienen igual perímetro.

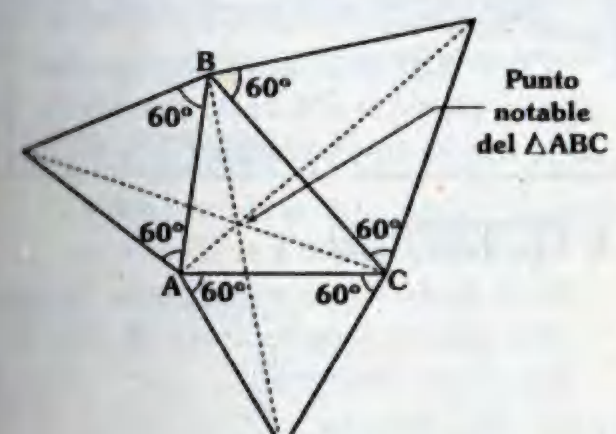
**REGIONES EQUIVALENTES:**

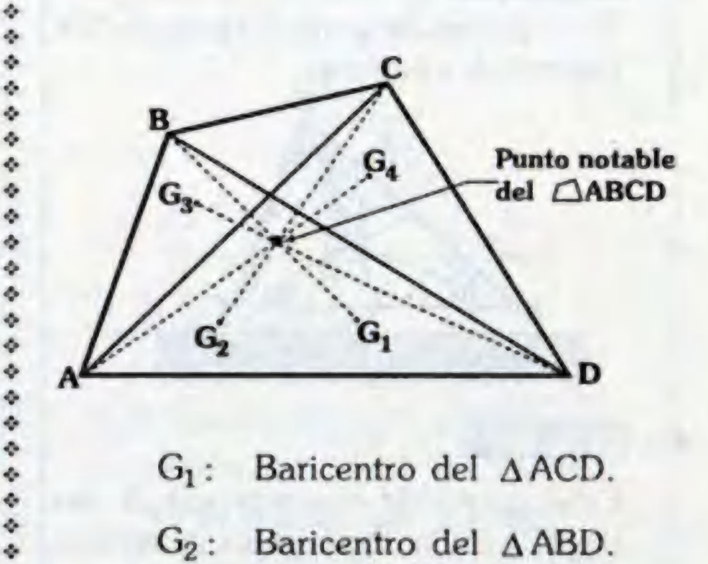
Son aquellas regiones que tienen igual área.

## 2. DEFINICIÓN

Es el punto o puntos de concurrencia de líneas (segmentos, rectas o curvas) sometidas a la misma definición.



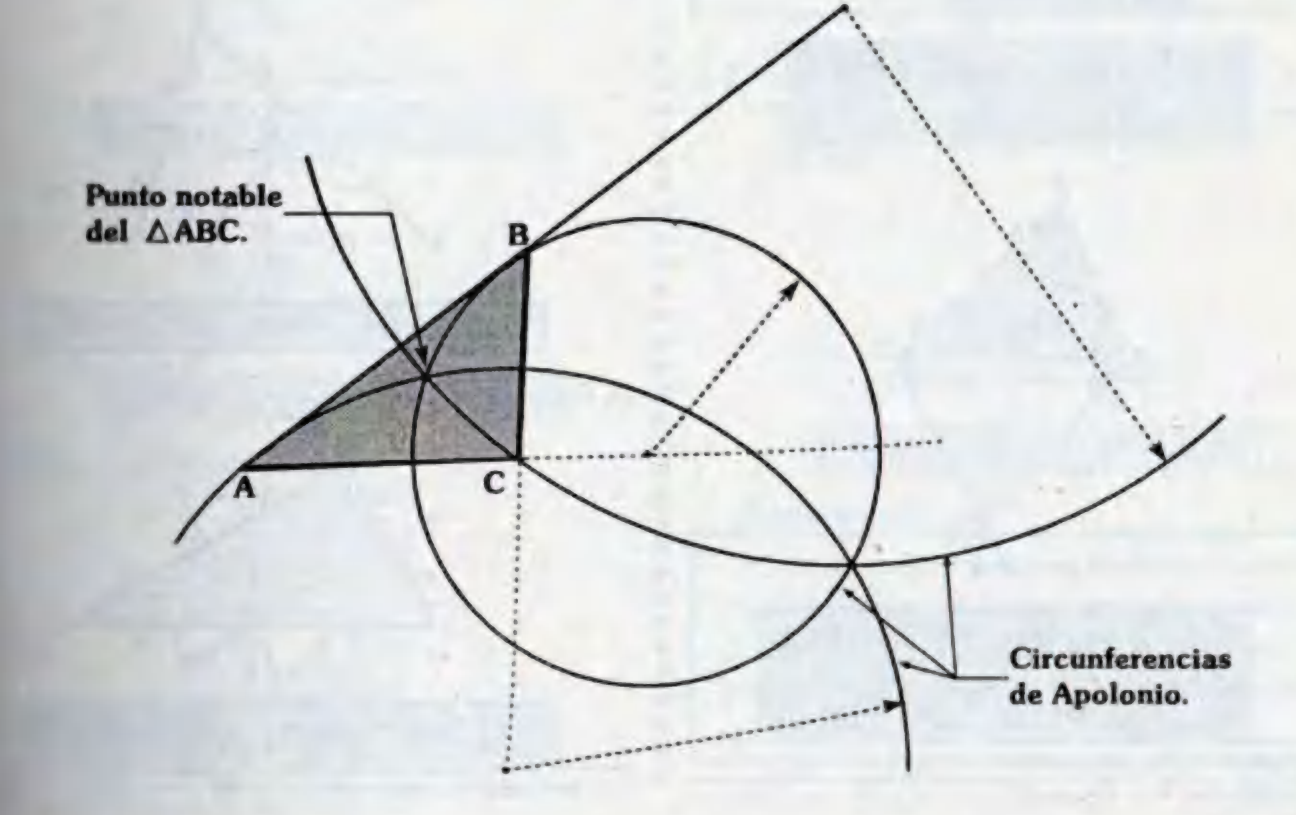




$G_1$ : Baricentro del $\Delta ACD$.

$G_2$ : Baricentro del $\Delta ABD$.

$G_3$ : Baricentro del $\Delta ABC$.

$G_4$ : Baricentro del $\Delta BCD$.

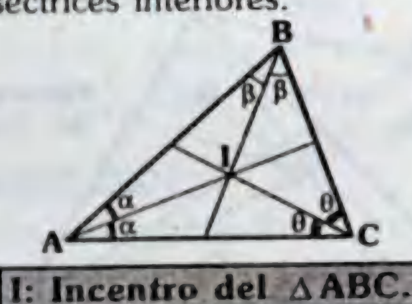


## 3. PUNTOS NOTABLES ASOCIADOS AL TRIÁNGULO

En esta primera parte estudiaremos los puntos notables más comunes.

### 3.1. INCENTRO[1]

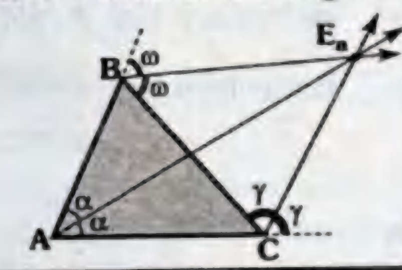
Es el punto de concurrencia de las bisectrices interiores.



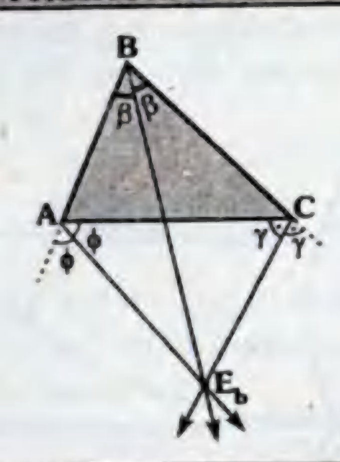

I: Incentro del $\triangle ABC$.

### 3.2. EXCENTRO[2]

Es el punto de concurrencia de las bisectrices de dos ángulos exteriores y la bisectriz de un ángulo interior.

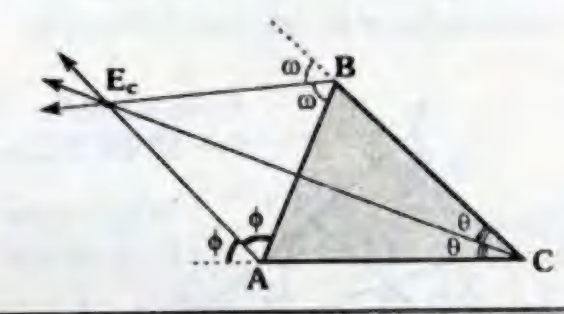



$E_a$ : Excentro del $\triangle ABC$, relativo a $\overline{BC}$.

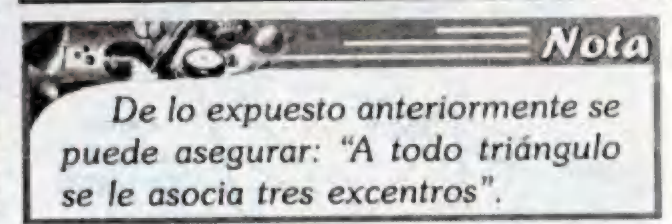



$E_b$ : Excentro del $\triangle ABC$, relativo $\overline{AC}$.

(1) Del latín, In: dentro de
(2) Del latín, Ex: fuera de




$E_c$ : Excentro del $\triangle ABC$, relativo a $\overline{AB}$

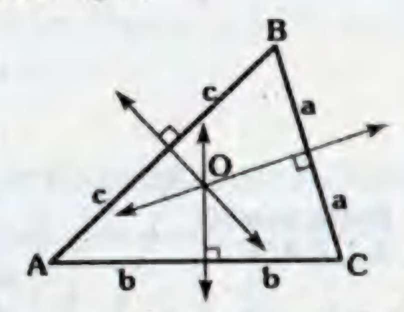



*De lo expuesto anteriormente se puede asegurar: "A todo triángulo se le asocia tres excentros".*

### 3.3. CIRCUNCENTRO[1]

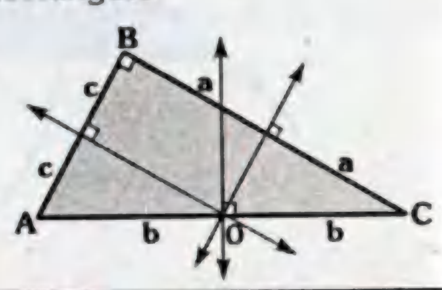
Es el punto de concurrencia de las mediatrices (coplanares) de los lados de un triángulo.

$\triangle ABC$: Acutángulo




O: Circuncentro del $\triangle ABC$.

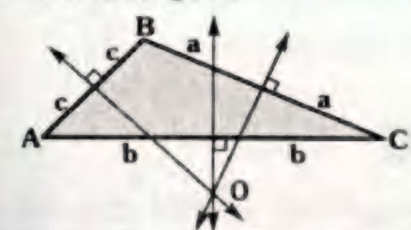
$\triangle ABC$: Rectángulo




O: Circuncentro del $\triangle ABC$.

(1) Del latín, Circun: alrededor de

$\Delta$ABC: Obtusángulo




**O: Circuncentro del $\Delta$ABC.**

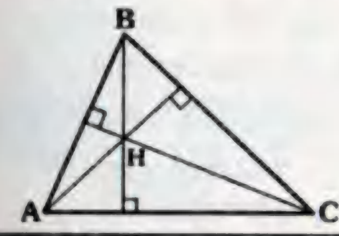
**Nota**

*De lo anterior nos podemos dar cuenta que la ubicación del circuncentro (dentro, en o fuera del triángulo) depende de la naturaleza del triángulo.*

### 3.4. ORTOCENTRO[2]

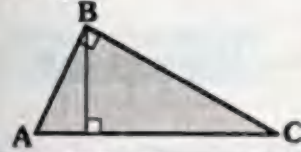
Es el punto de concurrencia de las alturas (o de sus prolongaciones).

$\Delta$ABC: Acutángulo



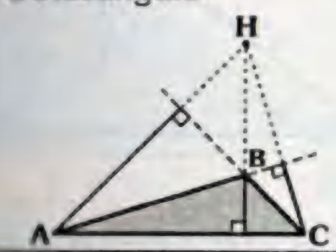

**H: Ortocentro del $\Delta$ABC.**

$\Delta$ABC: Rectángulo




**B: Ortocentro del ◺ABC.**

$\Delta$ABC: Obtusángulo

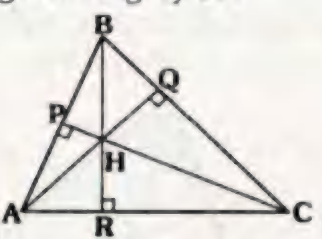



**H: Ortocentro del $\Delta$ABC.**

(2) Del latín, Orto: recto, vertical

**Nota**

- *Así como el circuncentro la ubicación del ortocentro depende de la naturaleza del triángulo.*
- *Del siguiente gráfico:*

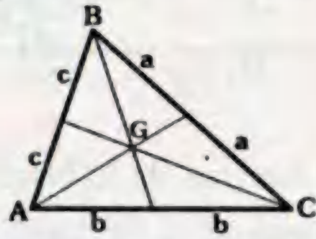



*Se puede asegurar:*

- H: *Ortocentro del* $\Delta$ABC.
- A: *Ortocentro del* $\Delta$BHC.
- B: *Ortocentro del* $\Delta$AHC.
- C: *Ortocentro del* $\Delta$AHB.
- P: *Ortocentro de los triángulos* APH, APC, BPH *y* BPC.
- Q: *Ortocentro de los triángulos* BQH, *BQA*, HQC *y* AQC.
- R: *Ortocentro de los triángulos* ARH, ARB, HRC *y* BRC.

### 3.5. BARICENTRO[1]

Es el punto de concurrencia de las medianas.




**G: Baricentro del $\Delta$ABC**

***Importante:***

*De los puntos mencionados hemos visto que son* ***siempre interiores*** *el incentro y baricentro, son* ***exteriores*** *los excentros; y dependiendo de la naturaleza del triángulo el circuncentro y ortocentro.*

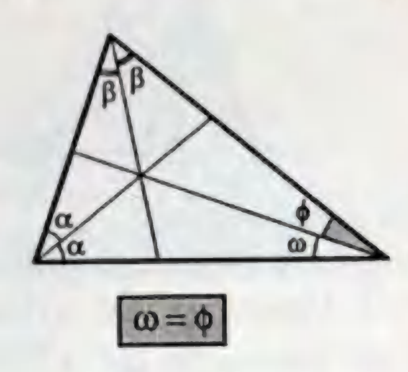
(1) Del latín, Bari: pesado, peso

## 4. DEMOSTRACIONES DE LAS CONCURRENCIAS

A continuación demostraremos las concurrencias mencionadas.

### 4.1. CON RESPECTO AL INCENTRO

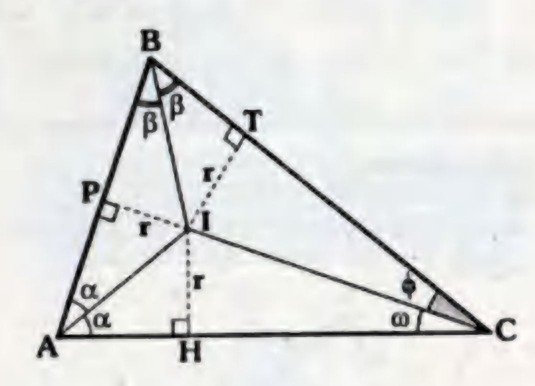
En el gráfico vamos a demostrar:




$\omega = \phi$

**Método 1**

- Se traza $\overline{IH} \perp \overline{AC}$, $\overline{IP} \perp \overline{AB}$ e $\overline{IT} \perp \overline{BC}$.




- Por el teorema de la bisectriz:

$$IH = IP = r \quad e \quad IP = IT = r$$

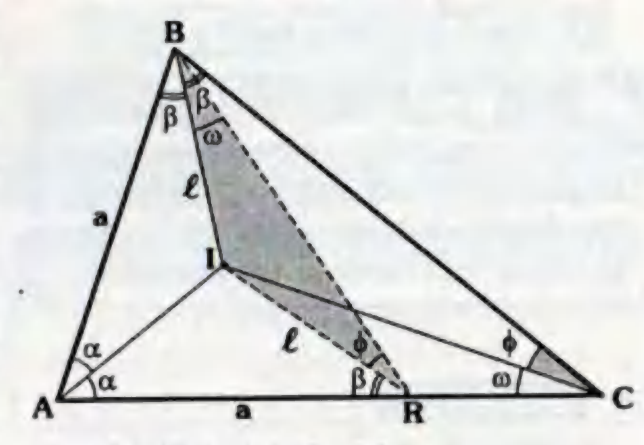
$$\Rightarrow \quad IH = IT = r$$

- Por el recíproco del teorema de la bisectriz, se concluye que $\overline{CI}$ es bisectriz.

$$\therefore \quad \omega = \phi$$

**Método 2**

- Se ubica R en $\overline{AC}$ tal que $AR = a$




- $\Delta\, ABI \cong \Delta\, AIR$ (LAL)

$$\Rightarrow BI = IR = \ell \quad y \quad m\measuredangle IRA = \beta$$

- Puesto que $m\measuredangle IBC = m\measuredangle IRA = \beta$ el $\triangle$BIRC es inscriptible.

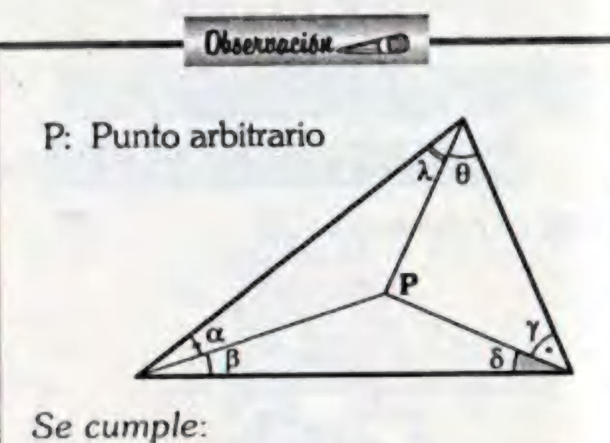
$$\Rightarrow m\measuredangle IBR = m\measuredangle ICR = \omega$$

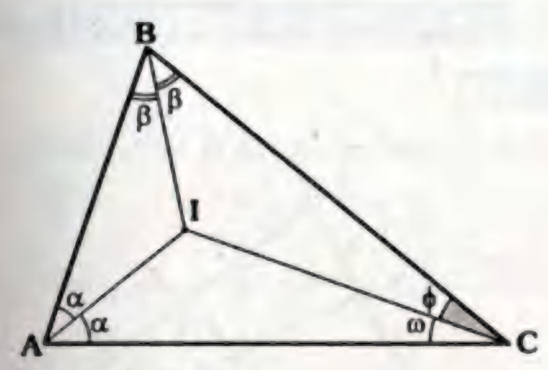
$$m\measuredangle BCI = m\measuredangle BRI = \phi$$

- $\Delta\, BIR$: Isósceles

$$\therefore \quad \omega = \phi$$

**Método 3**

> **Observación**
>
> P: Punto arbitrario
>
> 
> 
>
> *Se cumple:*
>
> $$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\beta$$



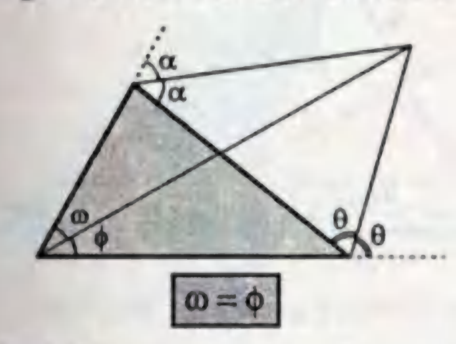

- De la observación:

$$\text{sen}\alpha\ \text{senw}\ \text{sen}\beta = \text{sen}\alpha\ \text{sen}\phi\ \text{sen}\beta$$
$$\Rightarrow \quad \text{senw} = \text{sen}\phi$$
$$\therefore \quad w = \phi$$

## 4.2. CON RESPECTO AL EXCENTRO

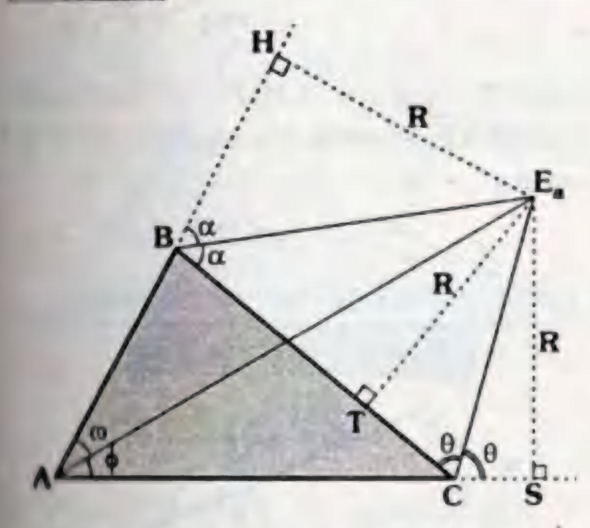
**Caso 1**

En el gráfico vamos a demostrar:




$\omega = \phi$

**Método 1**




- Se traza $\overline{E_aT} \perp \overline{BC}$, $\overline{E_aH} \perp \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{E_aS} \perp \overline{AC}$.

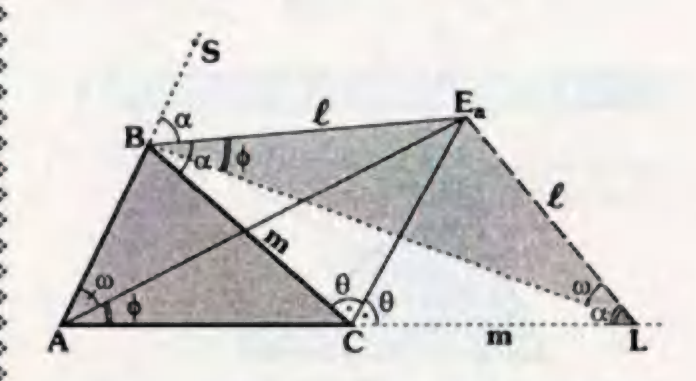
- Por el teorema de la bisectriz:

$$E_aH = E_aT = R \quad y \quad E_aT = E_aS = R$$
$$\Rightarrow E_aH = E_aS = R$$

- Por el recíproco del teorema de la bisectriz, se concluye que $\overrightarrow{AE_a}$ es bisectriz.

$$\therefore \quad \omega = \phi$$

**Método 2**




- Se ubica L en la prolongación de $\overline{AC}$, tal que $CL = BC = m$

- $\Delta BE_aC \cong \Delta\ CE_aL$ (LAL)

$$\Rightarrow BE_a = LE_a = \ell$$
$$m\measuredangle CBE_a = m\measuredangle E_aLC = \alpha$$

- Debido a que:

$$m\measuredangle SBE_a = m\measuredangle E_aLA = \alpha$$

el $\square ABE_aL$ es inscriptible

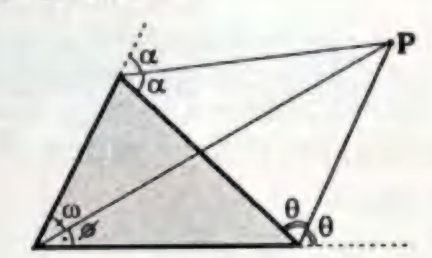
$$\Rightarrow m\measuredangle E_aBL = m\measuredangle E_aAL = \phi\ ;\ y$$
$$m\measuredangle BAE_a = m\measuredangle BLE_a = \omega$$

- $\Delta BE_aL$ : Isósceles

$$\therefore \quad \omega = \phi$$

**Método 3**

- Usando la observación de 4.1, cuando P es exterior.

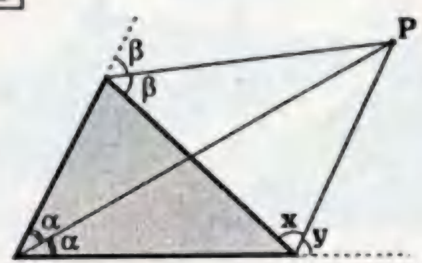



$$\text{sen}w\ \text{sen}\theta\ \text{sen}\alpha = \text{sen}\phi\ \text{sen}\theta\ \text{sen}\alpha$$

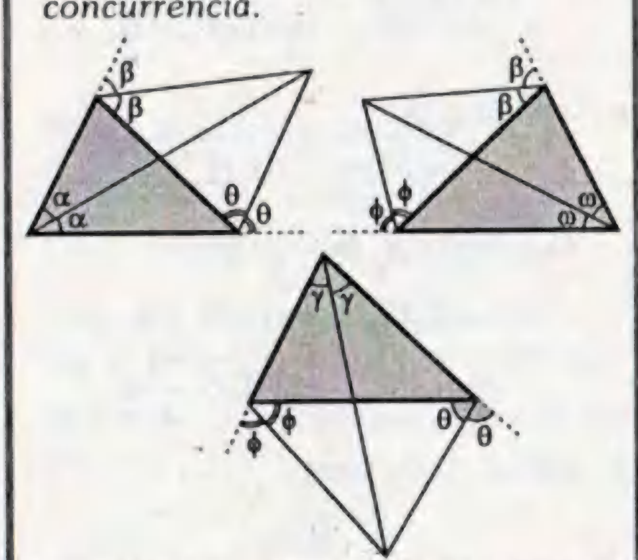
$$\Rightarrow \quad \text{sen}w = \text{sen}\phi$$

$$\therefore \quad \omega = \phi$$



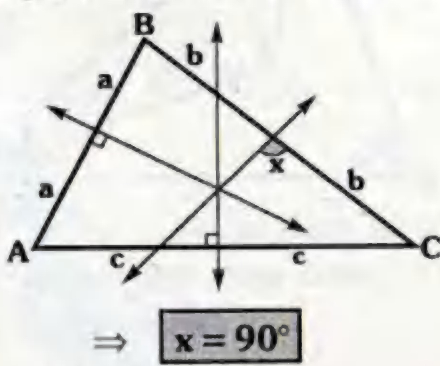

En el gráfico se demuestra que $x=y$, para ello debemos proceder análogamente al caso anterior.




## 4.3. CON RESPECTO AL CIRCUNCENTRO

**Caso 1**

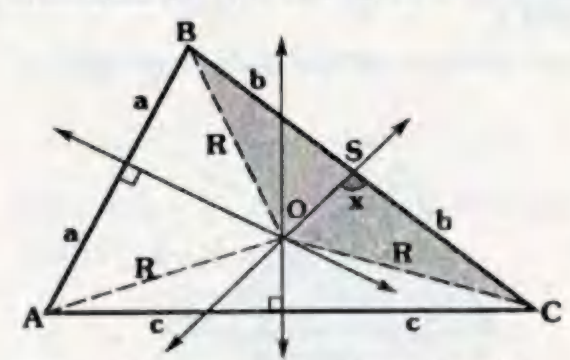
**A)** En el gráfico se va a demostrar:




$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 90°}$$

***Demostración:***

- Trazamos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$




- Por el teorema de la mediatriz:

$$OC = OA = R \quad y \quad OA = OB = R$$

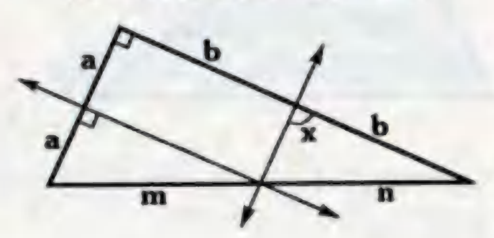
$$\Rightarrow \quad OB = OC = R$$

- Con lo cual el $\Delta BOC$ es isósceles, como $\overline{OS}$ es mediana también debe ser altura.

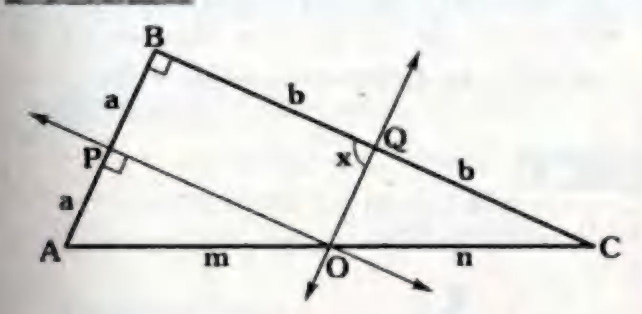
$$\therefore \quad x = 90°$$

**B)** En el gráfico se va a demostrar:

$$\boxed{m = n \quad y \quad x = 90°}$$



*Demostración:*




- Como $AP = PB = a$ y $\overline{PO} // \overline{BC}$, por el teorema de los puntos medios:

$$m = n$$

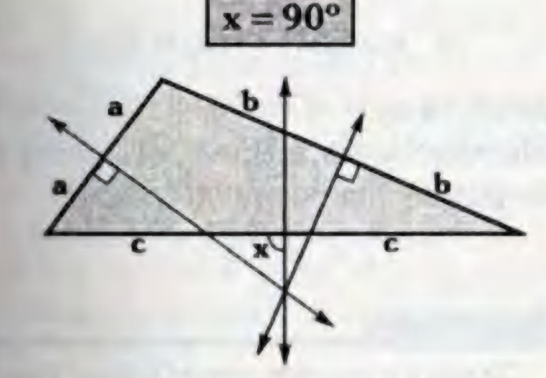
- Puesto que $BQ = QC = b$ y $AO = OC = m$

$\Rightarrow$ $\overline{OQ}$ es base media $\Delta ABC$.

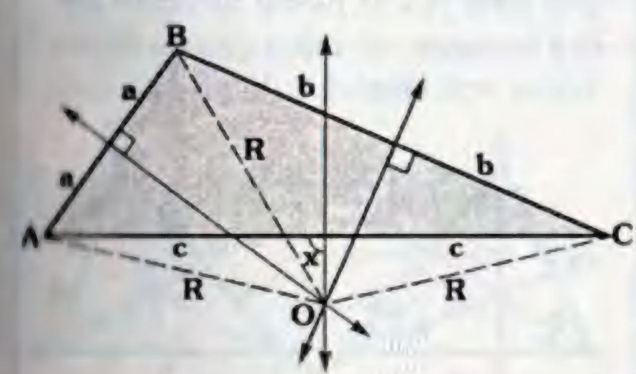
$$\therefore \quad x = 90^\circ$$

**C)** En el gráfico vamos a demostrar:

$$\boxed{x = 90^\circ}$$




- Se traza $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.




- Por el teorema de la mediatriz:

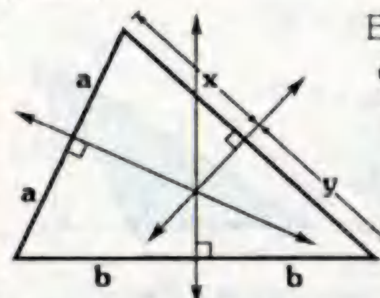
$$AO = BO = R \quad y \quad BO = OC = R$$

$$\Rightarrow \quad AO = OC = R$$

- Puesto que el $\Delta AOC$ es isósceles, por teorema, tenemos:

$$\therefore \quad x = 90^\circ$$

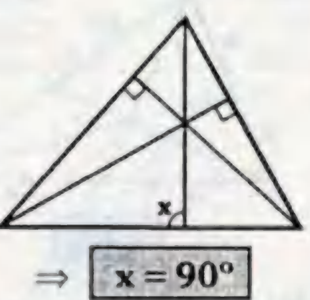
**Caso 2**




En el gráfico se demuestra $x = y$, para lo cual debemos proceder análogamente al caso 1.

### 4.4. CON RESPECTO AL ORTOCENTRO

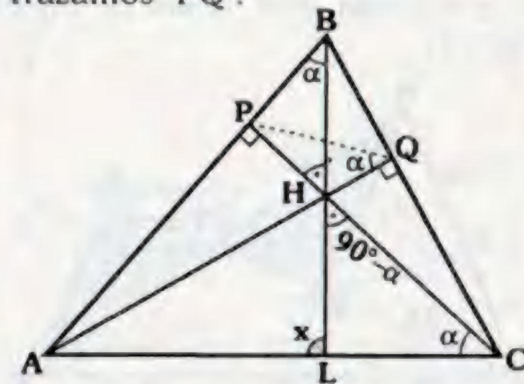
En el gráfico tenemos que demostrar:




$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 90^\circ}$$

*Demostración:*

- Trazamos $\overline{PQ}$.




- Debido a que:

$$m\measuredangle APC = m\measuredangle AQC = 90^\circ$$

el $\square APQC$ es inscriptible:

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle PQA = m\measuredangle PCA = \alpha$$

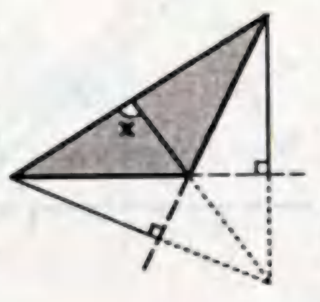
- Puesto que $m\measuredangle BPH = m\measuredangle BQH = 90^\circ$ el ⏢PBQH es inscriptible:

$\Rightarrow \ m\measuredangle HBP = m\measuredangle HQP = \alpha$

- En ⊿HLC por ángulo exterior :

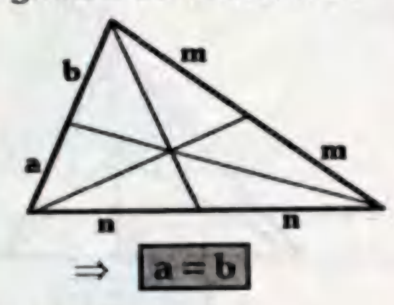
$\therefore \ x = 90^\circ$

En el gráfico demuestra $x = 90^\circ$, para lo cual nos debemos percatar que se trata del mismo caso anterior.




### 5.5. CON RESPECTO AL BARICENTRO

En el gráfico demostramos:

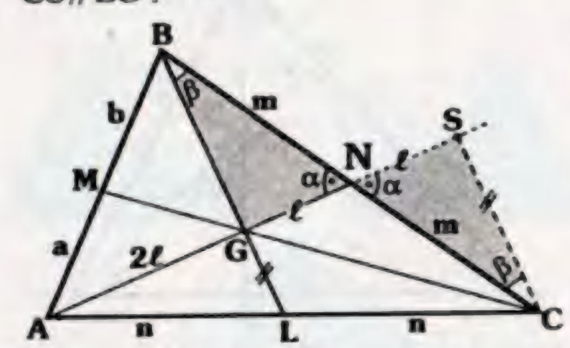



$\Rightarrow$ **$a = b$**

**Demostración:**

**Paso 1**

- Se prolonga $\overline{AN}$ hasta S, tal que $\overline{CS} // \overline{LG}$.



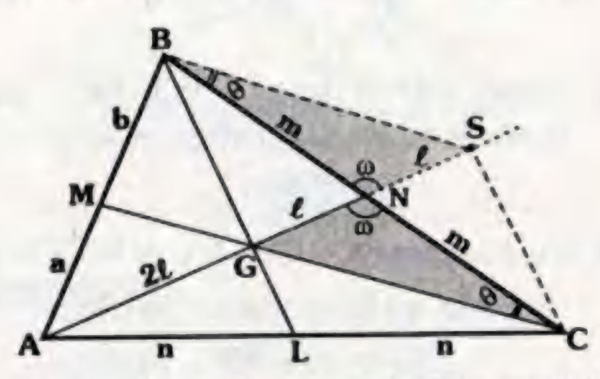

- Ya que $m\measuredangle GBN = m\measuredangle NCS = \beta$ (ángulos alternos internos), $BN = NC = m$ y $m\measuredangle BNG = m\measuredangle SNC = \alpha$ :

$\Delta BGN \cong \Delta NSC \text{ (ALA)} \Rightarrow GN = NS = \ell$

- Como $AL = LC = n$ y $\overline{LG} // \overline{SC}$ por el teorema de los puntos medios en el $\Delta ASC$, se tiene: $AG = GS = 2\ell$.

**Paso 2**

- Trazamos $\overline{BS}$.




- Como $BN = NC = m$, $m\measuredangle BNS = m\measuredangle GNC$ y $GN = NS = \ell$: $\Delta GNC \cong \Delta BNS \text{(LAL)}$

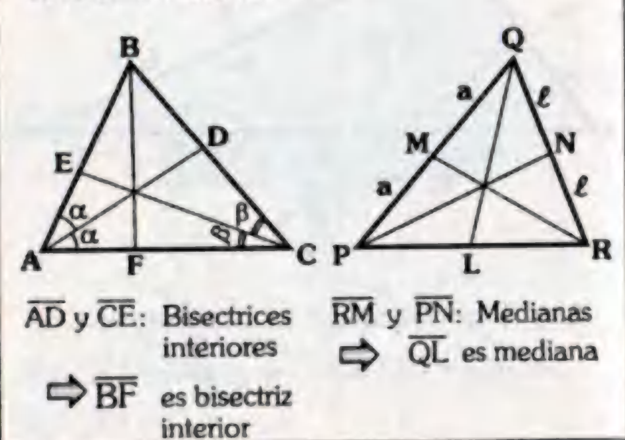
$\Rightarrow \ m\measuredangle SBN = m\measuredangle NCG = \theta$

- Debido a que $AG = GS = 2\ell$ y $\overline{GM} // \overline{BS}$ (alternos internos), por el teorema de los puntos medios en el $\Delta ABS$.

$\therefore \ a = b$

**Importante:**

*Tener en cuenta que al trazar dos líneas notables similares la ceviana que pase por el punto de corte tendrá la misma característica de dichas líneas notables.*




$\overline{AD}$ y $\overline{CE}$: Bisectrices interiores

$\Rightarrow \overline{BF}$ es bisectriz interior

$\overline{RM}$ y $\overline{PN}$: Medianas

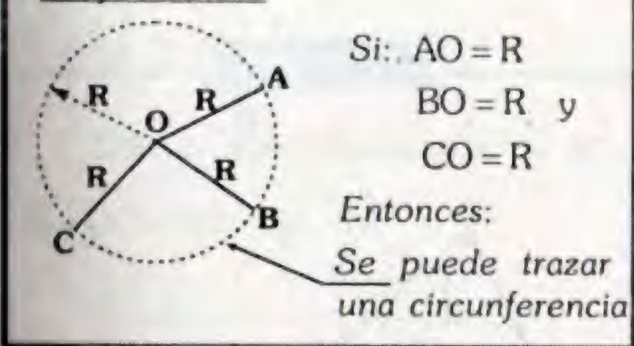
$\Rightarrow \overline{QL}$ es mediana

## 5. CIRCUNFERENCIAS INSCRITA, EXINSCRITA Y CIRCUNSCRITA AL TRIÁNGULO

***Recordar:*** (Postulado de Euclides)

*Por un punto arbitrario como centro y un radio cualquiera se puede trazar una circunferencia.*

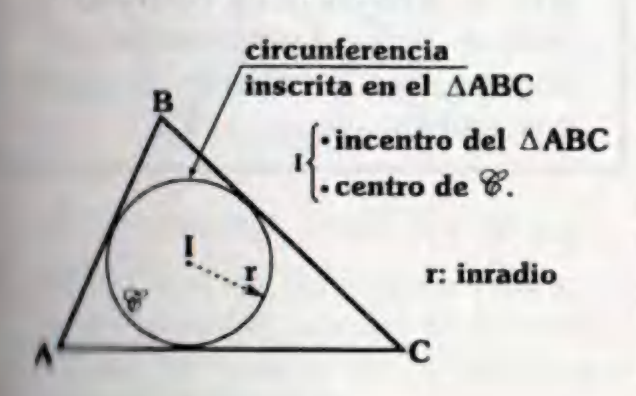
*Gráficamente:*



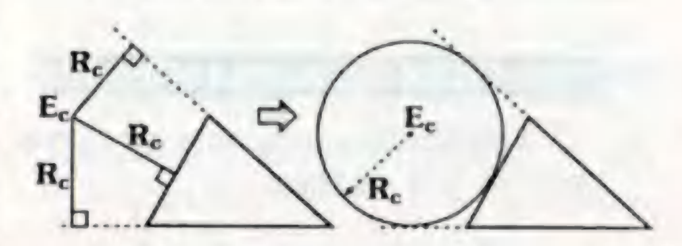

* Por lo estudiado en el incentro, sabemos que dicho punto equidista de los lados del triángulo (IP=IT=IH=r, ver demostración 4.1), por lo tanto (por el postulado de Euclides) el incentro es el centro de una circunferencia de radio r, la cual es tangente a cada lado del triángulo, como se muestra a continuación.

### 5.1. CIRCUNFERENCIA INSCRITA EN EL TRIÁNGULO

Es la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo.

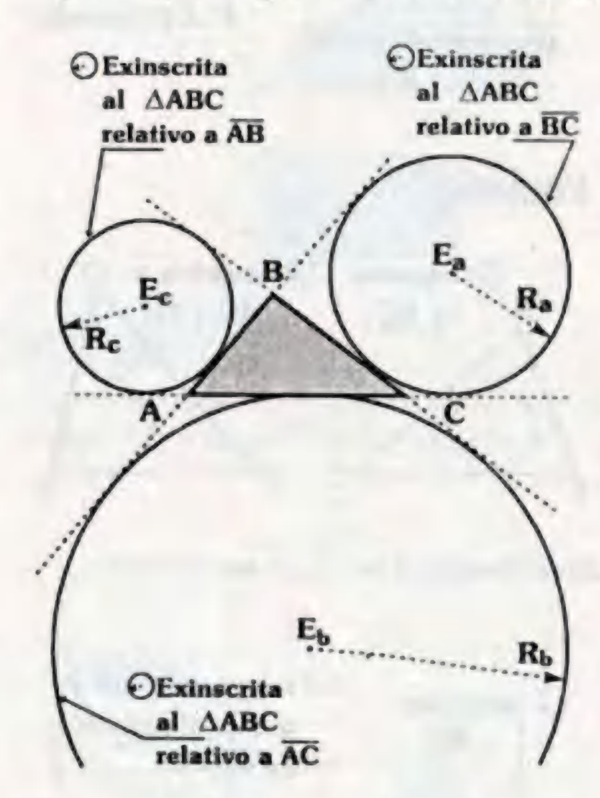



* De forma similar a los estudiado en el incentro podemos concluir:




### 5.2. CIRCUNFERENCIA EXINSCRITA EN EL TRIÁNGULO

Es la circunferencia tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos.




– $E_a$: Excentro del $\Delta ABC$, relativo a $\overline{BC}$

– $E_b$: Excentro del $\Delta ABC$, relativo a $\overline{AC}$

– $E_c$: Excentro del $\Delta ABC$, relativo a $\overline{BA}$

– $R_a$: Exradio del $\Delta ABC$, relativo a $\overline{BC}$

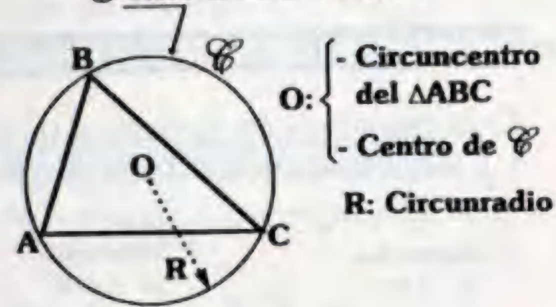
– $R_b$: Excradio del $\Delta ABC$, relativo a $\overline{AC}$

– $R_c$: Exradio del $\Delta ABC$, relativo a $\overline{BA}$

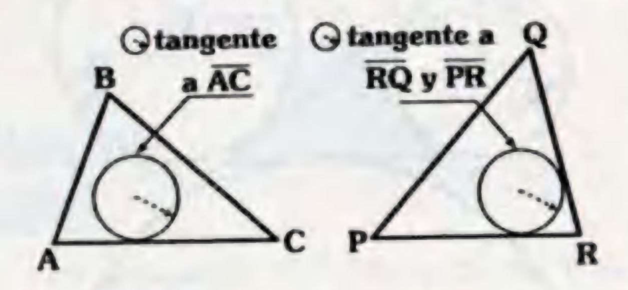
* Lo mismo ocurre con el circuncentro.

### 5.3. CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA A UN TRIÁNGULO

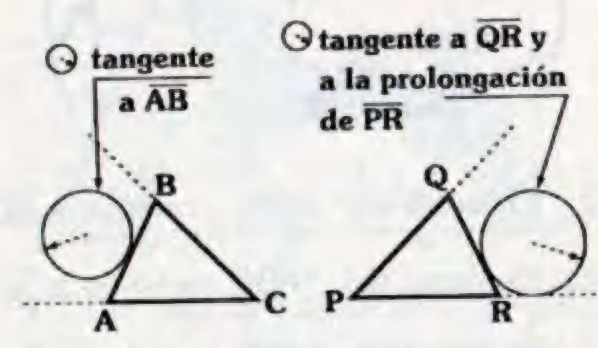
Es aquella circunferencia que pasa por los tres vértices.



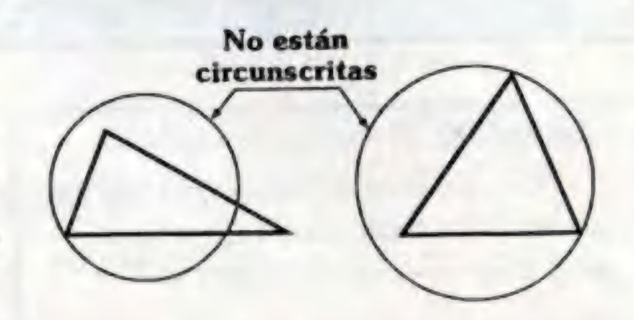

***Cuidado:***




En ambos casos las $\odot_s$ no son inscritas.



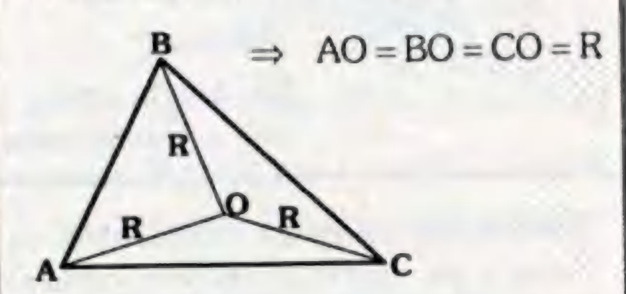

Las $\odot_s$ no son exinscritas.




**Observación**

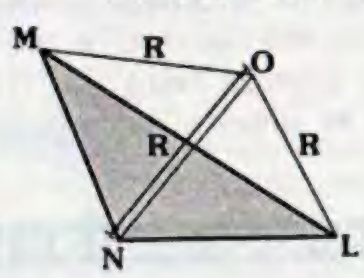
*Si O: Circuncentro del $\Delta ABC$:*

$\Rightarrow AO = BO = CO = R$




*Si O: Circuncentro del $\Delta MNL$:*

$\Rightarrow MO = NO = LO = R$



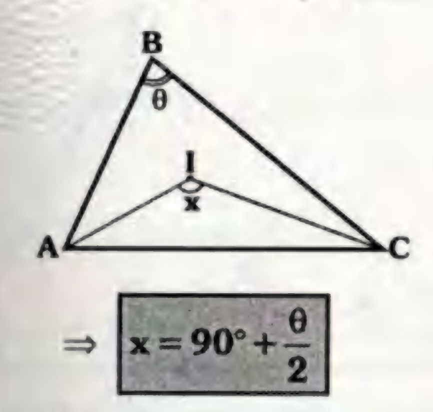

*En ambos casos se podrá trazar una circunferencia de centro O y radio R (lo cual daría mayor panorama para la solución de algunos problemas).*

## 6. TEOREMAS FUNDAMENTALES

### 6.1. TEOREMA

La medida de un ángulo cuyo vértice es el incentro y sus lados pasan por dos vértices de un triángulo es 90° más la mitad de la medida del ángulo interior en el tercer vértice.

Si I: Incentro del $\Delta ABC$.



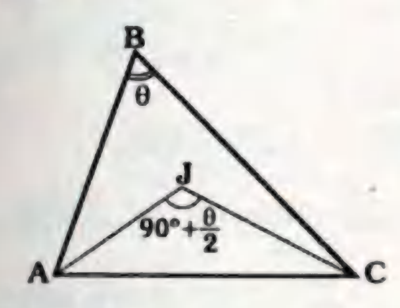

$$\Rightarrow \boxed{x = 90° + \frac{\theta}{2}}$$

**Demostración:**

- Dado que I es incentro, sabemos que $\overline{AI}$ y $\overline{CI}$ son bisectrices. Por teorema de ángulos entre bisectrices:

$$x = 90° + \frac{\theta}{2}$$

**Cuidado:**



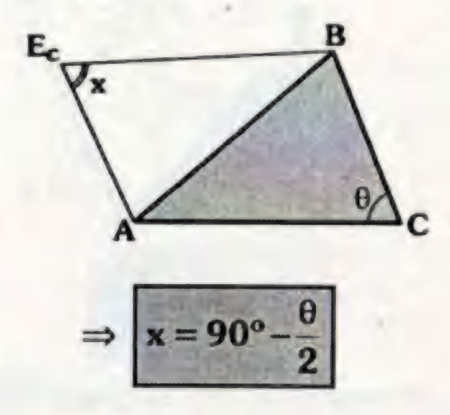

Se observa que: $m\measuredangle AJC = 90° + \frac{\theta}{2}$

con lo cual **no** podemos afirmar que J es **incentro**, nos faltarían condiciones las cuales analizaremos en las páginas siguientes.

### 6.2. TEOREMA

La medida del ángulo cuyo vértice es el excentro relativo a un lado y cuyos lados pasan por los vértices de dicho lado es igual a 90° menos la mitad de la medida del ángulo interior en el tercer vértice.

Si $E_c$: Excentro del $\Delta ABC$, relativo a $\overline{AB}$.



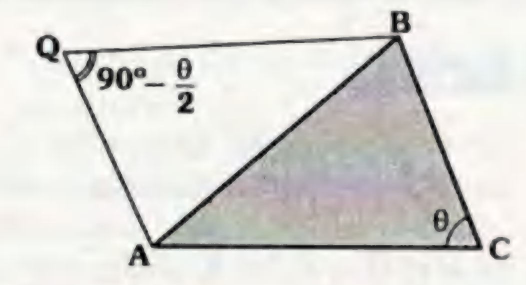

$$\Rightarrow \boxed{x = 90° - \frac{\theta}{2}}$$

**Demostración:**

- Así como en el teorema anterior, del tema de triángulo se concluye:

$$\therefore\ x = 90° - \frac{\theta}{2}$$

**Cuidado:**

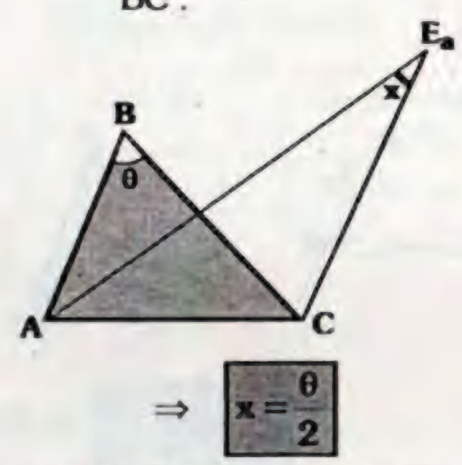



"Q" no necesariamente es un excentro del $\Delta ABC$.

6.3. **TEOREMA**

La medida del ángulo cuyo vértice es el excentro relativo a un lado del triángulo y cuyos lados pasan por un extremo de dicho lado y el tercer vértice del triángulo es igual a la mitad de la medida del ángulo interior en el otro extremo.

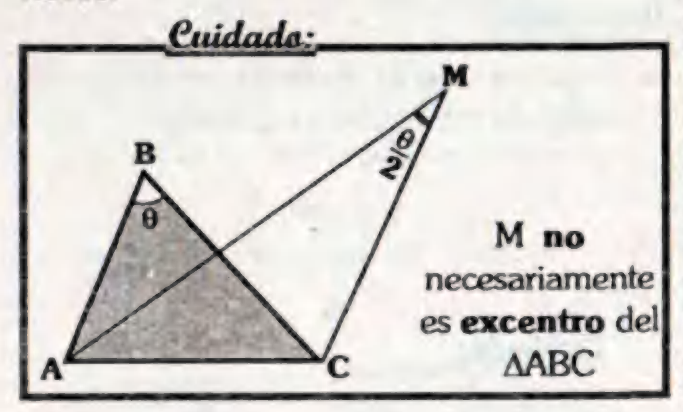
Si $E_a$ : Excentro del ABC, relativo a $\overline{BC}$.




$$\Rightarrow \quad x = \frac{\theta}{2}$$

La demostración es análoga a las anteriores.

***Cuidado:***

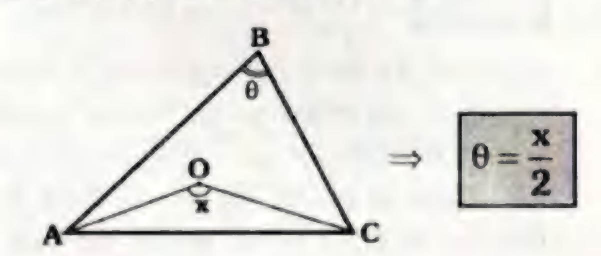



6.4 **TEOREMA**

En todo triángulo la medida de un ángulo interior agudo es la mitad de la medida del ángulo cuyo vértice es el circuncentro de dicho triángulo y los lados pasan por los vértices no correspondientes al ángulo mencionado.

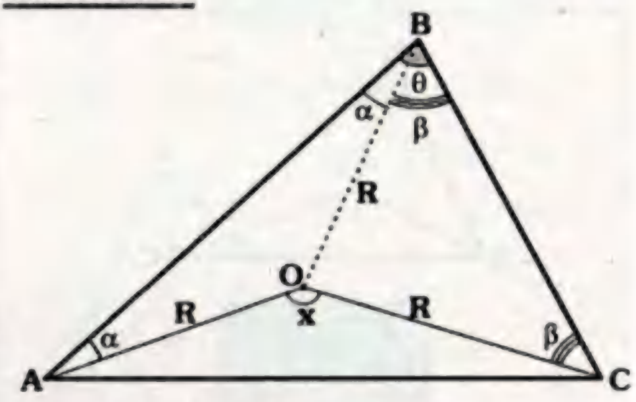
**Caso 1**

Si O: Circuncentro del ABC.




$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{x}{2}$$

***Demostración:***




- Trazamos $\overline{OB}$.
- Como O es circuncentro.

  $\Rightarrow$ AO=BO=CO

  $\Rightarrow$ ΔAOB y ΔBOC son isósceles

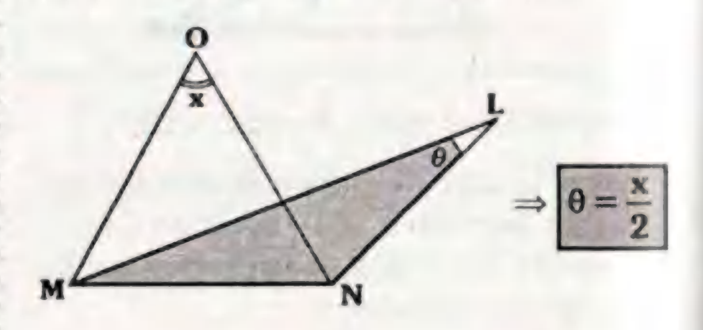
- Por propiedad: $x = \alpha + \beta + \theta$
- En "B": $\alpha + \beta = \theta$ (+)

  $\Rightarrow \quad x = 2\theta$

$\therefore \quad x = 2\theta$

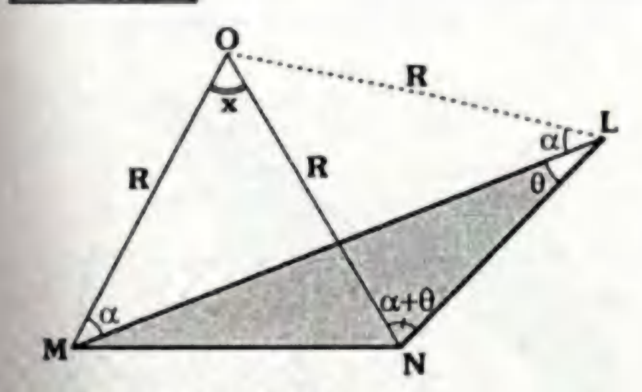
**Caso 2**

Si O: Circuncentro del ΔMNL.




$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{x}{2}$$

**Demostración:**



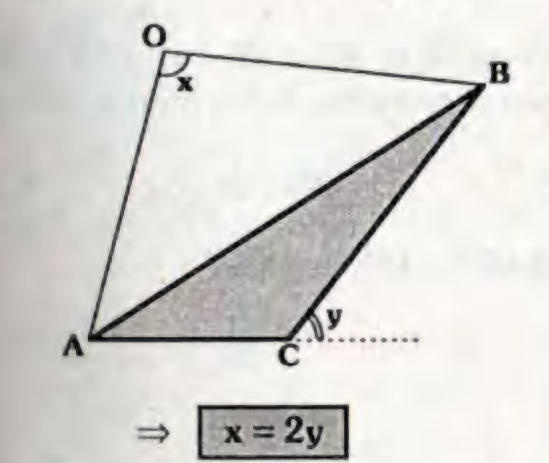

- Trazamos $\overline{OL}$.
- $\Delta MLO$, $\Delta MNO$ y $\Delta LNO$ son isósceles.

  $\Rightarrow m\measuredangle ONL = m\measuredangle ONL = \alpha + \theta$
- En ⋈: $x + \alpha = \alpha + 2\theta$

$$\therefore\ \theta = \frac{x}{2}$$

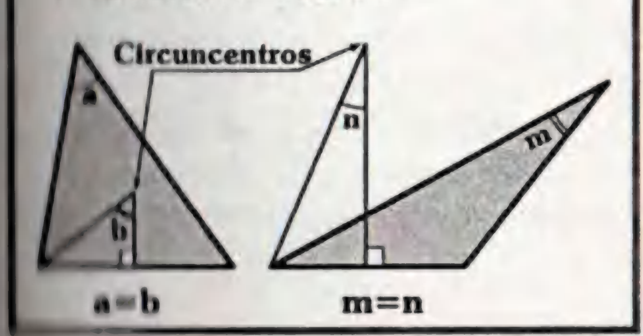
**Observación**

- *Si O: Circuncentro del $\Delta ABC$.*




$\Rightarrow$ $x = 2y$

- *También se deduce :*

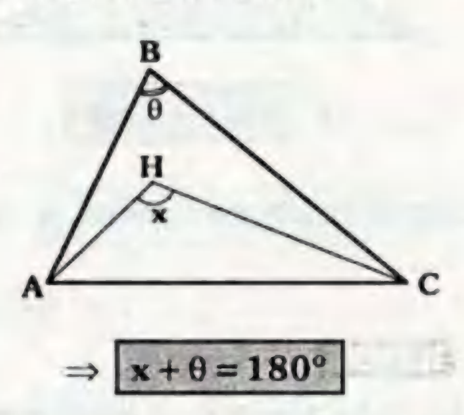



### 6.5. TEOREMA

En todo triángulo un ángulo interior y el ángulo cuyo vértice es el ortocentro de dicho triángulo y sus lados pasan por los vértices no correspondientes al ángulo interior mencionado son suplementarios.

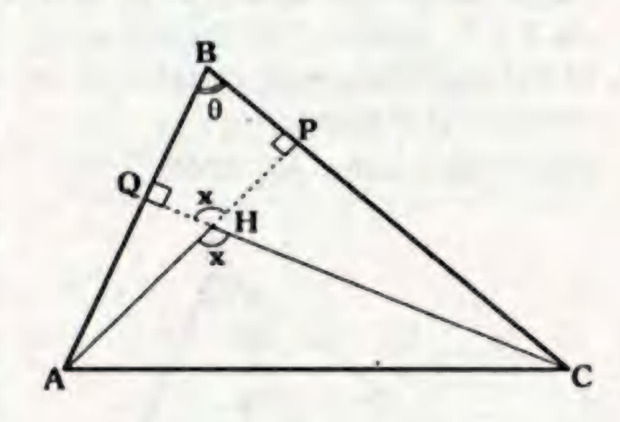
**Caso 1**

Si H: Ortocentro del ABC :




$\Rightarrow$ $x + \theta = 180°$

**Demostración:**



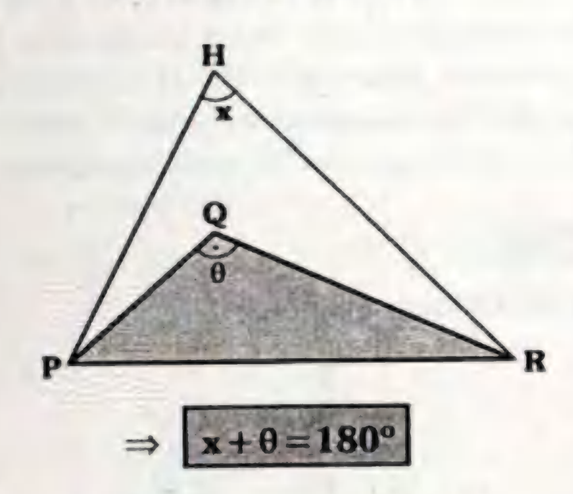

- Como H es ortocentro $\Rightarrow$ $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$ son alturas.
- En ⏢QBPH:

$$x + \theta + 180° = 360°$$

$$\therefore\ x + \theta = 180°$$

**Caso 2**

Si, H : Ortocentro del $\Delta PQR$



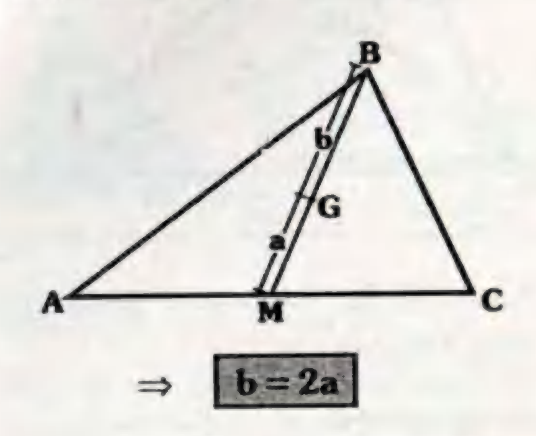

$$\Rightarrow \boxed{x + \theta = 180^\circ}$$

La demostración es análoga a la anterior.

**6.6. TEOREMA**

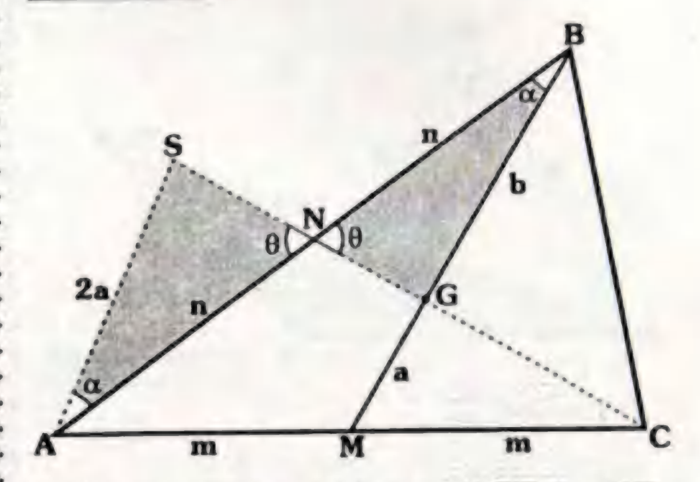
En todo triángulo el baricentro divide a la mediana en dos segmentos cuyas longitudes están en la razón de 1 a 2, siendo el de mayor longitud el segmento cuyo extremo es un vértice del triángulo.

Si G: Baricentro del $\Delta ABC$




$$\Rightarrow \boxed{b = 2a}$$

***Demostracion***




- Trazamos las medianas $\overline{CN}$ y $\overline{BM}$, las cuales pasan por el baricentro G.

$$\Rightarrow AN = NB = n \qquad y$$

$$AM = MC = m$$

- Luego prolongamos $\overline{CN}$ hasta S, tal que $\overline{AS} // \overline{MG}$.

- Puesto que $AM = MC = m$ y $\overline{MG} // \overline{AS}$, por el teorema de los puntos medios:

$$AS = 2a$$

- $\Delta ASN \cong \Delta BNG$ A.L.A.

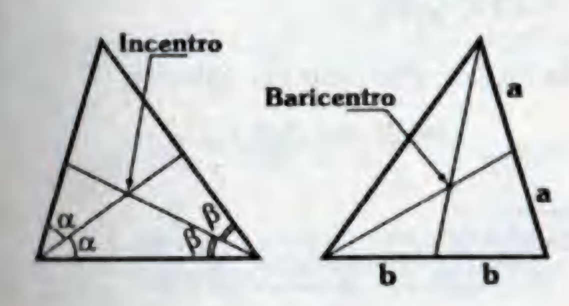
$$\therefore \quad b = 2a$$

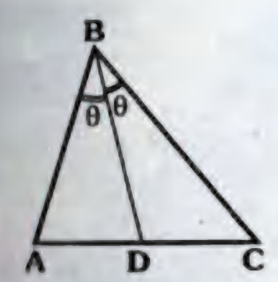
## 7. CRITERIOS PARA INDENTIFICAR LOS PUNTOS NOTABLES

### 7.1 CRITERIO PRINCIPAL

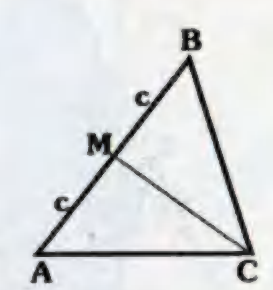
Cuando se quiere ubicar o reconocer un punto notable por lo general bastara trazar dos líneas de la misma característica (ya sean por ejemplo dos bisectrices, dos medianas, dos alturas, etc.) o trazar solo una de ellas y el punto al que hacemos referencia se encontrará sobre dicha línea.

En adelante al trazar dos líneas de la misma especie el punto de intersección será un punto notable (por ejemplo la intersección de dos bisectrices interiores es el incentro).



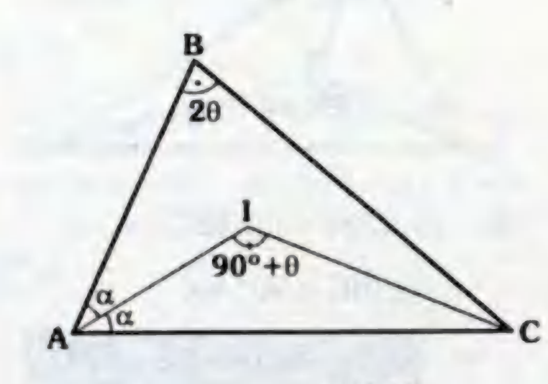




En $\overline{BD}$ se encuentra el incentro




En $\overline{CM}$ se encuentra el baricentro

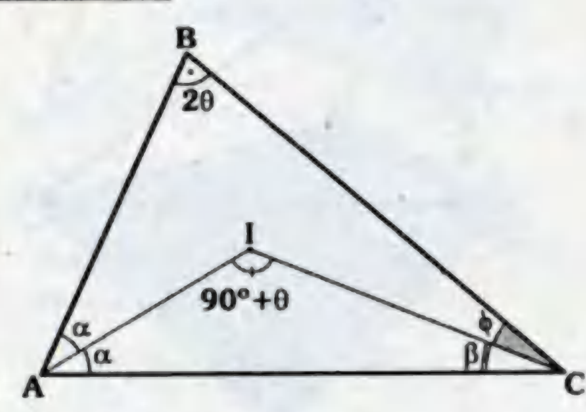
### 7.2




$$\text{Si : } m\measuredangle AIC = 90° + \frac{m\measuredangle ABC}{2} = 90° + \theta$$

$\Rightarrow$ **I: Incentro del $\triangle ABC$**

**Demostración:**




- $\triangle AIC$:

$$\alpha + 90° + \theta + \beta = 180°$$

$$\Rightarrow \alpha + \theta + \beta = 90° \qquad ...(I)$$

- ABCI:

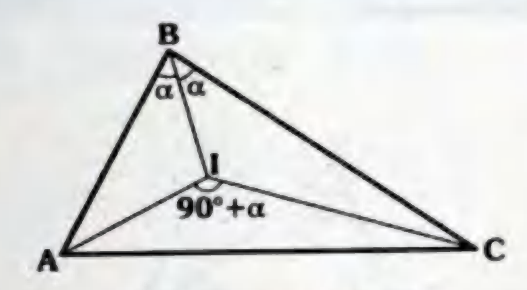
$$90° + \theta = \alpha + 2\theta + \phi$$

$$\Rightarrow 90° = \alpha + \theta + \phi \qquad ...(II)$$

- De (I) y (II):

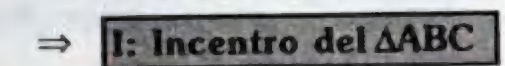
$\beta = \phi$, con lo cual $\overrightarrow{CI}$ es bisectriz, por lo tanto del criterio principal, se deduce que I es incentro del ABC.

**7.3**



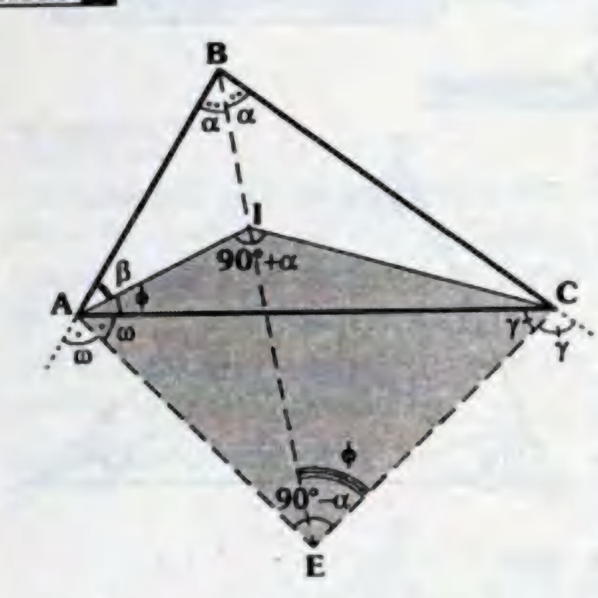

Si : $m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBC = \alpha$ y

$m\measuredangle AIC = 90° + \alpha$

$\Rightarrow$ 


**Demostración:**

**Método 1**




- Se prolonga $\overline{BI}$ hasta el excentro E del $\Delta ABC$.
- Luego trazamos $\overline{EA}$ y $\overline{EC}$.
- Por el teorema 6.2, en $\Delta ABC$:

  $m\measuredangle AEC = 90° - \alpha$
- Debido a que:

  $m\measuredangle AIC + m\measuredangle AEC = 180°$

  El $\triangle$AICE es inscriptible:

  $\Rightarrow m\measuredangle IEC = m\measuredangle IAC = \phi$

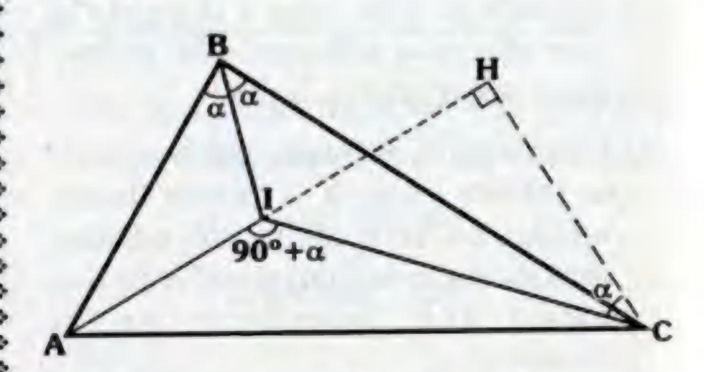
- $\Delta ABC$ : Por el teorema 6.3

  $\Rightarrow \dfrac{\beta + \phi}{2} = \phi \Rightarrow \beta = \phi$
- $\overrightarrow{AI}$ : Bisectriz interior $\Delta ABC$

  $\therefore$ I es incentro del $\Delta ABC$

**Método 2**

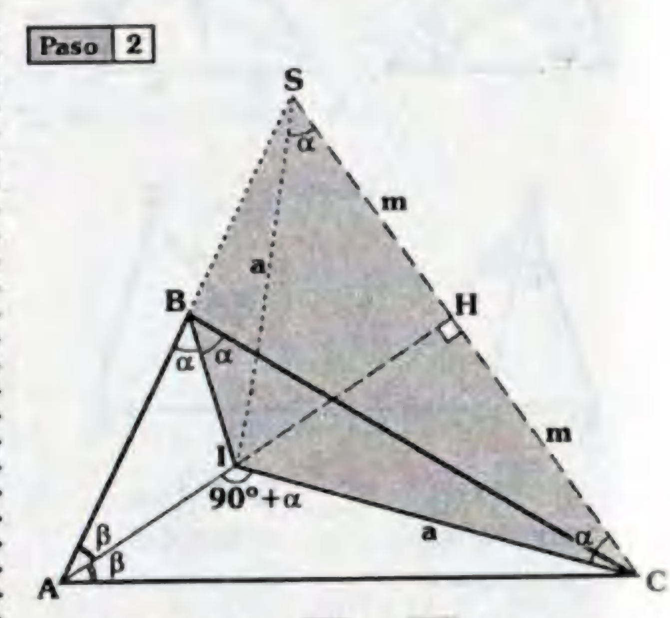
**Paso 1**




- Prolongamos $\overline{AI}$ hasta H, tal que $m\measuredangle IHC = 90°$.
- $\triangle$IHC: Por ángulo exterior

  $\Rightarrow m\measuredangle HCI = \alpha$

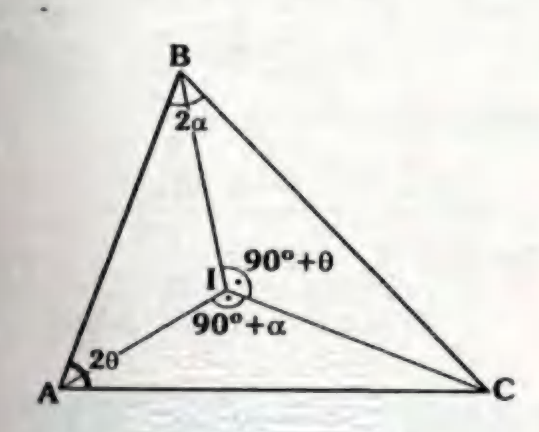
**Paso 2**




- Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{CH}$ hasta que se corten en S.

- Dado que: $m\measuredangle ABI = m\measuredangle ICS = \alpha$ el $\square$BSCI es inscriptible
  $\Rightarrow\ m\measuredangle IBC = m\measuredangle ISC = \alpha$
- Como $m\measuredangle ISC = m\measuredangle ICS = \alpha$ el $\Delta$ISC es isósceles $\Rightarrow\ SH = HC = m$
- Con lo cual el $\Delta$ASC es isósceles
  $\Rightarrow\ m\measuredangle SAH = m\measuredangle CAH = \beta$
  $\therefore$ I es incentro del $\Delta$ABC

**7.4**



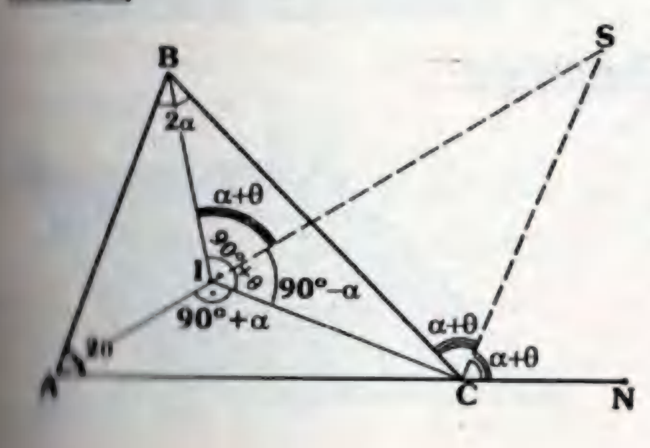

$$\text{Si}:\ m\measuredangle AIC = 90^\circ + \frac{m\measuredangle ABC}{2} = 90^\circ + \alpha$$

$$\text{y}\ \ m\measuredangle BIC = 90^\circ + \frac{m\measuredangle BAC}{2} = 90^\circ + \theta$$

$\Rightarrow$ **I: Incentro del $\Delta$ABC**

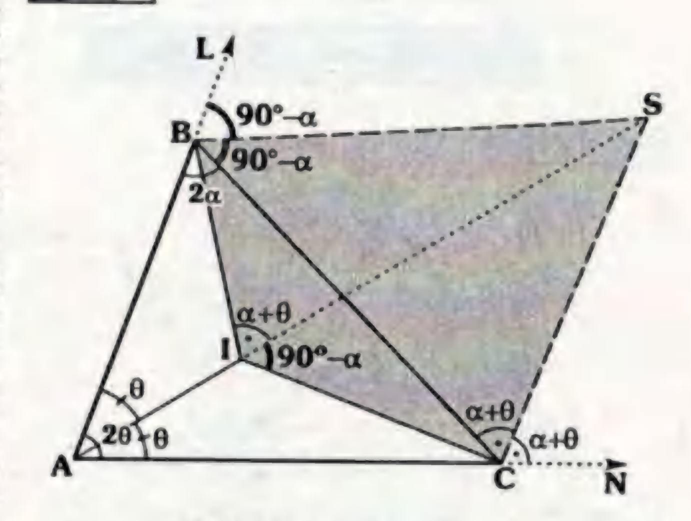
**Demostración:**

**Paso 1**




- Prolongamos $\overline{AI}$ y trazamos la bisectriz exterior $\overline{CS}$:
  $$m\measuredangle BCS = m\measuredangle SCN = \alpha + \theta$$
- En "I":
  $$m\measuredangle SIC = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha$$
  $$m\measuredangle BIS = 90^\circ + \theta - (90^\circ - \alpha) = \alpha + \theta$$

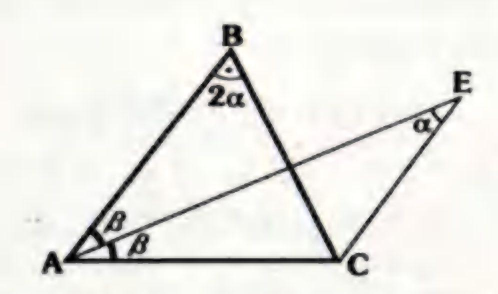
**Paso 2**




- Trazamos $\overline{BS}$, debido a que: $m\measuredangle BIS = m\measuredangle BCS = \alpha + \theta\ \Rightarrow \square$BICS es inscriptible.
  $$\Rightarrow\ m\measuredangle SIC = m\measuredangle SBC = 90^\circ - \alpha$$
- En "B": $m\measuredangle LBS = 90^\circ - \alpha$
- Luego podemos notar que $\overline{BS}$ y $\overline{CS}$ son bisectrices exteriores para el $\Delta$ABC, por el criterio principal $\overline{AS}$ es bisectriz, es decir:
  $$m\measuredangle BAS = m\measuredangle SAC = \theta$$
- En $\Delta$AIB, por ángulo exterior: $m\measuredangle ABI = \alpha$, luego $m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBC$, es decir $\overrightarrow{BI}$ es bisectriz del $\measuredangle$ABC.

$\therefore$ I: Incentro $\Delta$ABC

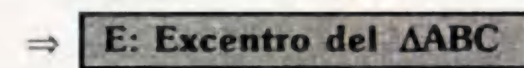
**7.5**



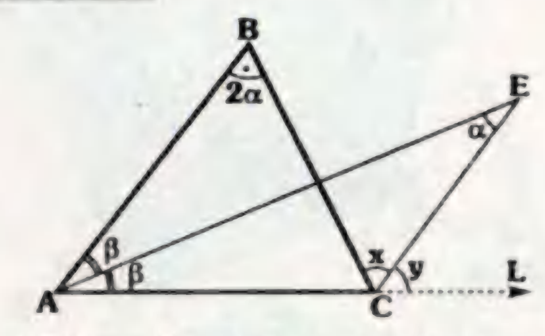

Si : $m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle AEC) = 2\alpha$ y

$m\measuredangle BAE = m\measuredangle CAE = \beta$

$\Rightarrow$ **E: Excentro del ΔABC**



**Demostración:**




- ΔACE : Por ángulo exterior :

$\Rightarrow \quad y = \alpha + \beta \qquad ...(I)$

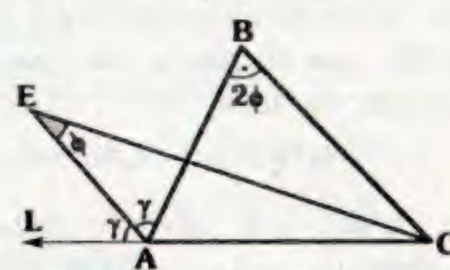
- $\beta + 2\alpha = x + \alpha$ :

$\Rightarrow \quad x = \alpha + \beta \qquad ...(II)$

- De (I) y (II): $x = y$ es decir $\overrightarrow{CE}$ bisectriz, por el criterio principal :

E es excentro ΔABC .

**7.6**

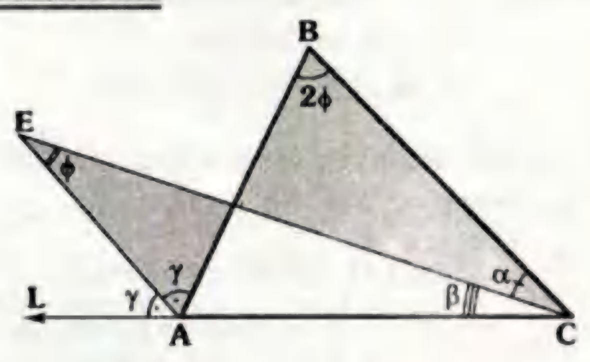



Si : $m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle AEC) = 2\phi$ y

$m\measuredangle BAE = m\measuredangle EAL = \gamma$

$\Rightarrow$ **E: Excentro del ΔABC**

**Demostración:**




- ΔCAE : Por ángulo exterior:

$\Rightarrow \quad \beta + \phi = \gamma \qquad ...(I)$

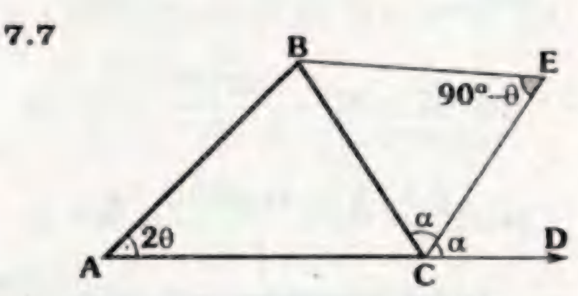
- : $\alpha + 2\phi = \gamma + \phi$

$\Rightarrow \quad \alpha + \phi = \gamma \qquad ...(II)$

- De (I) y (II): $\alpha = \beta$

$\therefore$ E es excentro del ΔABC .

**7.7**

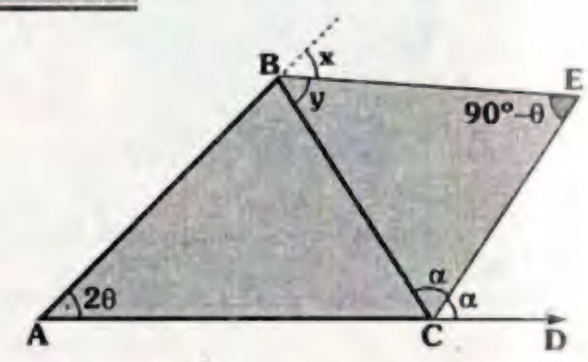



Si : $m\measuredangle BEC = 90° - \dfrac{m\measuredangle BAC}{2} = 90° - \theta$

y $m\measuredangle BCE = m\measuredangle ECD = \alpha$

$\Rightarrow$ **E: Excentro del ΔABC**

**Demostración:**



- $\Delta BEC$ : $y+\alpha+90^\circ-\theta=180^\circ$

  $\Rightarrow\ y=90^\circ+\theta-\alpha$ ...(I)

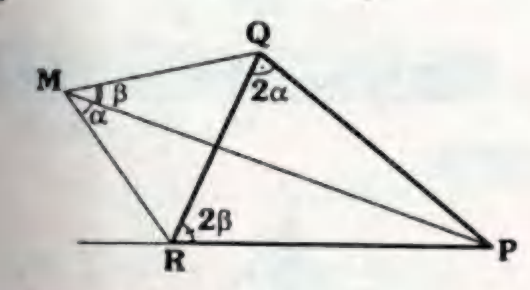
- ⊿ : $x+\alpha=2\theta+90^\circ-\theta$

  $\Rightarrow\ x=90^\circ+\theta-\alpha$ ...(II)

- De (I) y (II): $x=y$

  $\therefore$ E es excentro del $\Delta ABC$.

**7.8**



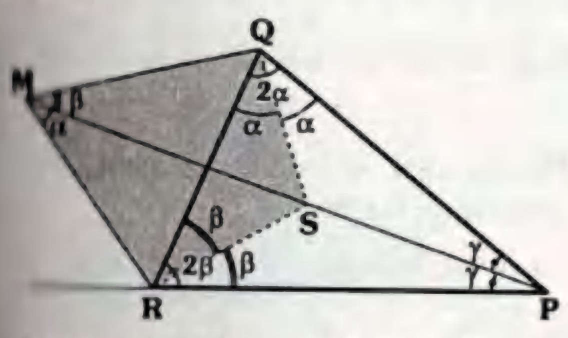

Si : $m\measuredangle PQR=2(m\measuredangle PMR)=2\alpha$

$m\measuredangle PRQ=2(m\measuredangle PMQ)=2\beta$

$\Rightarrow$ **M: Excentro del $\Delta PQR$**

***Demostración:***

**Paso 1**

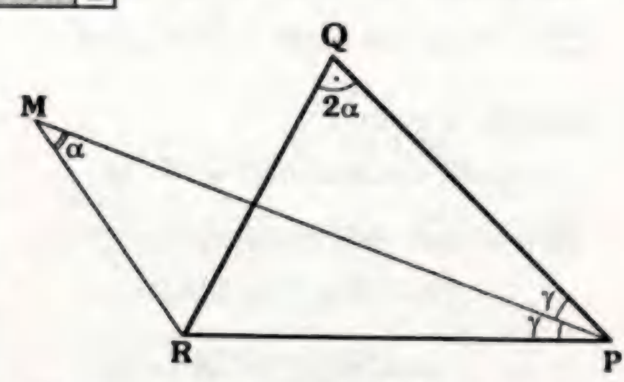



- Ubicamos S en $\overline{PM}$ tal que : $m\measuredangle RQS=\alpha$.
- Como $m\measuredangle RMP=m\measuredangle RQS=\alpha$, al trazar $\overline{RS}$ el ⌂MQSR es inscriptible.

  $\Rightarrow\ m\measuredangle QRS=m\measuredangle QMS=\beta$

- Por el criterio principal $\overline{PS}$ es bisectriz interior del $\Delta PQR$.

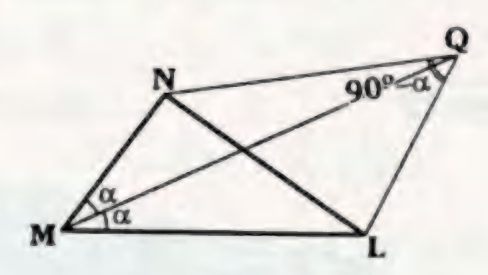
**Paso 2**




- Dado que: $m\measuredangle QPM=m\measuredangle MPR=\gamma$, por el criterio 7.5

  $\therefore$ M es excentro del $\Delta PQR$.

**7.9**



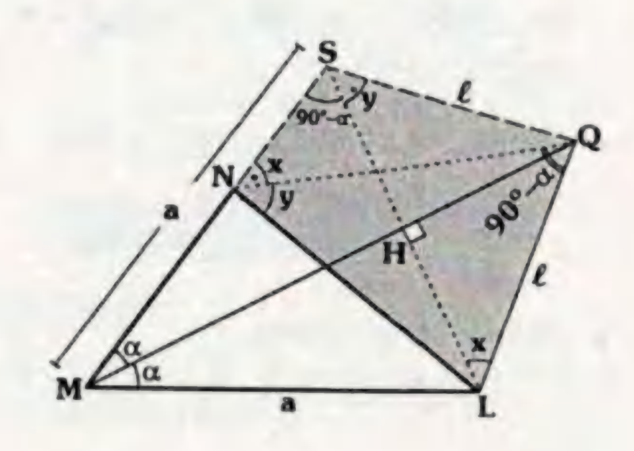

Si $m\measuredangle NQL=90^\circ-\dfrac{m\measuredangle NML}{2}=90^\circ-\alpha$

y $m\measuredangle NMQ=m\measuredangle QML=\alpha$

$\Rightarrow$ **Q : Excentro del $\Delta MNL$**

***Demostración:***

**Método 1**



- Trazamos $\overline{LH} \perp \overline{MQ}$ y prolongamos $\overline{LH}$ hasta que corte a $\overline{MN}$ en S.

- Debido a que:

  $m\measuredangle NSL = m\measuredangle NQL = 90^\circ - \alpha$

  El ⏢NSQL es inscriptible:

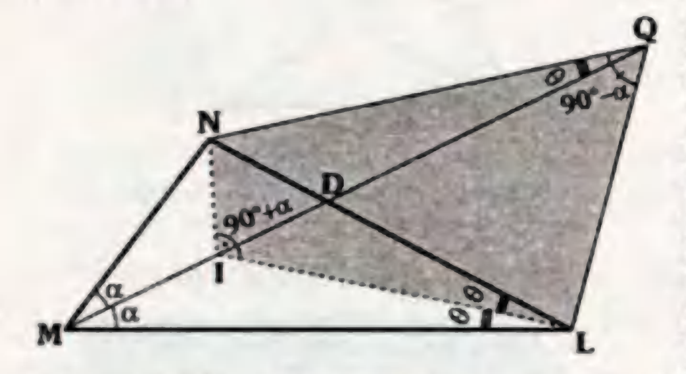
  $\Rightarrow \quad m\measuredangle SNQ = m\measuredangle SLQ = x$

  $m\measuredangle LSQ = m\measuredangle QNL = y$

- En $\Delta MSL$: $\overline{MH}$ es altura y bisectriz $\overline{MH}$ es mediana, con lo cual el $\Delta SQL$ es isósceles $\Rightarrow x = y$

  $\therefore$ Q es excentro del $\Delta MNL$.

**Método 2**




- Por el criterio principal sabemos que el incentro I del $\Delta MNL$ se encuentra en $\overline{MD}$.

- En $\Delta MNL$: $m\measuredangle MLI = m\measuredangle ILN = \theta$ y $m\measuredangle NIL = 90^\circ + \alpha$

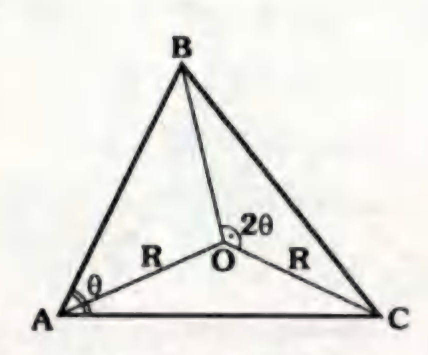
- Como $m\measuredangle NIL + m\measuredangle NQL = 180^\circ$ el ⏢NILQ es inscriptible.

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle ILN = m\measuredangle IQN = \theta$

- Aplicando el criterio 7.5.

  $\therefore$ Q es excentro del $\Delta MNL$.

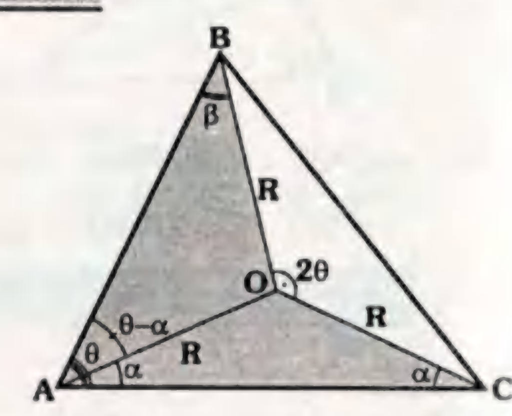
**7.10**




Si : $m\measuredangle BOC = 2(m\measuredangle BAC) = 2\theta$ y
$AO = OC = R$

$\Rightarrow$ **O: Circuncentro del $\Delta ABC$**

***Demostración:***




- $\triangle \; \alpha + \beta + \theta = 2\theta \Rightarrow \beta = \theta - \alpha$

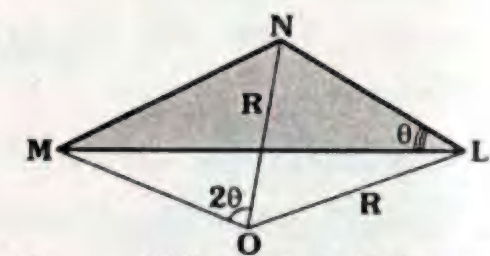
- Con lo cual el $\Delta AOB$ es isósceles

  $\Rightarrow BO = R$

- Puesto que $AO = BO = CO = R$, por el criterio principal.

  $\therefore$ O es circuncentro del $\Delta ABC$.

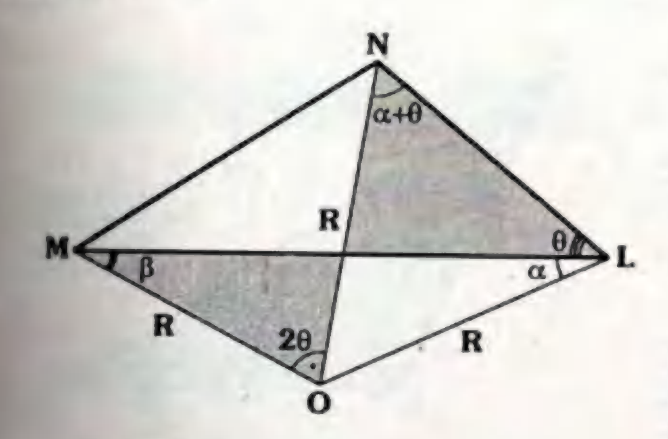
**7.11**




Si : $m\measuredangle MON = 2(m\measuredangle MLN) = 2\theta$ y
$ON = OL = R$

$\Rightarrow$ **O: Circuncentro del $\Delta MNL$**

***Demostración:***




- $\Delta NOL$: Isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle ONL = m\measuredangle OLN = \alpha + \theta$$

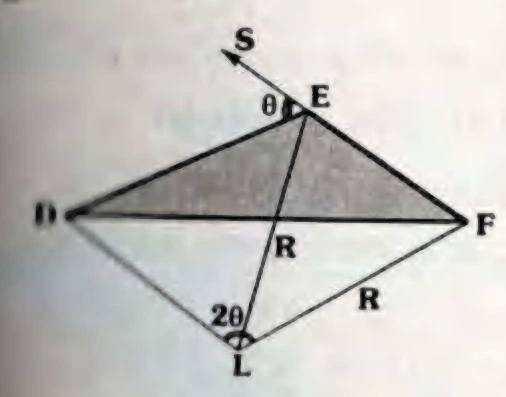
- ⊿: $\beta + 2\theta = \alpha + \theta + \theta \Rightarrow \beta = \alpha$
- Con lo cual el $\Delta MOL$ es isósceles.

$$\Rightarrow MO = R$$

- Ya que $MO=NO=LO=R$, podemos asegurar.

$\therefore$ O es circuncentro del $\Delta MNL$.

**7.12**

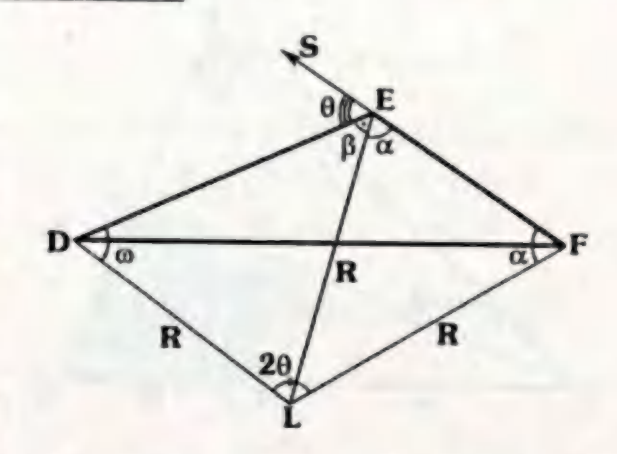



Si : $m\measuredangle DLF = 2(m\measuredangle DES) = 2\theta$ y

$LE = LF = R$

$\Rightarrow$ **L: Circuncentro del $\Delta DEF$**

***Demostración:***




- Debido a que $EL = LF = R$ el $\Delta LFE$ es isósceles.

$$\Rightarrow m\measuredangle LEF = m\measuredangle LFE = \alpha$$

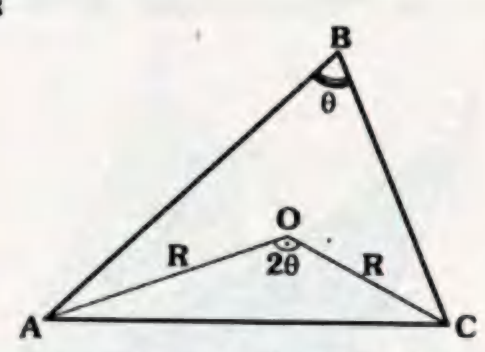
- En "S": $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$ ...(I)
- ⏢DEFL:

$$\omega + \alpha + \beta + \alpha + 2\theta = 360^\circ \quad ...(II)$$

- De (I) y (II): $\beta = \omega$, con lo cual $DL=R$.

$\therefore$ L es circuncentro del $\Delta DEF$.

**7.13**



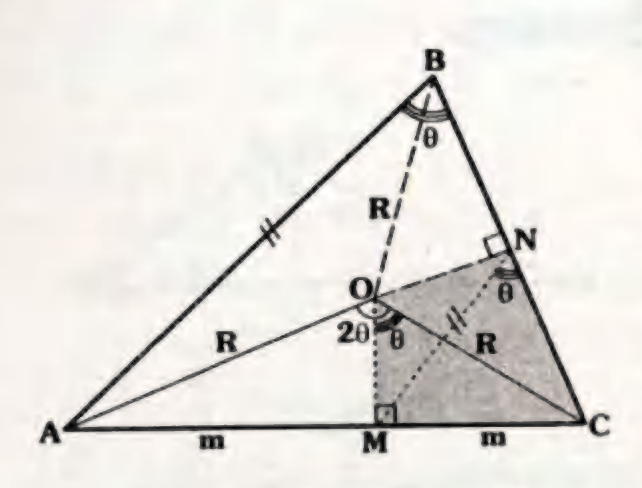

Si : $m\measuredangle AOC = 2(m\measuredangle ABC) = 2\theta$ y

$AO = OC = R$

$\Rightarrow$ **O: Circuncentro del $\Delta ABC$**

***Demostración***

- Trazamos $\overline{OB}$ y la altura $\overline{OM}$ del $\Delta$ isósceles AOC.




$\Rightarrow$ AM = MC = m y m∡MOC = θ

- Luego al trazar la altura ON del ΔBOC, nos damos cuenta que el ⏢OMCN es inscriptible.

$\Rightarrow$ m∡MOC = m∡MNC = θ

- Como: AM=MC=m y

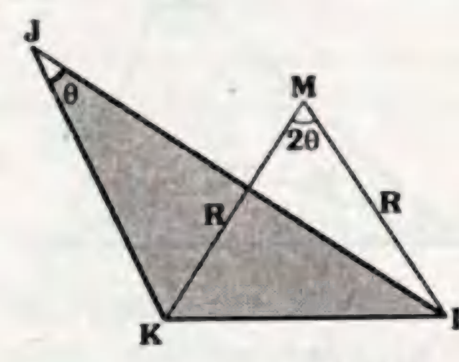
$\overline{MN} // \overline{AB} \Rightarrow$ BN = NC

- Por lo cual el ΔBOC es isósceles:

$\Rightarrow$ OB = R

∴ O es circuncentro del ΔABC.

**7.14**

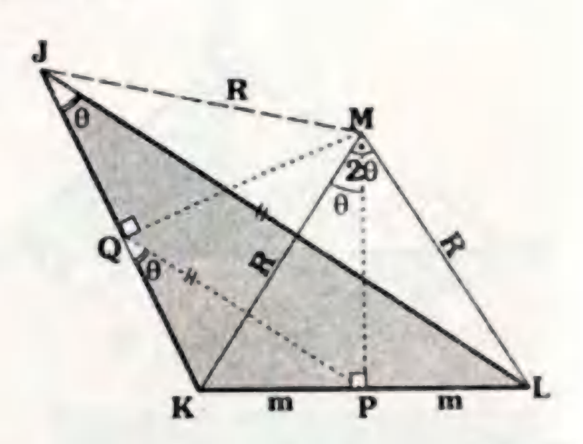



Si : m∡KML = 2(m∡KJL) = 2θ y

KM = ML = R

$\Rightarrow$ **M: Circuncentro del Δ JKL**

***Demostración:***




- Trazamos $\overline{MJ}$ y la altura MP del Δ isósceles KML.
- Con lo cual:

m∡KMP = θ y KP = PL = m

- Luego al trazar la altura MQ del ΔJKM, con lo cual el ⏢KQMP es inscriptible.

$\Rightarrow$ m∡KQP = m∡KMP = θ

- Dado que KP=PL=m y $\overline{QP} // \overline{JL}$

$\Rightarrow$ JQ = QK (por el teorema de los puntos medios).

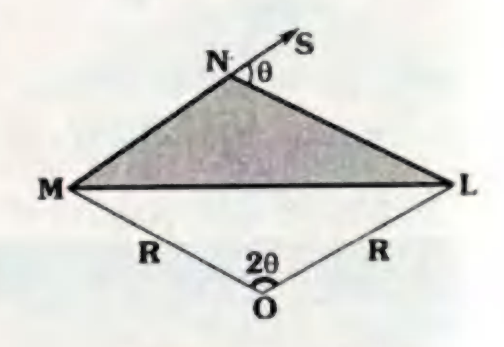
- $\overline{MQ}$ es altura y mediana del ΔJKM

$\Rightarrow$ el ΔJKM es isósceles $\Rightarrow$ JM = R.

- Puesto que: JM = KM = LM = R

∴ M es circuncentro del ΔJKL.

**7.15**



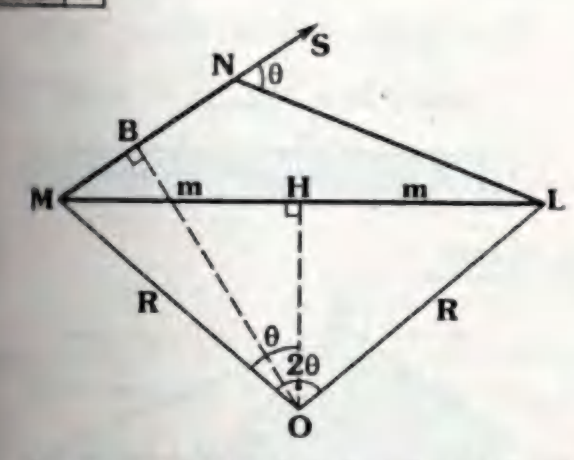
Si: m∡MOL = 2(m∡SNL) = 2θ y

MO = OL = R

⇒ **O: Circuncentro del ΔMNL**

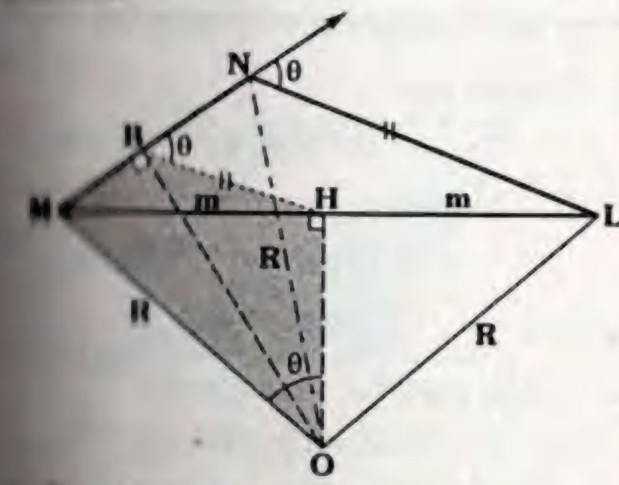
***Demostración:***

**Paso 1**




- Se traza la altura OH del Δ isósceles MOL.
- Por teorema: MH=HL=m y m∡MOH = θ
- Luego ubicamos el punto B en $\overline{MN}$, tal que m∡MBO = 90°.

**Paso 2**




- Debido a que:

m∡MBO = m∡MHO = 90°

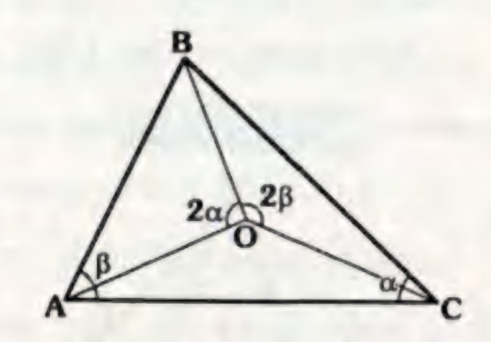
El ⌂MBHO es inscriptible.

⇒ m∡NBH = m∡MOH = θ

- Por el teorema de los puntos medios en el ΔMNL ⇒ MB = BN, con lo cual el ΔMNO es isósceles, es decir ON=R.

∴ O: Circuncentro del ΔMNL.

**7.16**

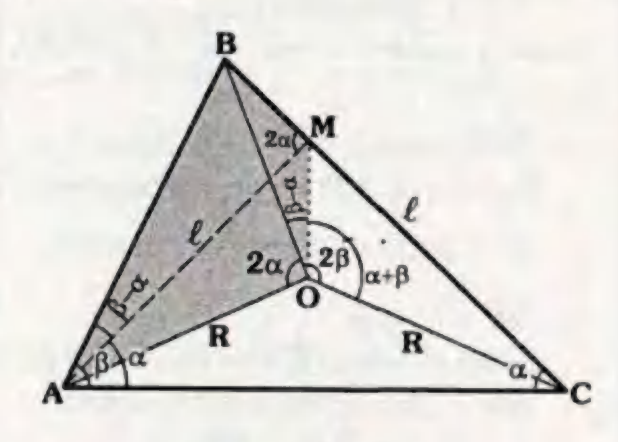



Si m∡BOA = 2(m∡ACB) = 2α y

m∡BOC = 2(m∡BAC) = 2β

⇒ **O: Circuncentro del ΔABC**

***Demostración:***




- Se ubica M en $\overline{BC}$ tal que

AM = MC = $\ell$,

con ello m∡MAC = α y por ángulo exterior m∡AMB = 2α.

- Dado que:

$$m\measuredangle BMA = m\measuredangle BOA = 2\alpha$$

El ⌂ABMO es inscriptible.

$$\Rightarrow \; m\measuredangle BOM = m\measuredangle BAM = \beta - \alpha$$

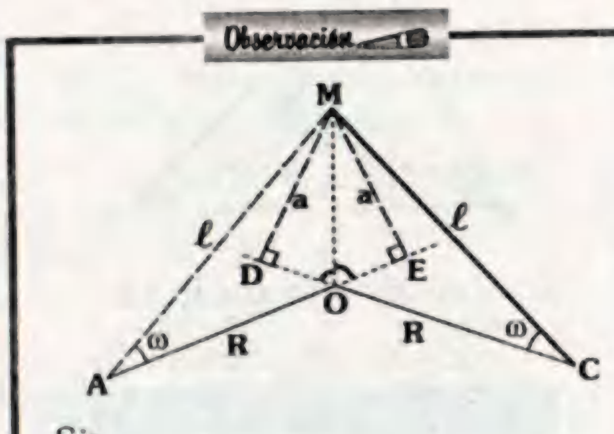
- En "O": $m\measuredangle AOM = m\measuredangle MOC = \alpha + \beta$
- De la observación posterior:

$$AO = OC = R$$

- Como $AO = OB = OC$

$\therefore$ O: Circuncentro del $\Delta ABC$.

**Observación**




*Si:*

$$m\measuredangle AOM = m\measuredangle MOC = \alpha + \beta \quad y$$
$$AM = MC = \ell,$$

*vamos a demostrar que* $AO = OC$, *para ello:*

- *Prolongamos* $\overline{AO}$ y $\overline{CO}$ *hasta* E y D, *tal que* $\overline{MD}$ y $\overline{ME}$ *perpendiculares a* $\overrightarrow{CO}$ y $\overrightarrow{AO}$ *respectivamente.*
- *Se nota que :* $m\measuredangle MOE = m\measuredangle MOD = 180° - (\alpha + \beta)$ *por el teorema de la bisectriz.*

$$\Rightarrow \; MD = ME = a$$

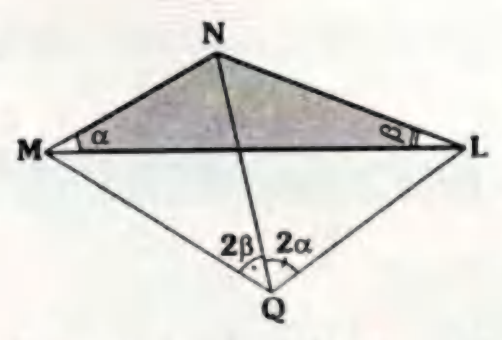
- $\Delta MDC \cong \Delta MAE$

$$\Rightarrow \; m\measuredangle MAE = m\measuredangle MCD = \omega$$

- $\Delta AMO \cong \Delta MOC$ (LAL)

$$\therefore \; AO = OC = R$$

**7.17**

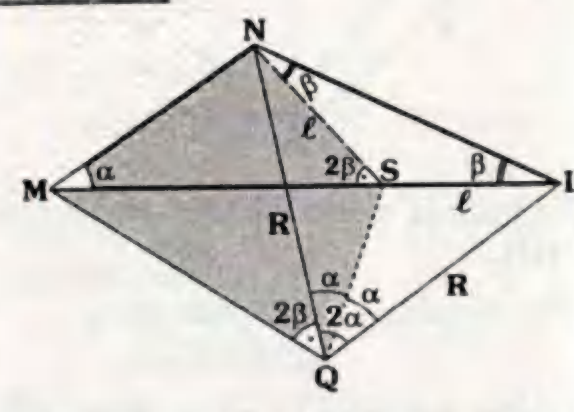



Si: $m\measuredangle NQL = 2(m\measuredangle NML) = 2\alpha$ y

$$m\measuredangle MON = 2(m\measuredangle NLM) = 2\beta$$

$\Rightarrow$ **Q: Circuncentro del $\Delta MNL$**

**Demostración:**




- Se ubica el punto S en $\overline{ML}$, tal que $NS = SL = \ell$

$$\Rightarrow \; m\measuredangle SNL = m\measuredangle SLN = \beta$$

y por ángulo exterior $m\measuredangle NSM = 2\beta$.

- Puesto que:

$$m\measuredangle NSM = m\measuredangle NQM = 2\beta$$

El ⌂MNSQ es inscriptible.

$$\Rightarrow \; m\measuredangle NQS = m\measuredangle NMS = \alpha$$

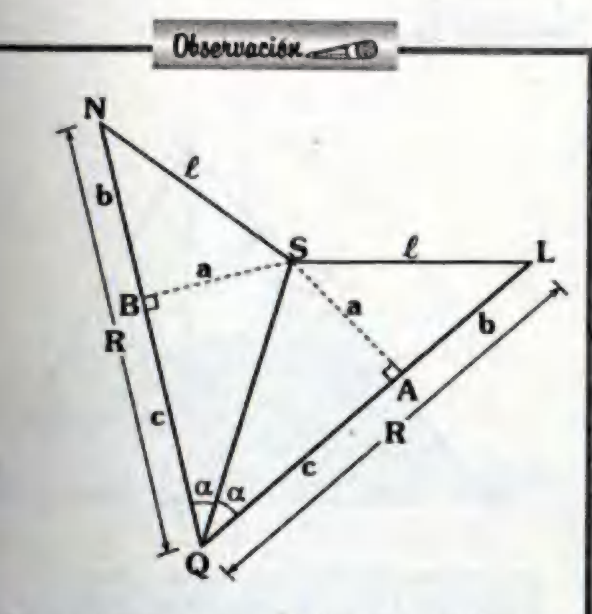
- En "Q": $m\measuredangle SQL = \alpha$
- De la observación siguiente :

$$NQ = QL = R$$

- Por el criterio 7.14 se concluye.

$\therefore$ Q: Circuncentro del $\Delta MNL$

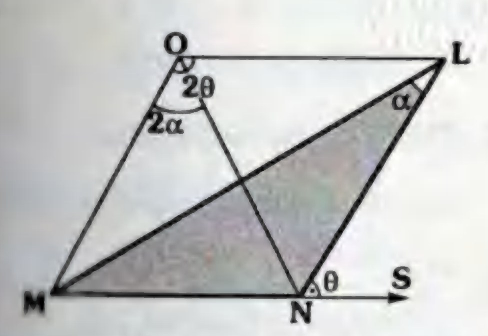
**Observación**




*Se sabe que* $m\measuredangle NQS = m\measuredangle SQL = \alpha$ *y* $NS = SL = \ell$, *con lo cual demostraremos que* $NQ=QL$, *para ello.*

- *Trazamos* $\overline{SB}$ *y* $\overline{SA}$ *perpendiculares a* $\overline{NQ}$ *y* $\overline{QL}$.
- *Por el teorema de la bisectriz* $\Rightarrow BS = SA = a$ y $BQ = QA = c$.
- $\Delta NBS \cong \Delta SAL$
  $\Rightarrow NB = AL = b$
- *Con lo cual se nota:* $NQ=QL=R$

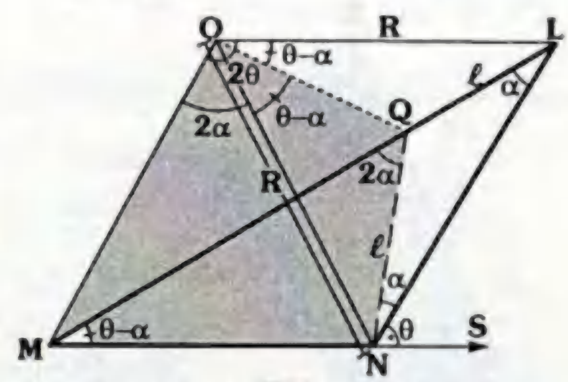
**7.18**




Si $m\measuredangle MON = 2(\measuredangle MLN) = 2\alpha$ y
$m\measuredangle MOL = 2(m\measuredangle LNS) = 2\theta$

$\Rightarrow$ **O: Circuncentro del $\Delta MNL$**

**Demostración:**




- Se ubica Q en $\overline{ML}$, tal que:

  $NQ = QL = \ell \Rightarrow m\measuredangle QNL = \alpha$

  y $m\measuredangle NQM = 2\alpha$
- Como $m\measuredangle MON = m\measuredangle MQN = 2\alpha$

  $\Rightarrow$ ⏢MOQN es inscriptible

  $\Rightarrow m\measuredangle QON = m\measuredangle QMN = \theta - \alpha$
- En "O": $m\measuredangle QOL = \theta - \alpha$
- Dado que:

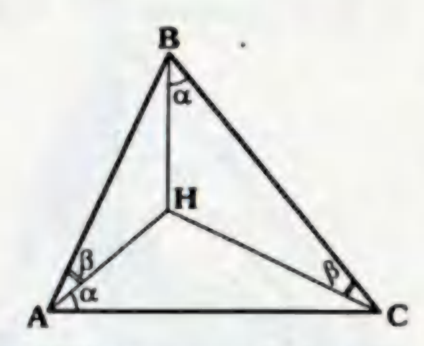
  $m\measuredangle NOQ = m\measuredangle QOL = \theta - \alpha$

  y $NQ = QL = \ell$

  de la observación del criterio 7.16 tenemos que $ON=OL=R$.
- Del criterio 7.11 se concluye:

  $\therefore$ O: circuncentro de $\Delta MNL$.

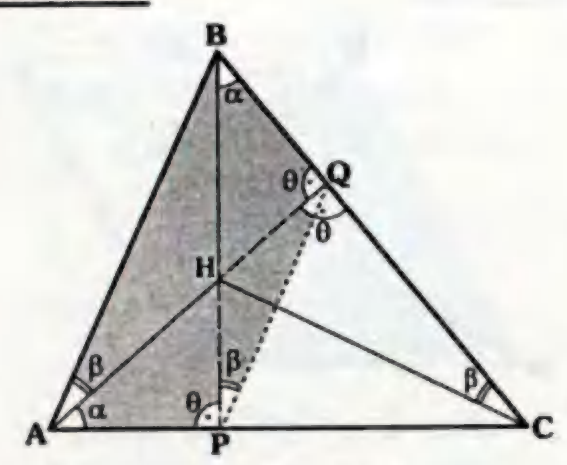
**7.19**




Si : $m\measuredangle BAH = m\measuredangle BCH = \beta$ y
$m\measuredangle HBC = m\measuredangle HAC = \alpha$

$\Rightarrow$ **H: Ortocentro del $\Delta ABC$**

**Demostración:**




- Prolongamos $\overline{AH}$ y $\overline{BH}$ hasta que corten a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en Q y P.
- Debido a que:

$$m\measuredangle QAP = m\measuredangle QBP = \alpha$$

El ⌂ABQP es inscriptible:

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BAQ = m\measuredangle BPQ = \beta \quad y$$
$$m\measuredangle APB = m\measuredangle AQB = \theta$$

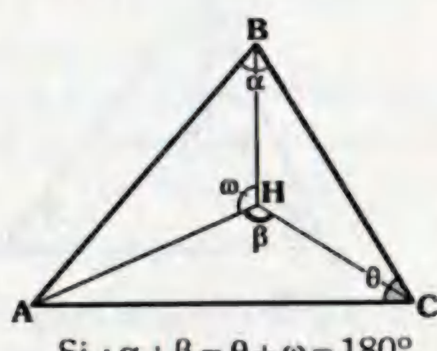
- Como $m\measuredangle HPQ = m\measuredangle HCQ = \beta \Rightarrow$ el ⌂PHQC es inscriptible

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle HPA = m\measuredangle HQC = \theta$$

- En "Q": $\theta + \theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ$, con lo cual $\overline{AQ}$ y $\overline{BP}$ son alturas del $\Delta ABC$, entonces se concluye.

$\therefore$ H: Ortocentro del $\Delta ABC$.

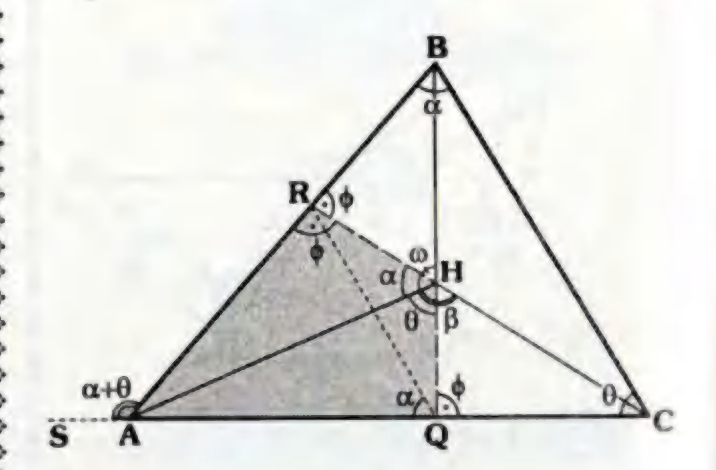
**7.20**




Si : $\alpha + \beta = \theta + \omega = 180^\circ$

$\Rightarrow$ **H: Ortocentro del $\Delta ABC$**

**Demostración**




- Prolongamos $\overline{BH}$ y $\overline{CH}$ hasta que corten a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ en Q y R.
- En "H", de las condiciones :

$$m\measuredangle RHA = \alpha \;\; y \;\; m\measuredangle AHQ = \theta .$$

- Puesto que:

$$m\measuredangle RAS = m\measuredangle RHQ = \alpha + \theta$$

El ⌂ARHQ es inscriptible:

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle ARH = m\measuredangle HQC = \phi \quad y$$
$$m\measuredangle RQA = m\measuredangle RHA = \alpha$$

- Luego ya que:

$$m\measuredangle RQA = m\measuredangle RBC = \alpha ,$$

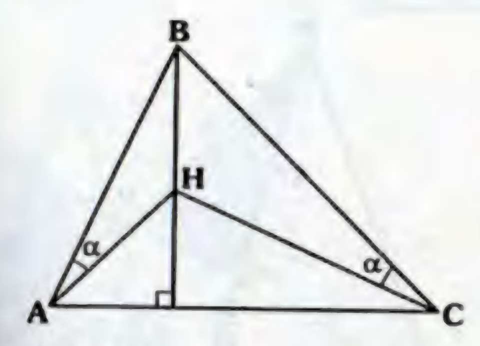
El ⌂RBCQ es inscriptible:

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BRC = m\measuredangle BQC = \phi$$

- En "R": $\phi + \phi = 180^\circ \Rightarrow \phi = 90^\circ$, con lo cual $\overline{BQ}$ y $\overline{CR}$ son alturas del $\Delta ABC$.

$\therefore$ H: Ortocentro del $\Delta ABC$.

**7.21**



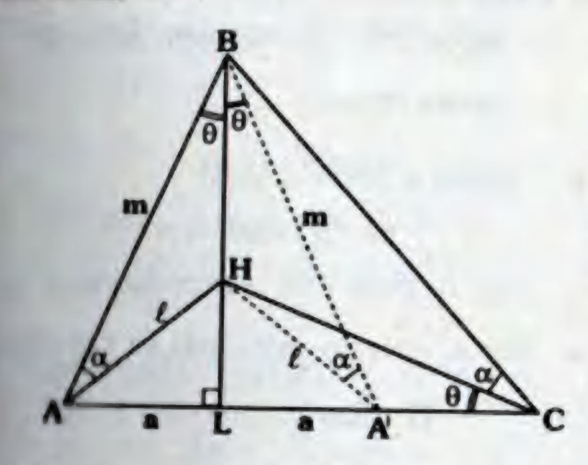

Si $\Delta ABC$:

Escaleno, $\overline{BL}$ es altura del $\Delta ABC$

y $m\measuredangle BAH = m\measuredangle BCH = \alpha$.

$\Rightarrow$ **H: Ortocentro del $\Delta ABC$**

**Demostración**




- Se ubica A' en $\overline{LC}$, tal que:

  $AL = A'L = a$

- Con lo cual : $AH = HA' = \ell$

  y $AB = A'B = m$.

- $\Delta ABH \cong \Delta A'BH$ (LLL)

  $\Rightarrow m\measuredangle BA'H = m\measuredangle BAH = \alpha$ y

  $m\measuredangle ABH = m\measuredangle A'BH = \theta$

- Ya que: $m\measuredangle HA'B = m\measuredangle HCB = \alpha$

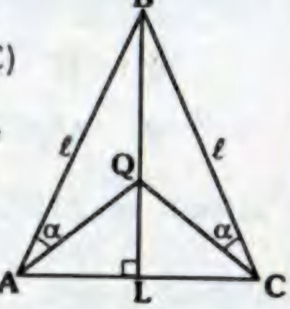
  El ⌂BCA'H es inscriptible

  $\Rightarrow m\measuredangle HBA' = m\measuredangle HCA' = \theta$

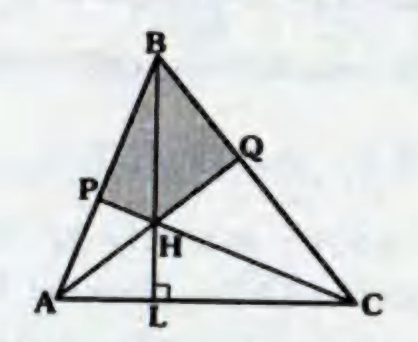
- Luego por el criterio 7.19.

  $\therefore$ H: Ortocentro del $\Delta ABC$.

***Cuidado:***

> *Si $\Delta ABC$:*
> *Isósceles* ($AB=BC$)
>
> *Para todo punto de la altura BL del $\Delta ABC$, se cumple que:*
>
> 
> 
>
> $m\measuredangle BAQ = m\measuredangle BCQ = \alpha$, *por lo tanto* ***Q no*** *es* ***ortocentro***.

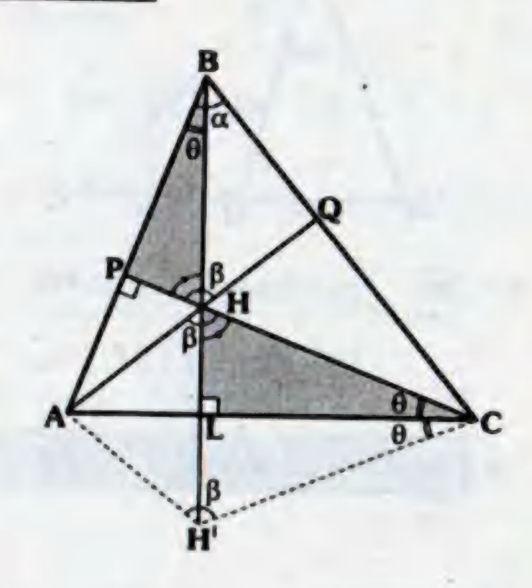
**7.22**




Si $\overline{BL}$ es altura del $\Delta ABC$ y el ⌂PBQH es inscriptible.

$\Rightarrow$ **H: Ortocentro del $\Delta ABC$**

**Demostración:**



- Como el $\triangle$PBQH es inscriptible:

$$\Rightarrow \alpha+\beta=180^\circ$$

- Prolongamos $\overline{BL}$ hasta H' tal que:

$$HL=LH' \Rightarrow m\measuredangle LCH'=\theta$$

$$y \quad \Delta AHC \cong \Delta AH'C$$

Luego: $m\measuredangle AH'C=\beta$

- Debido a que:

$$m\measuredangle ABC+m\measuredangle AH'C=180^\circ$$

El $\triangle$ABCH' es inscriptible:

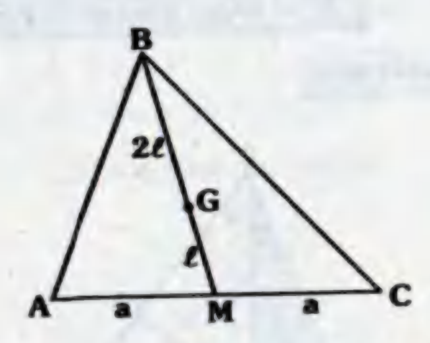
$$\Rightarrow m\measuredangle ABH'=m\measuredangle ACH'=\theta$$

- $\triangle$HLC: $m\measuredangle LHC=90^\circ-\theta$

- En $\Delta BPH$ : $m\measuredangle APH=90^\circ$ con ello tendremos $\overline{CP}$ es altura del $\Delta ABC$.

$\therefore$ H es el ortocentro del $\Delta ABC$.

**7.23**

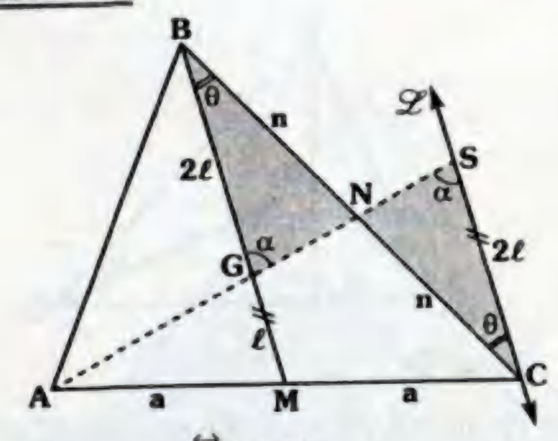



Si $\overline{BM}$: mediana del $\Delta ABC$ y

$$BG=2(GL)=2\ell$$

$\Rightarrow$ **G: Baricentro del $\Delta ABC$**

***Demostración***




- Trazamos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{MG}$.

- Luego la prolongación de $\overline{AG}$ corta a $\overline{BC}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ en N y S.

- Dado que: $AM=MC=a$ y $\overline{MG}//\overline{SC} \Rightarrow SC=2(GM)=2\ell$ (*base media*).

- $\Delta BGN \cong \Delta NSC$ (ALA)

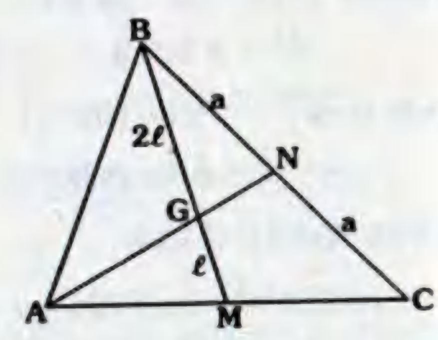
$$\Rightarrow BN=NC=n,$$

con lo cual $\overline{AN}$ es mediana.

- Por el criterio principal se concluye.

$\therefore$ G: Baricentro del $\Delta ABC$.

**7.24**

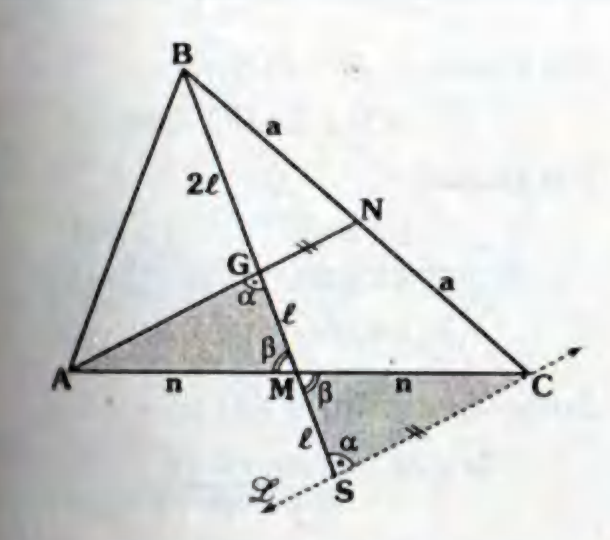



Si : $BG=2(GM)=2\ell$ y

$$BN=NC=a$$

$\Rightarrow$ **G: Baricentro del $\Delta ABC$**

***Demostración:***




- Por C trazamos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{AN}$.
- Luego prolongamos $\overline{BM}$ hasta que corte a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ en S.
- Puesto que:

  $BN = NC = a$ y $\overline{SC} // \overline{GN}$

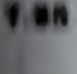
  $\Rightarrow BG = GS = 2\ell$.

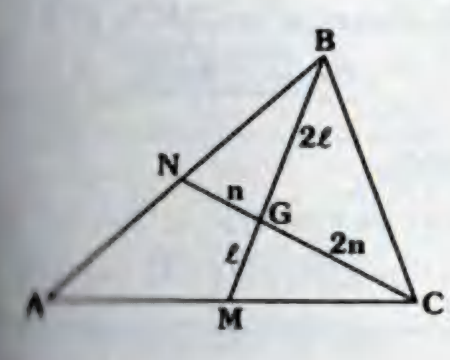
- $\Delta AGM \cong \Delta MSC$ (ALA)

  $\Rightarrow AM = MC = n$

  por lo cual $\overline{BM}$ es mediana.

  $\therefore$ G: Baricentro del $\Delta ABC$



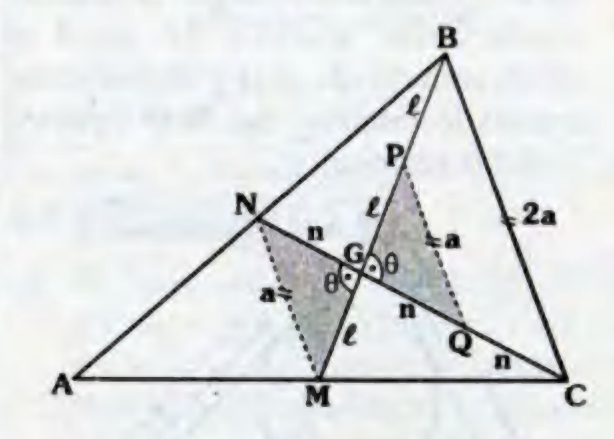



Si: $BG = 2(GM) = 2\ell$ y

$CG = 2(GN) = 2n$

$\Rightarrow$ **G: Baricentro del $\Delta ABC$**

***Demostración:***




- Se traza la base media $\overline{PQ}$ del $\Delta BGC$:

  $\Rightarrow BC = 2(PQ) = 2a$

  y $\overline{BC} // \overline{PQ}$

- $\Delta MGN \cong \Delta GPQ$ (LAL)

  $\Rightarrow MN = a$ y $\overline{MN} // \overline{PQ}$

- Como:

  $\overline{MN} // \overline{BC}$ y $MN = \dfrac{BC}{2} = a$

  entonces $\overline{MN}$ es base media del $\Delta ABC$:

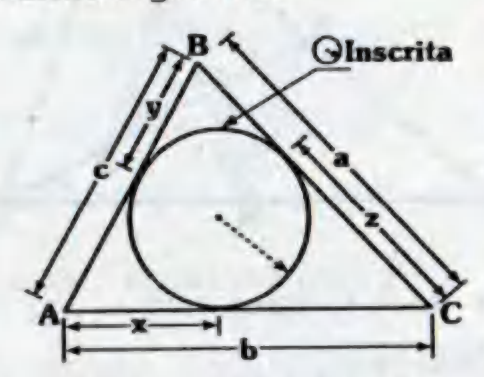
  $\Rightarrow AN = NB$ y $AM = MC$

  $\therefore$ G: Baricentro del $\Delta ABC$.

# 8. TEOREMAS

## 8.1. ASOCIADOS AL INCENTRO

**A** En todo triángulo la longitud del segmento contenido en un lado cuyos extremos son un vértice y un punto de tangencia determinado por la circunferencia inscrita es igual al semiperimetro de la región triangular menos la longitud del lado opuesto a dicho segmento.




Se cumple:



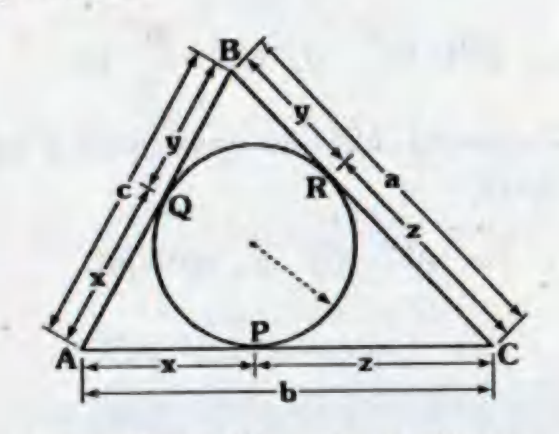
$x = p - a$

$y = p - b$

$z = p - c$

Donde : $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

**Demostración:**




- Sean P,Q y R los puntos de tangencia.
- Por teorema: $AP = AQ = x$ ;

  $CP = CR = z$ ; $BQ = BR = y$
- Del gráfico :

$$y + z = a \quad \text{... (I)}$$

$$x + z = b \quad \text{... (II)}$$

$$x + y = c \quad \text{... (III)}$$

- Sumando (I), (II) y (III) :

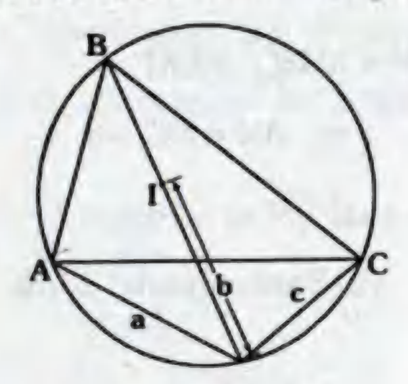
$$2x + 2y + 2z = \underbrace{a + b + c}_{2p}$$

$$\Rightarrow \quad x + y + z = p$$

- De (I), (II) y (III) :

$$x = p - a \; ; \; y = p - b \text{ y } z = p - c$$

**B** En todo triángulo el punto de intersección entre la bisectriz de un ángulo interior y la circunferencia circunscrita equidista de los otros vértices y del incentro de dicho triángulo.




Si I: Incentro del $\Delta ABC$

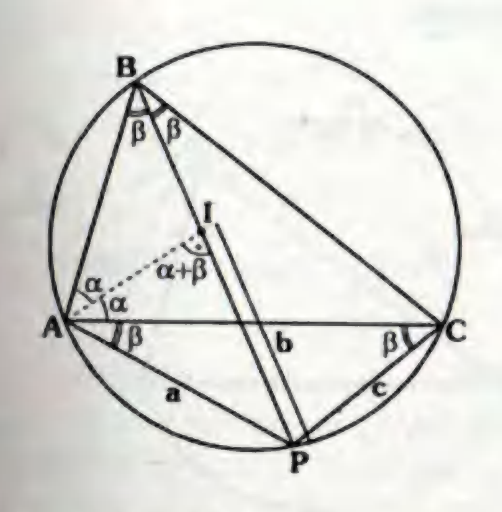
$\Rightarrow$ $\boxed{a = b = c}$

**Demostración:**

- Como I es incentro.

  $\Rightarrow \; m\measuredangle BAI = m\measuredangle CAI = \alpha$ y

  $m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBC = \beta$




- Por ángulo inscrito:

$$m\measuredangle CAP = m\measuredangle ACP = \beta$$

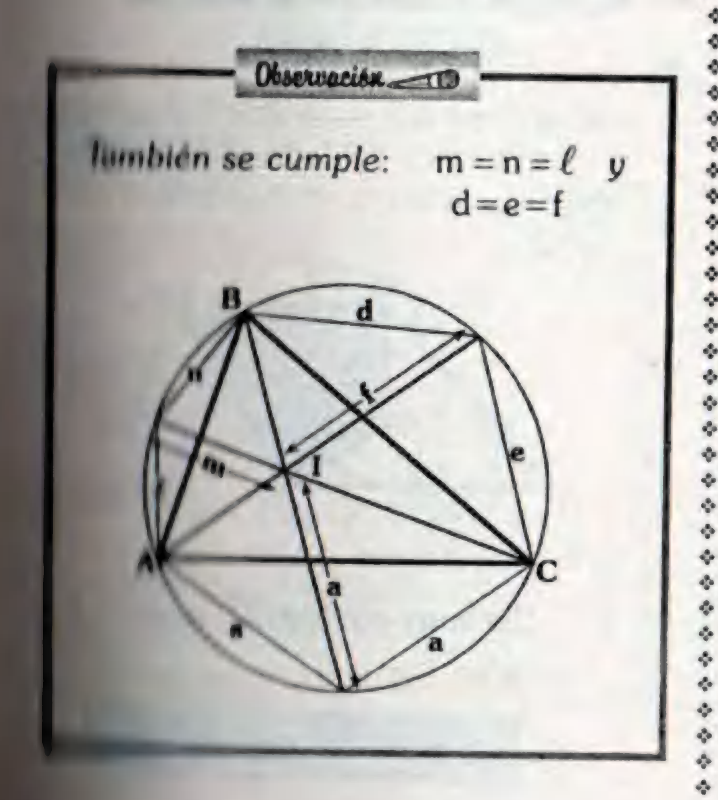
$$\Rightarrow \ \Delta APC \text{ isósceles } \Rightarrow a = c$$

- $\Delta ABI$: Por ángulo exterior $m\measuredangle AIP = \alpha + \beta$, entonces el $\Delta AIP$ es isósceles $\Rightarrow$ $a = b$

$$\therefore \ a = b = c$$

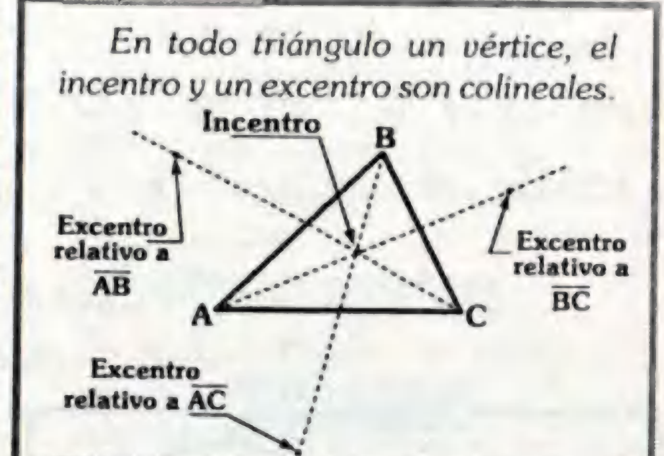
**Observación**

*También se cumple:* $m = n = \ell$ *y* $d = e = f$




***Importante:***

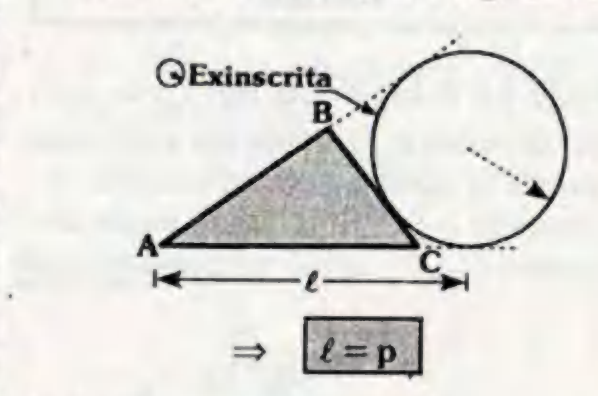
*En todo triángulo un vértice, el incentro y un excentro son colineales.*




### 8.2 ASOCIADOS AL EXCENTRO

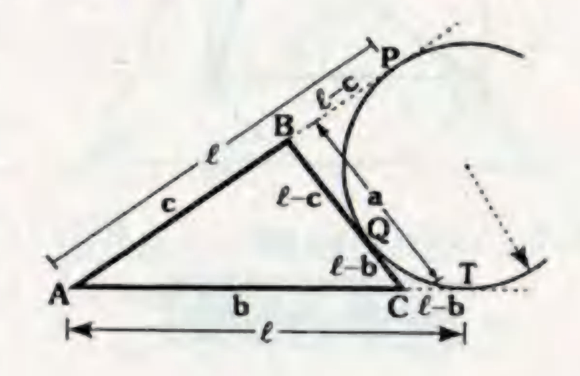
Ⓐ En todo triángulo la distancia de un vértice al punto de contacto entre la circunferencia exinscrita, relativa al lado opuesto al vértice mencionado, y la prolongación de un lado es igual al semiperímetro de la región triangular en mención.

p: semiperímetro de la región ABC.




$$\Rightarrow \ \boxed{\ell = p}$$

**Demostración**



- Sean los puntos de tangencia P, Q y T.
- Por teorema: $AP = AT = \ell$

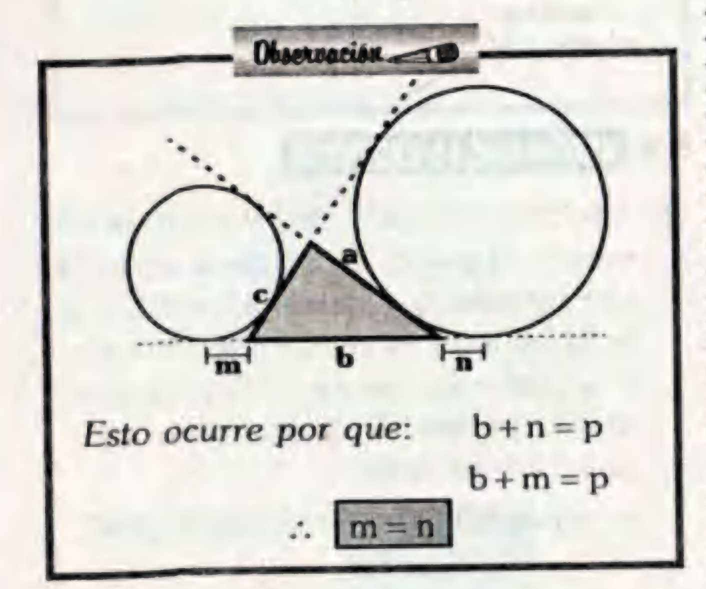
$CQ = CT = \ell - b$ ; $BQ = BP = \ell - c$

- $BQ + QC = BC \Rightarrow \ell - c + \ell - b = a$

$$2\ell = \underbrace{a + b + c}_{2p}$$

$$\therefore\ \ell = p$$

**Observación**

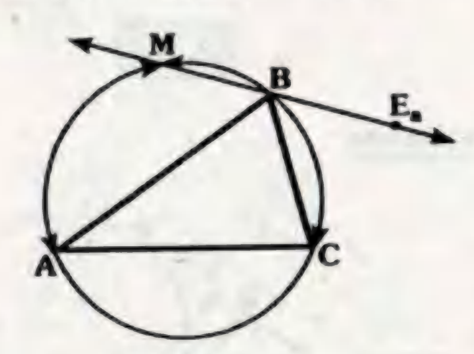



*Esto ocurre por que:* $b + n = p$

$b + m = p$

$\therefore$ $\boxed{m = n}$

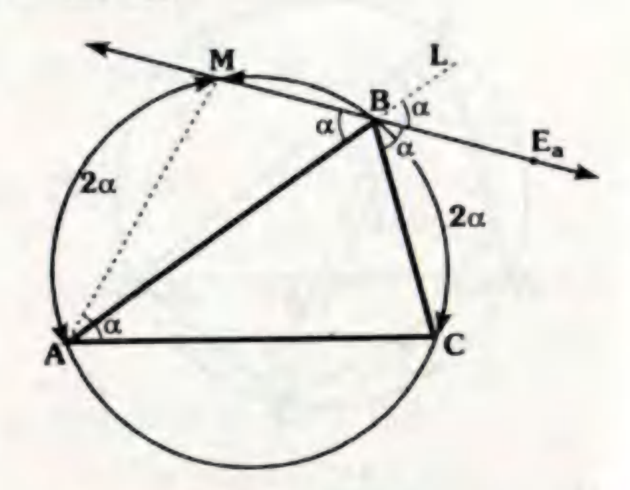
**B** Dado un triángulo, la recta que pasa por un vértice y uno de sus excentros biseca al arco de circunferencia circunscrita a dicho triángulo cuyos extremos son los otros vértices.




Si $E_a$ es excentro relativo a $\overline{BC}$.

$\Rightarrow$ $\boxed{m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MBC}}$

**Demostración:**




- $\overrightarrow{BE_a}$ : Bisectriz del $\measuredangle LBC$

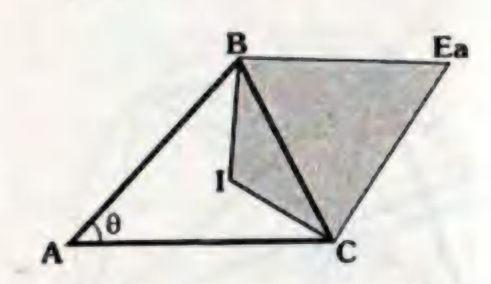
$m\measuredangle LBEa = m\measuredangle CBEa = \alpha$

- $\triangle$AMBC: Inscrito $\Rightarrow$ $m\measuredangle MAC = \alpha$
- Por ángulo inscrito:

$\therefore\ m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MBC} = 2\alpha$

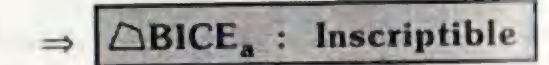
## 8.3 ASOCIADOS AL INCENTRO Y EXCENTRO

**A** En todo triángulo, el cuadrilátero cuyos vértices son el incentro, excentro y los extremos del lado al cual es relativo el excentro, es inscriptible.




Si I: Incentro del $\Delta ABC$

$E_a$ : Excentro del $\Delta ABC$ relativo a $\overline{BC}$.

$\Rightarrow$ 
$\boxed{\square BICE_a\ :\ \textbf{Inscriptible}}$

***Demostración***

- Por teoremas básicos:

$$m\measuredangle BIC = 90° + \frac{\theta}{2};\ m\measuredangle BE_aC = 90° - \frac{\theta}{2}$$

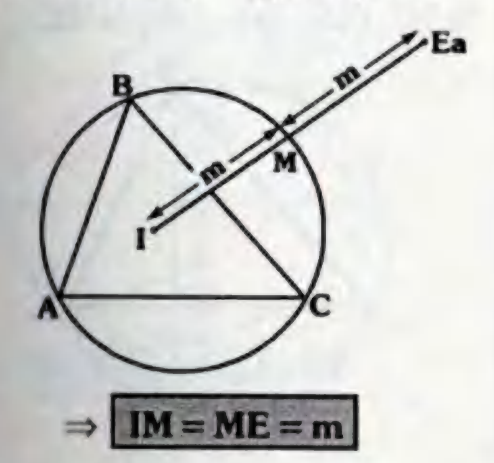
- Puesto que:

$$m\measuredangle BIC + m\measuredangle BE_aC = 180°$$

$\therefore$ ⏢ $BICE_a$ : Inscriptible.

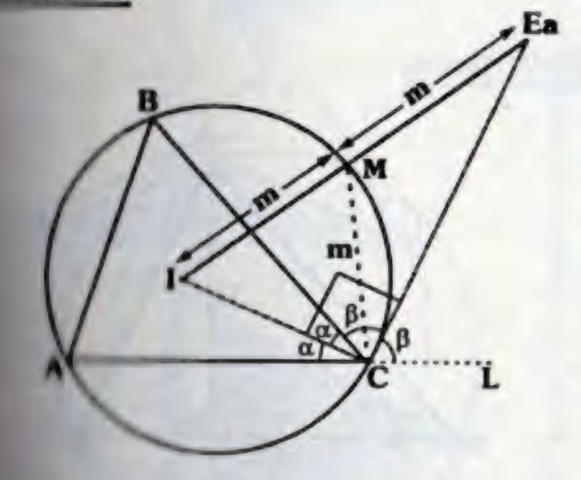
**(B)** La circunferencia circunscrita a un triángulo biseca al segmento cuyos extremos son el incentro y excentro de dicho triángulo.

Si I: incentro y $E_a$ : excentro




$\Rightarrow$ $\boxed{IM = ME = m}$

***Demostración:***




- Por el teorema 8.1-B: $IM = MC = m$
- Como $\overline{CI}$ y $\overline{CE_a}$ son bisectrices:

$$m\measuredangle BCE_a = m\measuredangle E_aCL = \beta$$

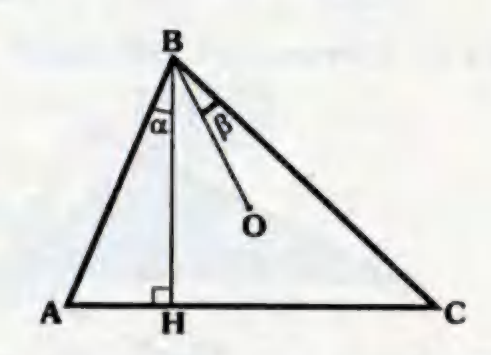
$$m\measuredangle ACI = m\measuredangle BCI = \alpha$$

- En "C": $m\measuredangle ICE_a = 90°$ .
- $\Delta ICE_a$ : por teorema en el ◺

$\therefore$ $IM = ME = m$

## 8.4 ASOCIADOS AL CIRCUNCENTRO

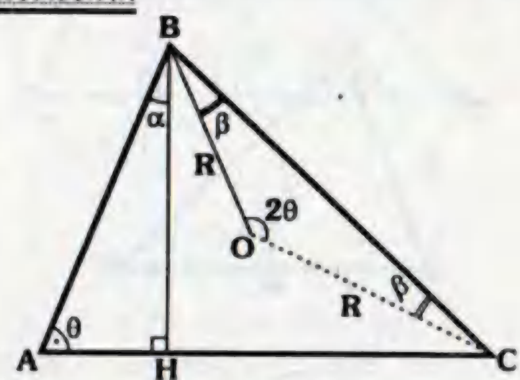
**(A)** En todo triángulo, la altura y el circunradio trazadas del mismo vértice determinan ángulos de igual medida con los lados adyacentes de dicho triángulo.




Si $\overline{BH}$ es altura del $\Delta ABC$ del circuncentro O.

$\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = \beta}$

***Demostración:***



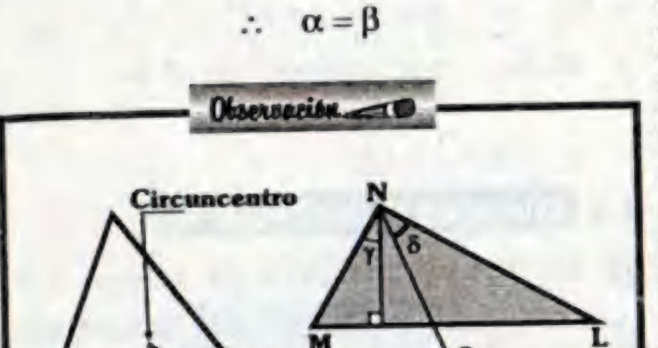

- Se sabe: $OB = OC = R$
- Por teorema:

$$m\measuredangle BOC = 2(m\measuredangle BAH) = 2\theta$$

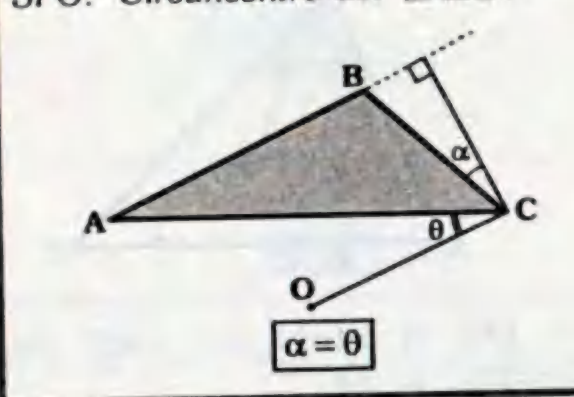
- $\Delta ABH$: $\alpha+\theta=90^\circ$
- $\Delta BOC$: $\beta+\beta+2\theta=180^\circ \Rightarrow \beta+\theta=90^\circ$

$$\therefore \quad \alpha=\beta$$

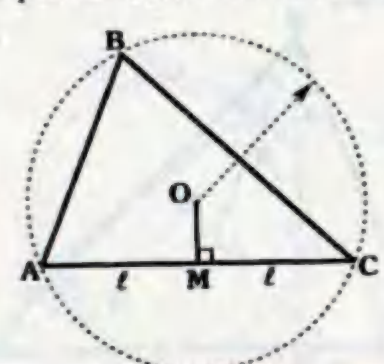
**Observación**




*Si O: Circuncentro del* $\Delta ABC$.




Ⓑ La proyección ortogonal del circuncentro de un triángulo hacia un lado es el punto medio de dicho lado.




Si O: Circuncentro del $\Delta ABC$ y $\overline{OM} \perp \overline{AC}$.

$$\Rightarrow \boxed{AM = MX = \ell}$$

**Demostración**

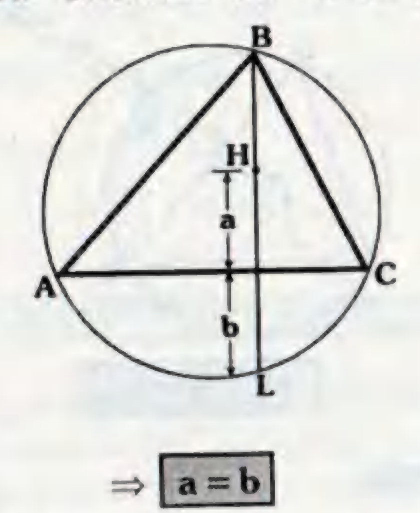
- Como $\overline{AC}$ es cuerda y $\overline{OM} \perp \overline{AC}$, por teorema de circunferencia.

$$\therefore \quad AM = MC = \ell$$

## 8.5 ASOCIADOS AL ORTOCENTRO

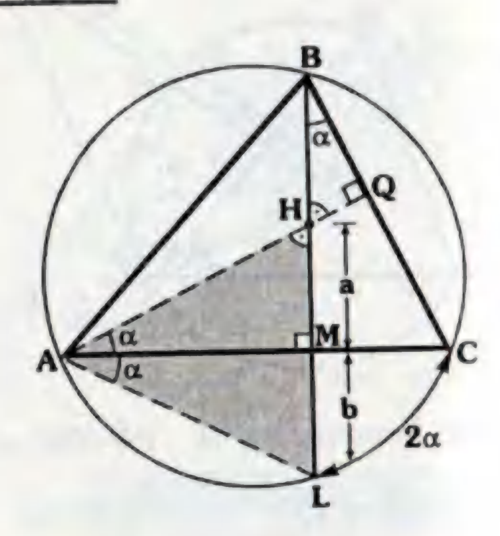
Ⓐ El segmento cuyos extremos son el ortocentro y el punto de corte entre la altura o su prolongación con la circunferencia circunscrita, es bisecado por el lado al cual es relativa dicha altura.

Si H: Ortocentro del $\Delta ABC$.



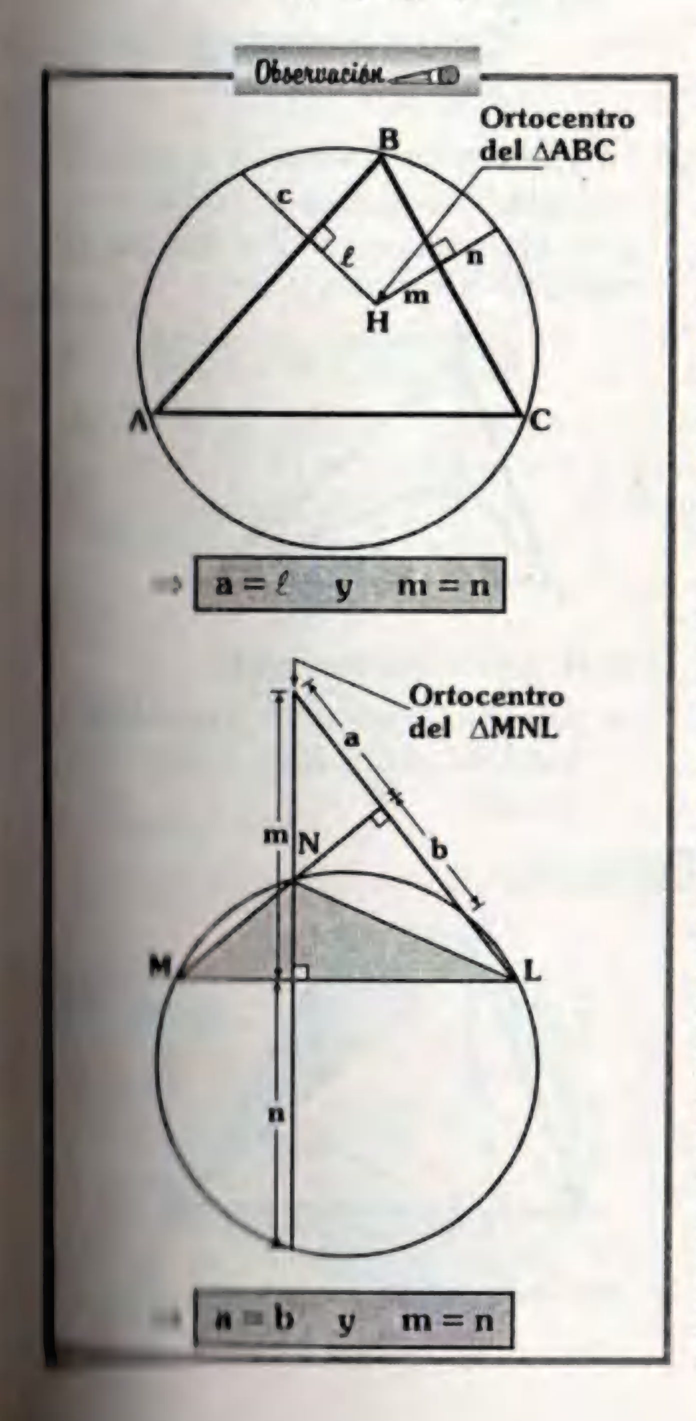

$$\Rightarrow \boxed{a=b}$$

**Demostración:**



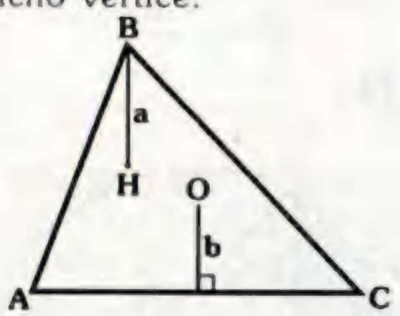
- Como H es ortocentro $\Rightarrow \overline{AQ}$ y $\overline{BM}$ son alturas.
- Se observa: $m\measuredangle HBQ = m\measuredangle HAM = \alpha$
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle LAC = \alpha$
- Puesto que $\overline{AM}$ es altura y bisectriz del $\Delta AHL$, podemos afirmar que $\overline{AM}$ es mediana.

$$\therefore\ a = b$$




8.6. **ASOCIADOS AL CIRCUNCENTRO Y ORTOCENTRO**

Ⓐ La distancia del ortocentro a un vértice es el doble de la distancia del circuncentro hacia el lado opuesto a dicho vértice.



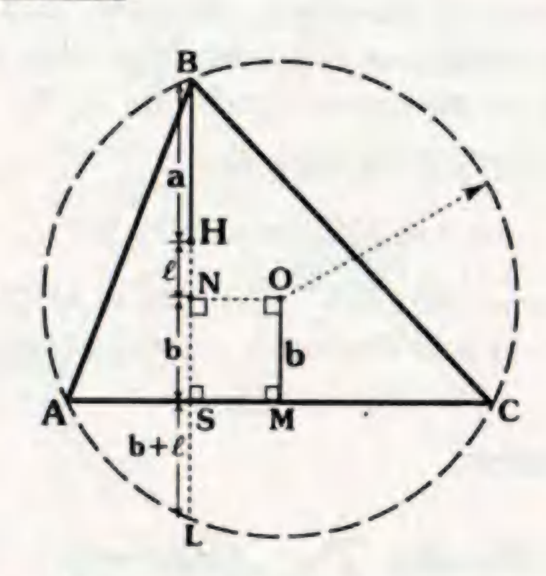

Si H: Ortocentro y

O: Circuncentro

$$\Rightarrow \boxed{a = 2b}$$

***Demostración:***

**Método 1**




- Se traza la circunferencia circunscrita y se prolonga $\overline{BH}$ hasta que la corte el L, luego trazamos $\overline{ON}$ perpendicular a $\overline{BL}$.
- MONS: Rectángulo $\Rightarrow$ NS = b

- Por el teorema 8.5.

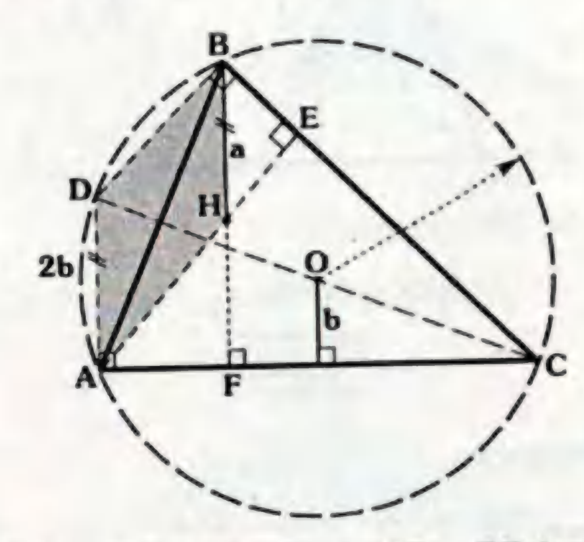
$\Rightarrow$ $HS = SL = b + \ell$

- Por el teorema 8.4. (B)

$\Rightarrow$ $a + \ell = b + b + \ell$

$\therefore$ $a = 2b$

**Método 2**



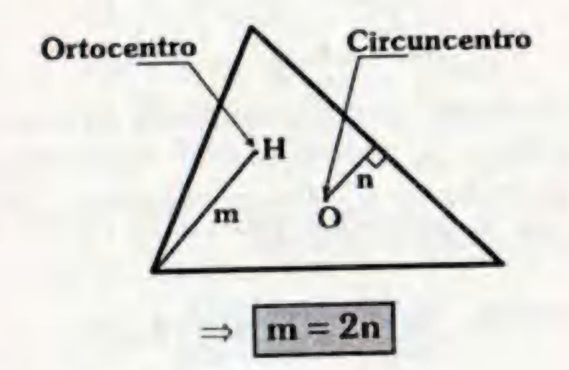

- Trazamos las alturas AE y BF, luego prolongamos $\overline{CO}$ hasta que corte a la circunferencia circunscrita en D.
- Como $\overline{CD}$ es diámetro:

$\Rightarrow$ $m\sphericalangle DAC = m\sphericalangle DBC = 90^\circ$

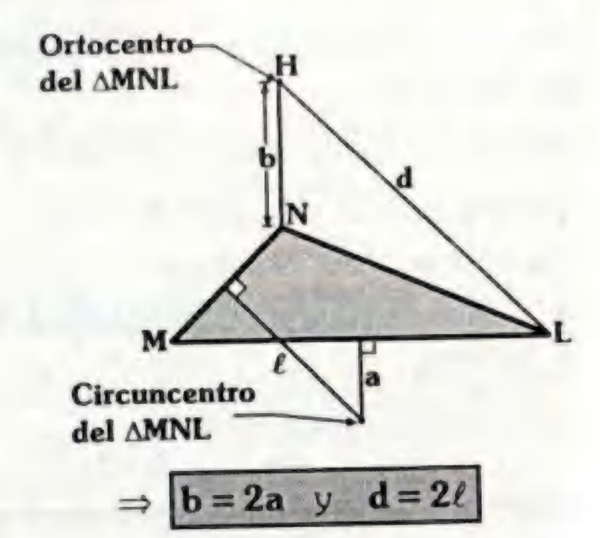
- Como $\overline{AD} // \overline{BH}$ y $\overline{BD} // \overline{AH}$ $\Rightarrow$ ADBH es un paralelogramo.

$\therefore$ $a = 2b$

**También:**

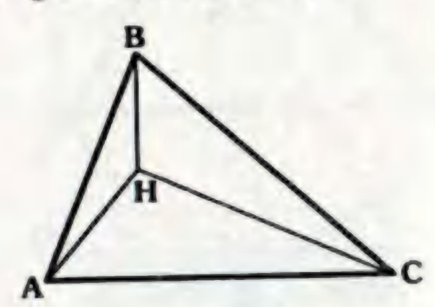



$\Rightarrow$ $\boxed{m = 2n}$




$\Rightarrow$ $\boxed{b = 2a \text{ y } d = 2\ell}$

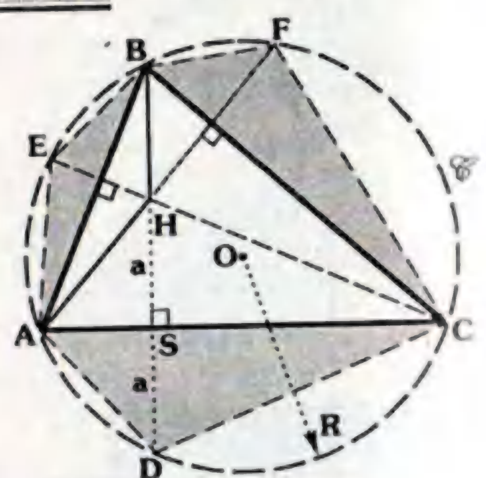
(B) Los triángulos formados al unir el ortocentro con los vértices del triángulo tienen circunradios iguales al triángulo mencionado.




Si H: ortocentro del $\Delta ABC$.

$\Rightarrow$ Los circunradios de los triángulos ABC, ABH, BHC y AHC son iguales.

***Demostración:***

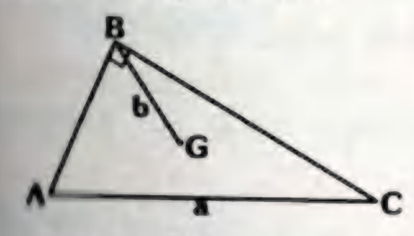


- Trazamos la circunferencia circunscrita y ubicamos el circuncentro O.
- Luego prolongamos $\overline{BH}$ hasta D ($D \in \mathscr{C}$), entonces $HS = SD = a$.
- Se observa que los triángulos ABC y ADC tienen el mismo circunradio R.
- $\Delta AHC \cong \Delta ADC$ (LLL) $\Rightarrow$ por circunradios homólogos; R es el circunradio del $\Delta AHC$.
- Análogamente para $\Delta AEB$ y $\Delta BFC$.

$$R : \begin{cases} \text{Circunradio del } \Delta ABC. \\ \text{Circunradio del } \Delta AHC. \\ \text{Circunradio del } \Delta AEB. \\ \text{Circunradio del } \Delta BFC. \end{cases}$$

## 8.V. ASOCIADOS AL BARICENTRO

**(A)** En todo triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es el triple de la distancia del baricentro hacia el vértice del ángulo recto.

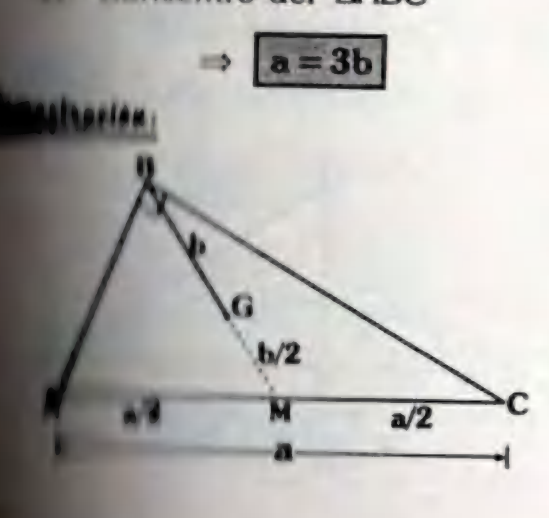



Si: $m\measuredangle ABC = 90°$ y

G: Baricentro del $\Delta ABC$

$\Rightarrow$ **$a = 3b$**

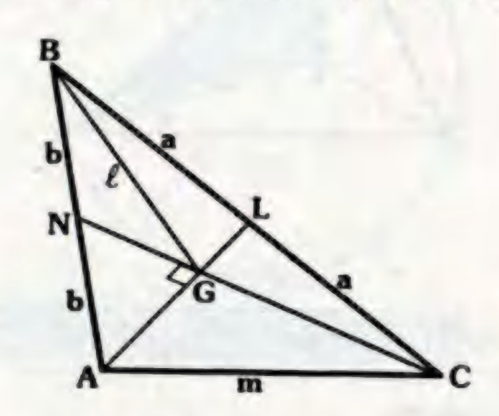
**Demostración:**




- Por definición: $AM = MC = a/2$
- Por el teorema $\Rightarrow BM = a/2$
- Por teorema básico: $GM = b/2$
- $BM = BG + GM \Rightarrow \dfrac{a}{2} = b + \dfrac{b}{2}$

$$\therefore\ a = 3b$$

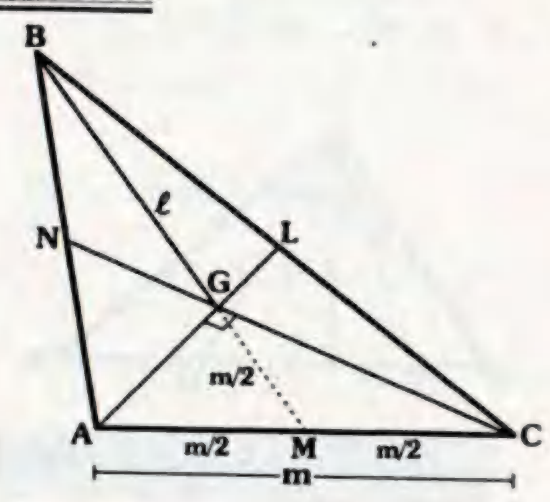
**(B)** Si dos medianas son perpendiculares, la distancia del baricentro al vértice desde el cual no se ha trazado la mediana, es igual a la longitud del lado opuesto al vértice mencionado.




Si: $\overline{AL}$ y $\overline{CN}$ son medianas perpendiculares.

$\Rightarrow$ 


**Demostración:**

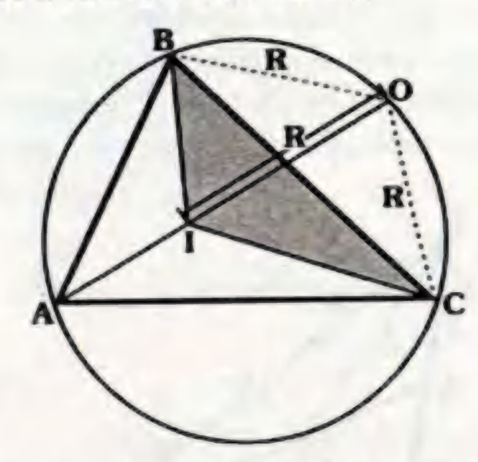


- Sabemos: AM = MC = m/2
- Por el teorema ◺: GM = m/2
- Por teorema básico: $\ell = 2(m/2)$

$\therefore \quad \ell = m$

## 8.8 TEOREMAS ADICIONALES

Ⓐ Si I: incentro del ΔABC




⇒ **O: Circuncentro del Δ BIC**

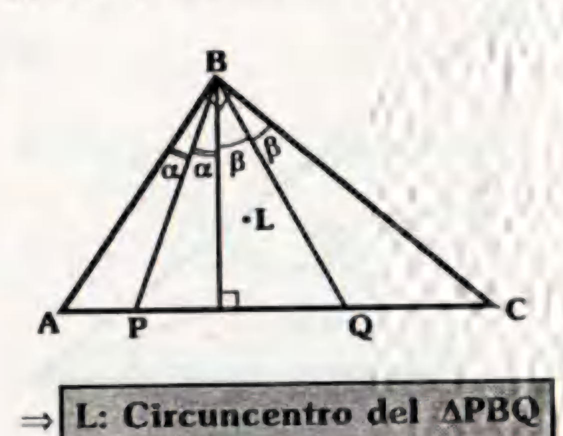
***Demostración:***

- Por el teorema 8.1.

BO = IO = CO = R

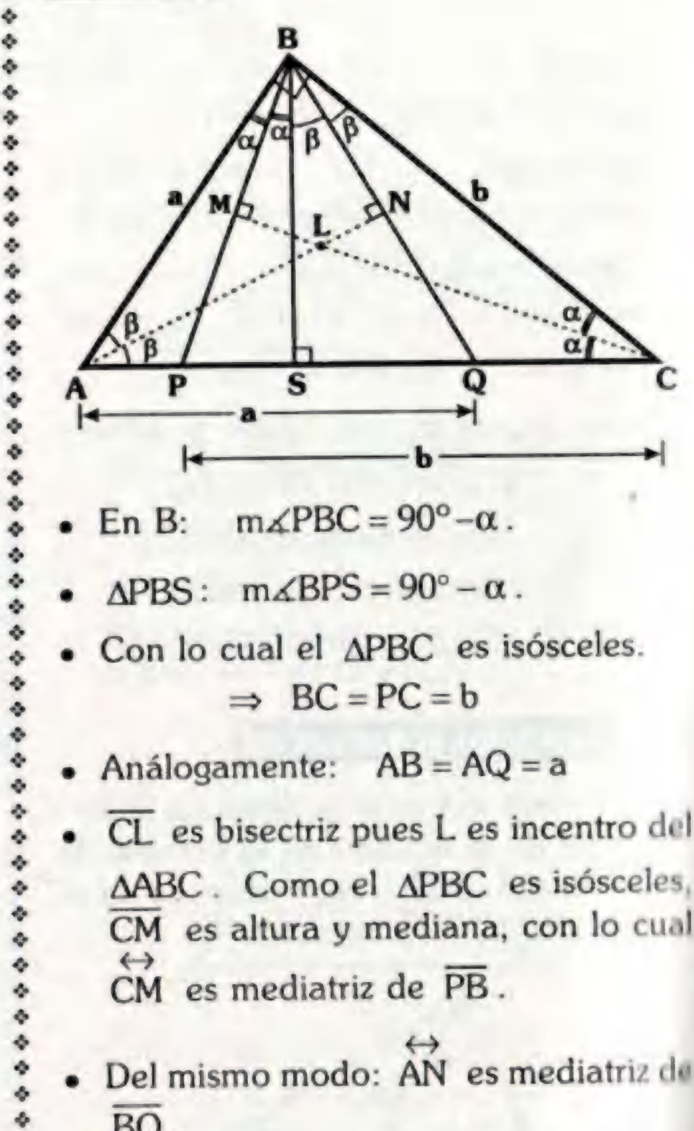
∴ O: Circuncentro del Δ BIC.

Ⓑ Si L: Incentro del ◺ABC.




⇒ **L: Circuncentro del ΔPBQ**

***Demostración:***




- En B: m∡PBC = 90° − α.
- ΔPBS: m∡BPS = 90° − α.
- Con lo cual el ΔPBC es isósceles.

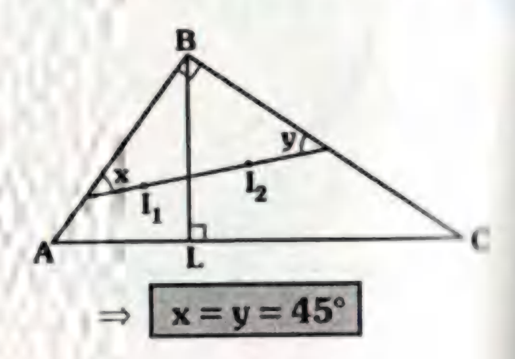
⇒ BC = PC = b

- Análogamente: AB = AQ = a
- $\overline{CL}$ es bisectriz pues L es incentro del ΔABC. Como el ΔPBC es isósceles, $\overline{CM}$ es altura y mediana, con lo cual $\overleftrightarrow{CM}$ es mediatriz de $\overline{PB}$.
- Del mismo modo: $\overleftrightarrow{AN}$ es mediatriz de $\overline{BQ}$.

∴ L es circuncentro del ΔPBQ.

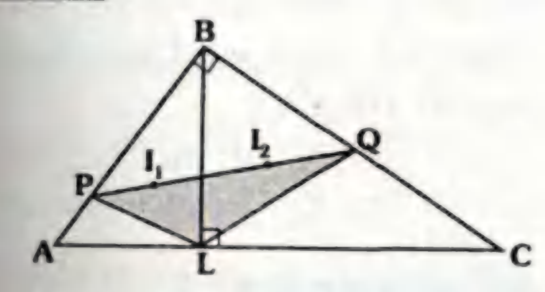
Ⓒ Si $I_1$: Incentro del ΔABL e

$I_2$: Incentro del ΔBLC.




⇒ **x = y = 45°**

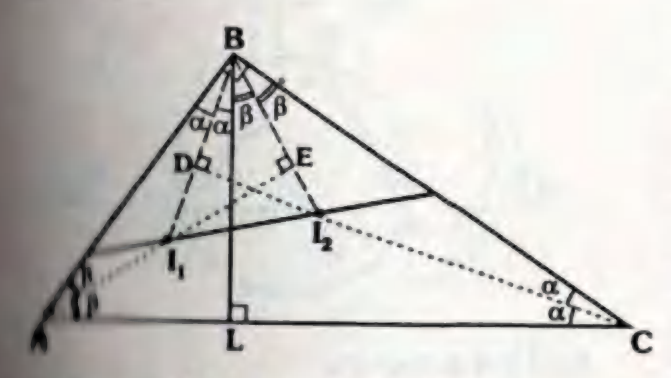
**Además:**




$\Rightarrow$ **B: Circuncentro del $\Delta PLQ$**

**Demostración:**

**Paso 1**




- Como $I_1$ e $I_2$ son incentros:

  $m\measuredangle ABI_1 = m\measuredangle I_1BL = \alpha$

  $m\measuredangle BAI_1 = m\measuredangle I_1AL = \beta$

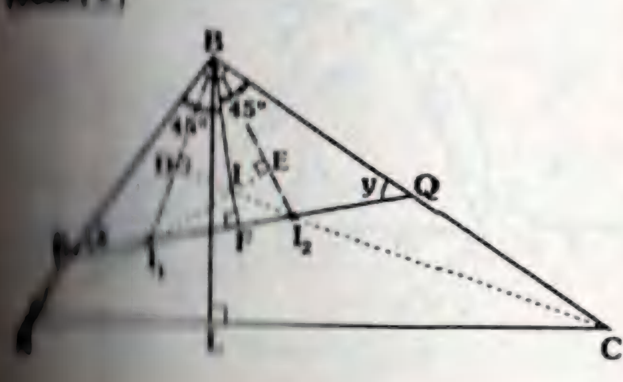
  $m\measuredangle BCI_2 = m\measuredangle I_2CL = \alpha$

  $m\measuredangle LBI_2 = m\measuredangle I_2BC = \beta$

- De la demostración anterior:

  $m\measuredangle BDC = m\measuredangle BEA = 90°$

**Paso 2**




- Se observa que:

  I: Incentro del $\Delta ABC$

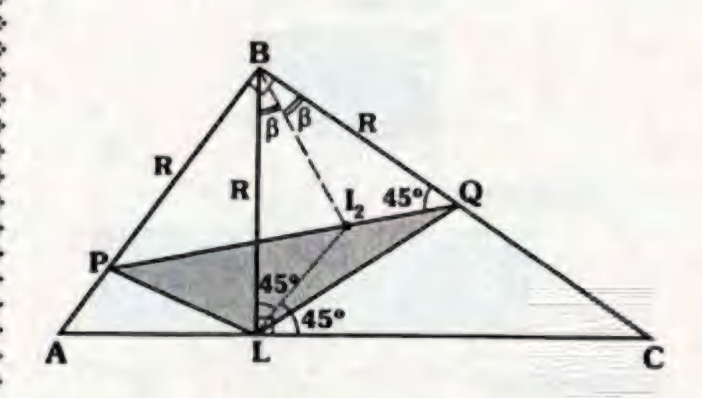
  I: Ortocentro del $\Delta BI_1I_2$

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle ABI = m\measuredangle CBI = 45°$ y $\overline{BF}$ es altura del $\Delta BI_1I_2$

- Luego en el $\Delta PFB$:

  $x = y = 45°$

**Paso 3**




- Como $m\measuredangle BQP = 45°$

  $\Rightarrow$ $PB = BQ = R$

- En $\triangle BLC$ : $I_2$ es incentro

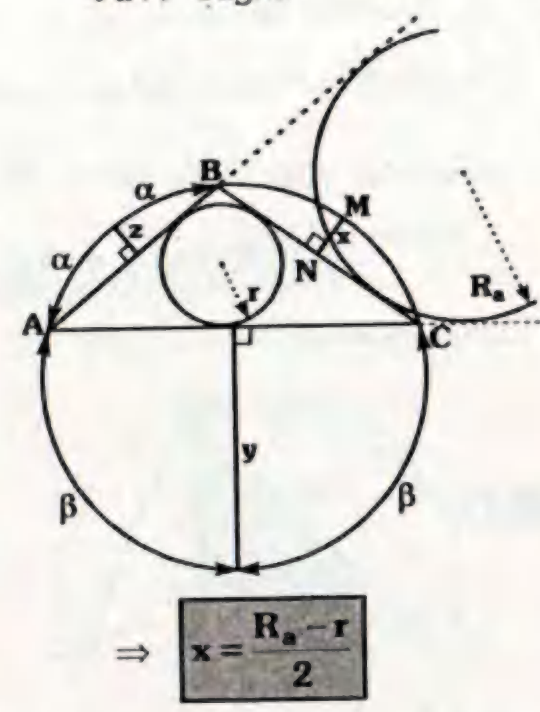
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle BLI_2 = m\measuredangle I_2LC = 45°$

- $\Delta BLI_2 \cong \Delta BQI_2$ (ALA)

  $\Rightarrow$ $BL = BQ = R$

$\therefore$ B es el circuncentro del $\Delta PLQ$.

Ⓓ Si r: Inradio, $R_a$: Exradio y $\overline{MN}$: Sagita

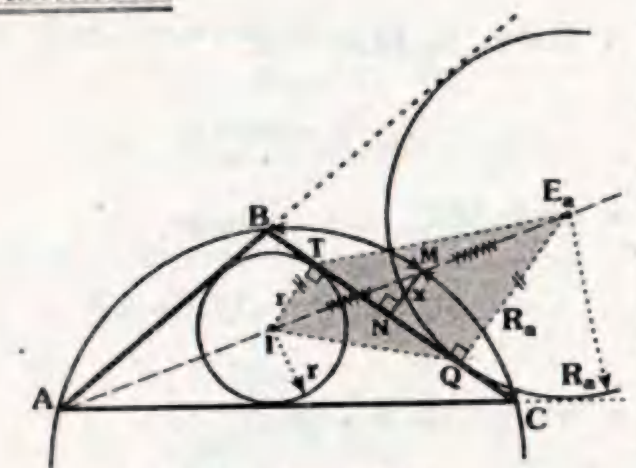



$$\Rightarrow \quad x = \frac{R_a - r}{2}$$

**También:**

$$y = \frac{R_b - r}{2} \qquad z = \frac{R_c - r}{2}$$

**Demostración:**

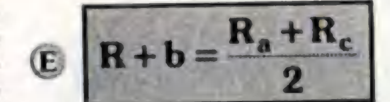



- Debido a que $\overline{MN}$ es sagita $\Rightarrow m\widehat{BM} = m\widehat{MC}$ con lo cual A, I, M y $E_a$ son colineales.
- Por el teorema 8.3 (B):

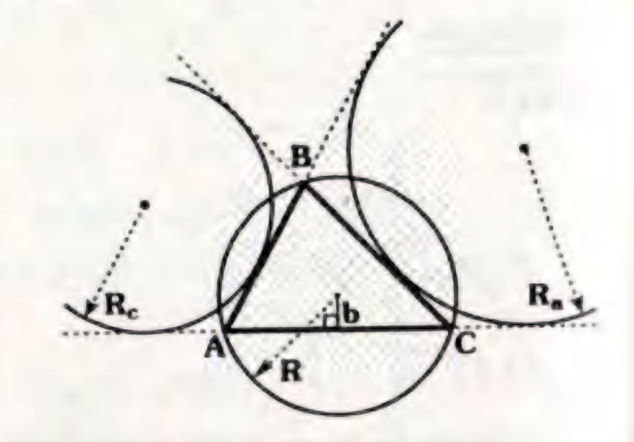
$$IM = ME_a$$

- Puesto que $\overline{IT} // \overline{E_aQ} // \overline{MN}$ y M es punto medio de $\overline{IE_a}$, por el teorema en el trapecio $ITE_aQ$:

$$\therefore \quad x = \frac{R_a - r}{2}$$

Ⓔ 

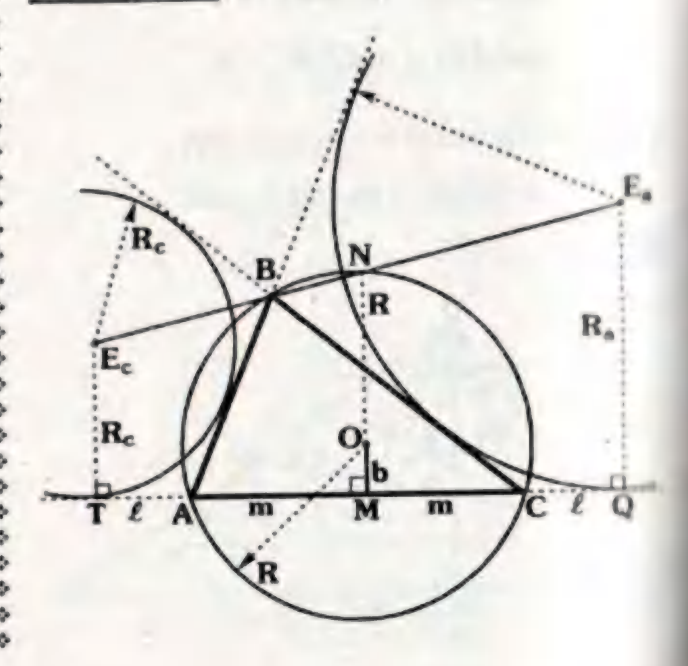
$$R + b = \frac{R_a + R_c}{2}$$




**Análogamente:**

$$R + a = \frac{R_a + R_c}{2} \qquad R + c = \frac{R_a + R_b}{2}$$

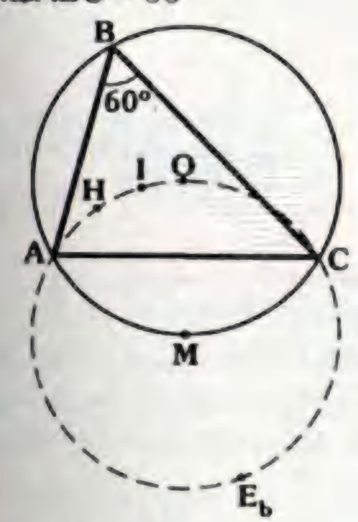
**Demostración:**



- Por el teorema 8.2(B): $m\widehat{AN} = m\widehat{NC}$
- Por el teorema 8.2(A): $AT = CQ = \ell$
- Como $\overline{OM} \perp \overline{AC} \Rightarrow AM = MC = m$
- Con lo cual N,O y M son colineales
- $\overline{MN}$, base media del trapecio $TE_cE_aQ$.

$$\therefore \ R + b = \frac{R_a + R_c}{2}$$

Si $m\measuredangle ABC = 60°$




En el gráfico, A, C, el ortocentro (H), el incentro (I), el circuncentro (O) y el excentro ($E_b$) pueden ubicar en una circunferencia, cuyo centro será punto medio M del arco AC.

**Demostración:**

- Por teoremas básicos:

$m\measuredangle AHC = 180° - 60° = 120°$

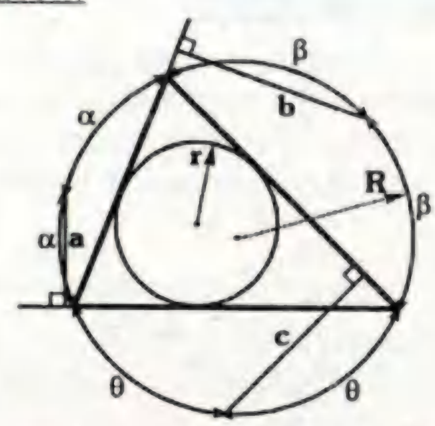
$m\measuredangle AIC = 90° + \dfrac{60°}{2} = 120°$ ;

$m\measuredangle AOC = 2(60°) = 120°$ y

$m\measuredangle AE_bC = 90° - \dfrac{60°}{2} = 60°$

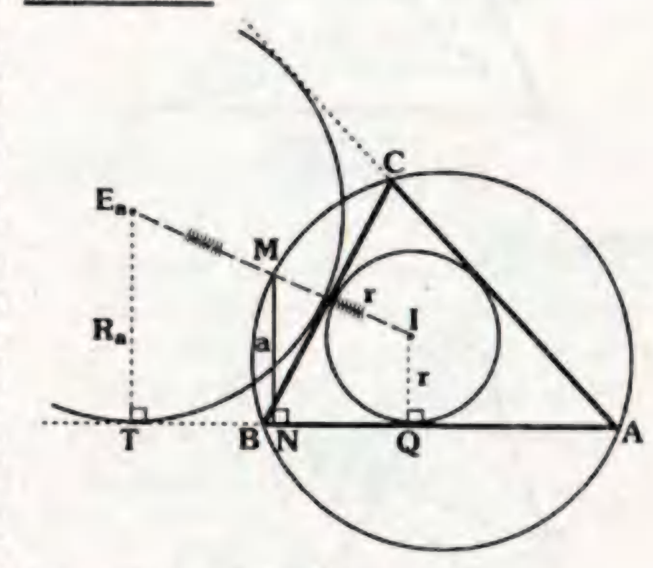
A, H, I, O, C y $E_b$ son concíclicos.

**Aplicación:**




Se cumple: $a + b + c = 2(R + r)$

**Demostración:**




- Se ubica el excentro ($E_a$).
- Por teorema 8.3(B) $E_aM = MI$
- $\overline{MN}$ : Base media del trapecio $E_aTQI$

$$a = \frac{R_a + r}{2}$$

- De igual modo:

$$b = \frac{R_b + r}{2} \quad y \quad c = \frac{R_c + r}{2}$$

$$\Rightarrow \ a + b + c = \frac{R_a + R_b + R_c + 3r}{2}$$

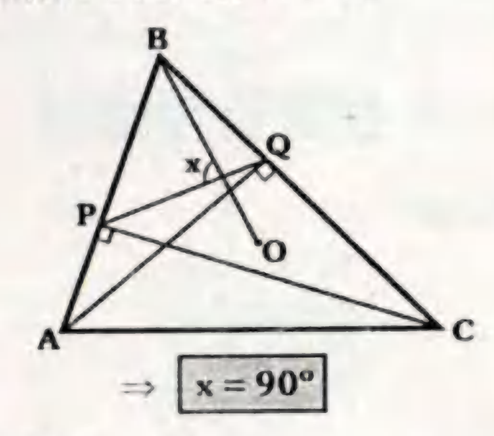
- Pero: $R_a + R_b + R_c = 4R + r$ (Ver 8.10)

$$\therefore \ a + b + c = 2(R + r)$$

## 8.9 TEOREMA DE NAGEL

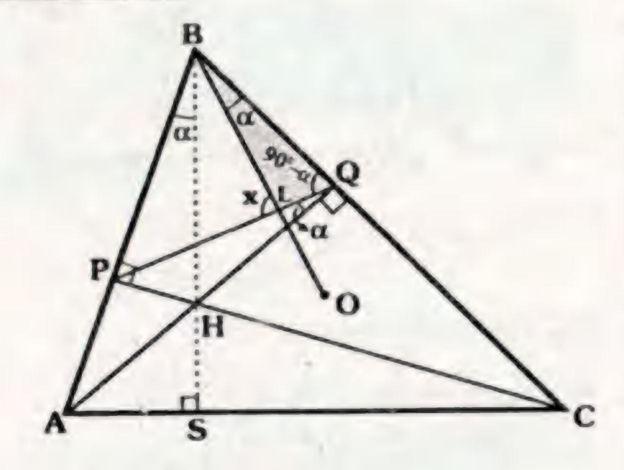
El segmento que une los pies de dos alturas es perpendicular al circunradio correspondiente al vértice desde el cual no se ha trazado la altura.

Si $\overline{AQ}$ y $\overline{CP}$ son alturas y O es el circuncentro del $\Delta ABC$.




$\Rightarrow$ $x = 90°$

**Demostración:**




- Por el teorema 8.4.:

  $m\measuredangle ABS = m\measuredangle OBC = \alpha$

- ⏢PBQH: Inscriptible

  $\Rightarrow m\measuredangle PQH = \alpha$

- En "Q": $m\measuredangle BQL = 90° - \alpha$

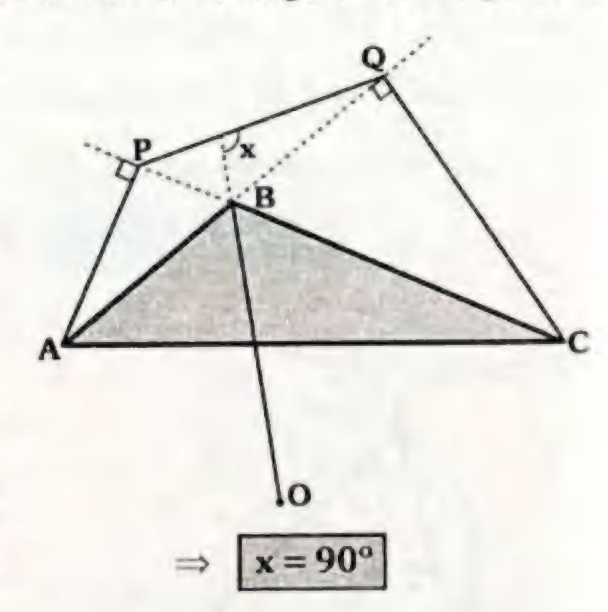
- Luego en el $\Delta BLQ$:

  $x = \alpha + 90° - \alpha$

  $\therefore x = 90°$

**También:**

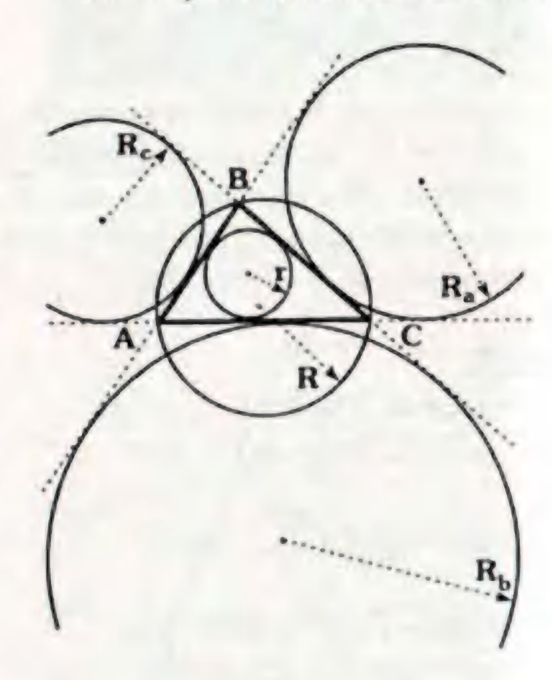
Si $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$ son alturas y O es circuncentro del triángulo obtusángulo ABC.




$\Rightarrow$ $x = 90°$

## 8.10 TEOREMA DE STEINER

En todo triángulo, la suma de los tres exradios es igual a la suma del inradio y cuatro veces el circunradio.




Se cumple:

$$R_a + R_b + R_c = 4R + r$$

**Demostración:**

- Si "b" es la distancia del circuncentro hacia $\overline{AC}$.
- Por el teorema 8.8 (D):

$$R-b=\frac{R_b-r}{2}$$

- Por el teorema 8.8 (E): (+)

$$R+b=\frac{R_a+R_c}{2}$$

$$\therefore\ R_a+R_b+R_c=4R+r$$

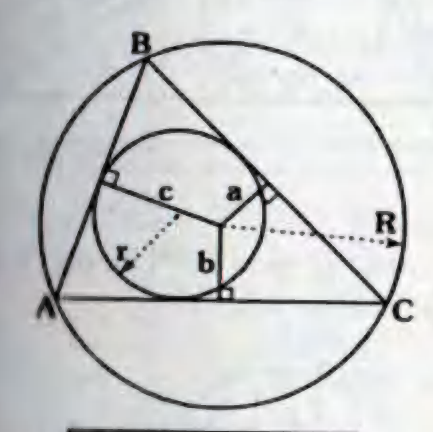
## 8.11 TEOREMAS DE CARNOT

### CARNOT 1

**Caso 1**

En todo triángulo acutángulo la suma de las distancias del circuncentro hacia los lados es igual a la suma del inradio y circunradio.

Si $\triangle ABC$: Acutángulo




$$\Rightarrow\ \boxed{a+b+c=R+r}$$

**Demostración:**

- Se observa que: $R-a$, $R-b$ y $R-c$ son las longitudes de las sagitas $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.
- Por el teorema 8.8 (D):

$$R-a=\frac{R_a-r}{2};\quad R-b=\frac{R_b-r}{2};$$

$$R-c=\frac{R_c-r}{2}$$

- Sumando las expresiones:

$$R-a+R-b+R-c=\frac{R_a-r}{2}+\frac{R_b-r}{2}+\frac{R_c-r}{2}$$

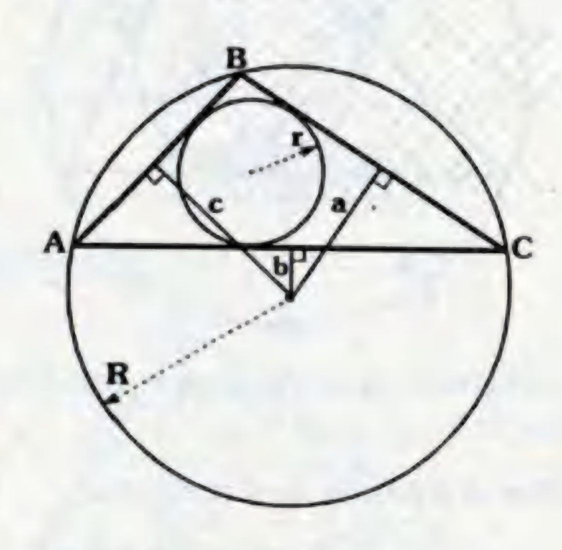
$$\Rightarrow 6R+3r=\underbrace{R_a+R_b+R_c}_{4R+r}+2(a+b+c)\quad \text{(T. Steiner)}$$

$$\therefore\ R+r=a+b+c$$

**Caso 2**

En todo triángulo obtusángulo la suma de las distancias del circuncentro hacia los lados que determinan el ángulo obtuso menos la distancia hacia el otro lado es igual a la suma entre el circunradio con el inradio.

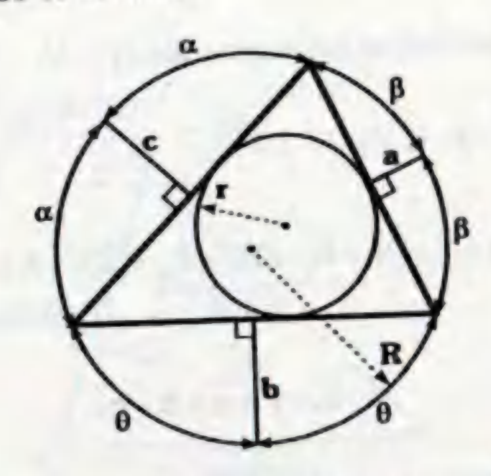
Si $\triangle ABC$: Obtusángulo




$$\Rightarrow\ \boxed{a+c-b=R+r}$$

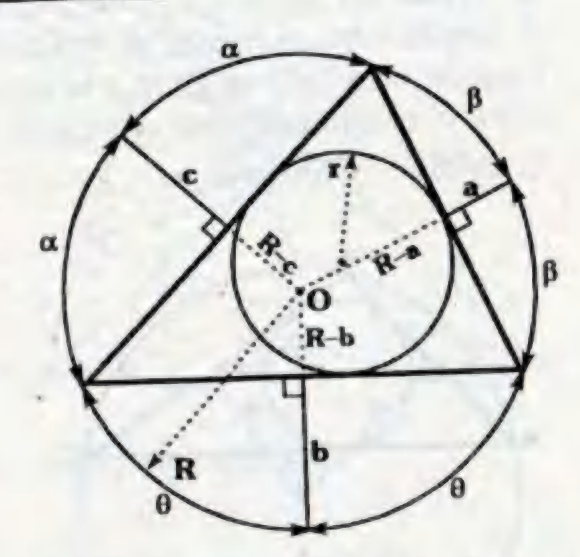
**CARNOT 2**

La suma de las longitudes de las sagitas correspondientes a los lados de un triángulo, tal que se encuentren en la región exterior, es igual al doble del circunradio menos el inradio.




$$a + b + c = 2R - r$$

**Demostración:**




- Sabemos que las sagitas concurren en O.
- Por el teorema de Carnot 1:

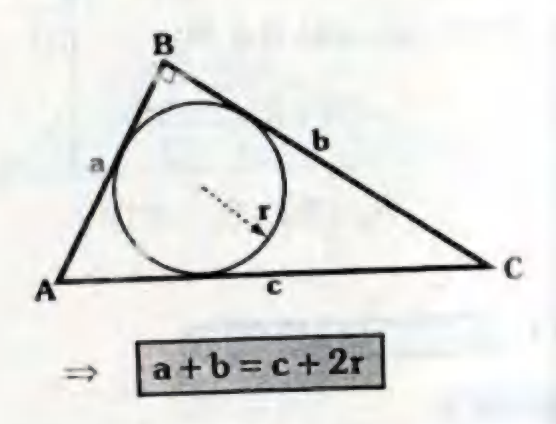
$$R - a + R - b + R - c = R + r$$

$$\therefore \quad 2R - r = a + b + c$$

## 8.12 TEOREMA DE PONCELET

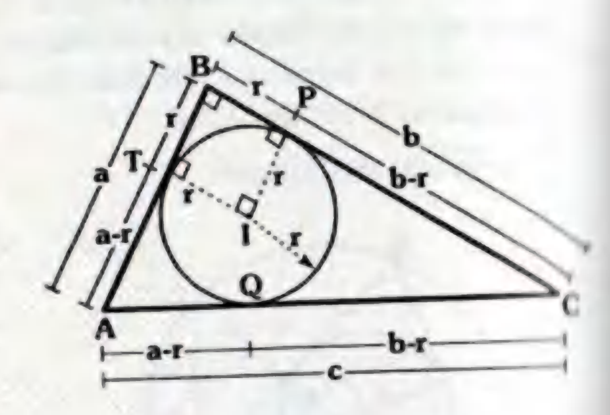
En todo triángulo rectángulo, la suma de las longitudes de los catetos es igual a la suma de la longitud de la hipotenusa y el doble del inradio.

Si: $m\measuredangle ABC = 90^\circ$ e I: inradio




$$\Rightarrow \quad a + b = c + 2r$$

**Demostración:**




- Se observa que TBPI es un cuadrado cuyo lado mide "r".
- Por teorema:

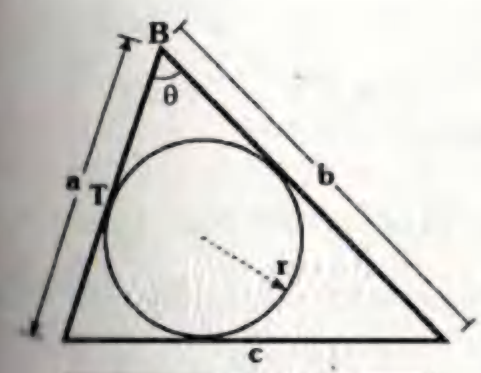
$$AT = AQ = a - r \quad ;$$

$$CP = CQ = b - r$$

- $AC = AQ + QC \Rightarrow c = a - r + b - r$

$$\therefore \quad c + 2r = a + b$$

### Generalizando:



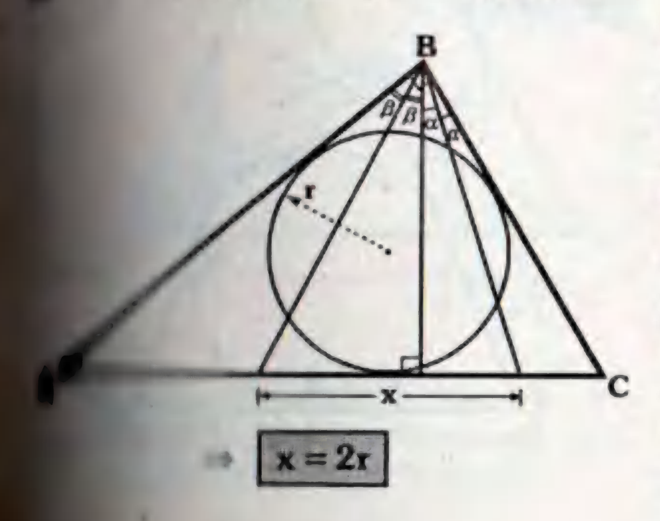

$$a + b = c + 2r\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Para su demostración debemos aprovechar que $BT = r\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$, luego debemos proceder del mismo modo en el teorema anterior.

> **Nota**
>
> *(Recíproco) Si en un triángulo la suma de las longitudes de dos lados es igual a la longitud del tercer lado y el doble del inradio, entonces se trata de un triángulo rectángulo.*

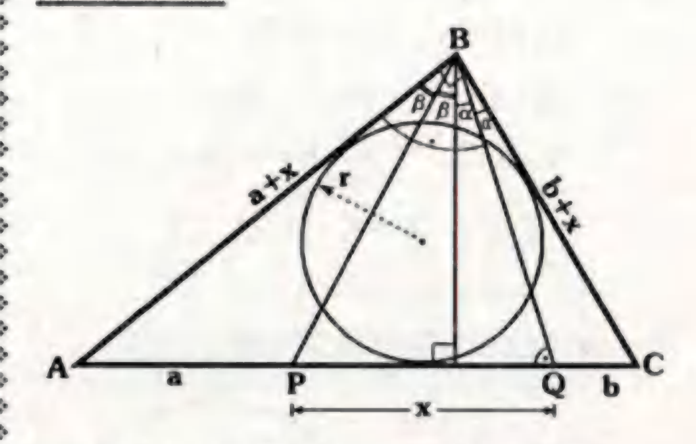
### Aplicaciones:

Ⓐ Si: $m\measuredangle ABC = 90°$ y r: inradio




$\Rightarrow$ $x = 2r$

**Demostración:**

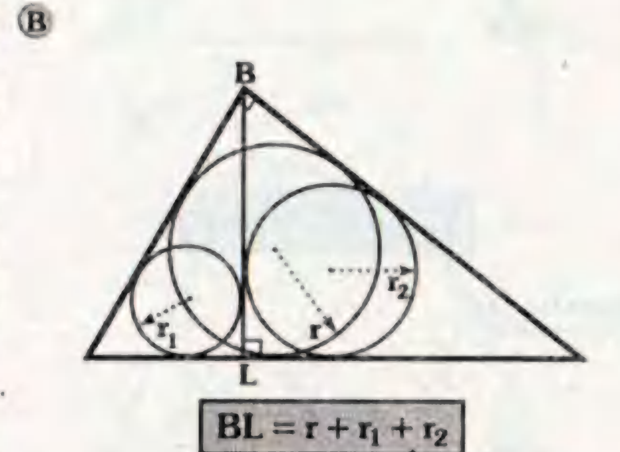



- $\Delta ABQ$ : Isósceles $\Rightarrow$ $AB = a + x$
- $\Delta PBC$ : Isósceles $\Rightarrow$ $BC = b + x$
- Por el teorema de Poncelet:

$$\Rightarrow\ a + x + b + x = a + x + b + 2r$$

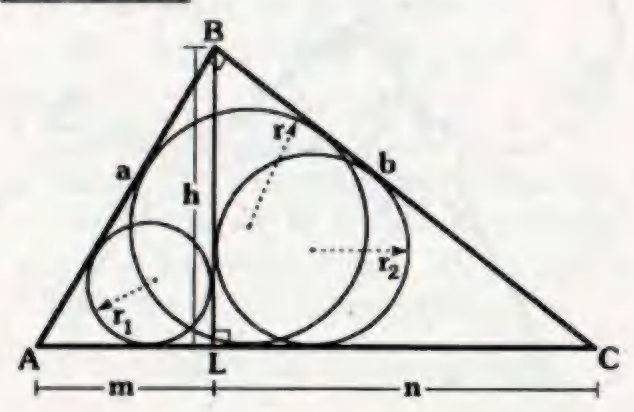
$$\therefore\ x = 2r$$

Ⓑ




$$BL = r + r_1 + r_2$$

**Demostración:**



- Por Teorema de Poncelet:

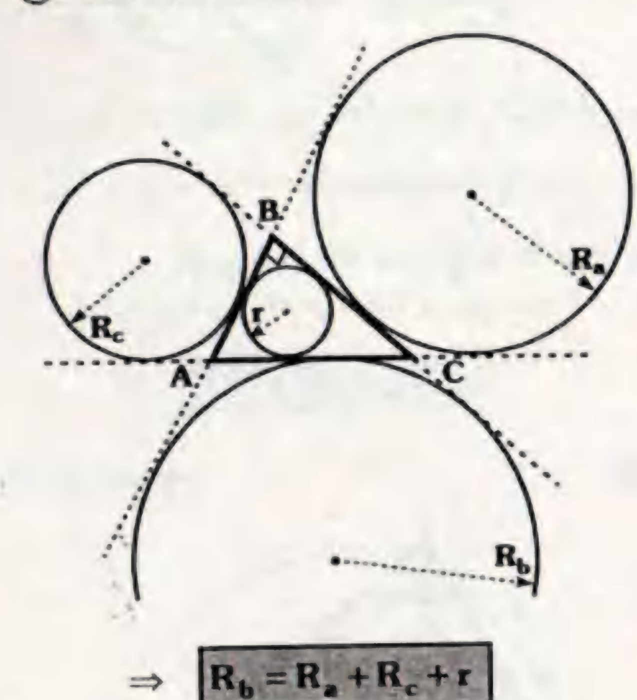
  ⊿ABL: $m+h=a+2r_1$

  ⊿CBL: $n+h=b+2r_2$

  ⊿ABC: $a+b=m+n+2r$

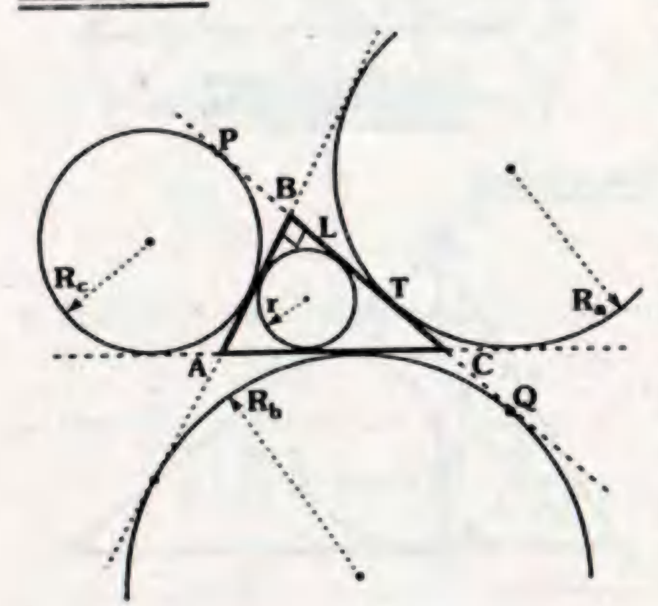
  $\therefore\ h=r_1+r_2+r$

Ⓒ Si $m\measuredangle ABC=90^\circ$




$\Rightarrow$ $R_b=R_a+R_c+r$

**Demostración:**




- Por teoremas de circunferencia, se tiene:

  $BP=R_c$, $BL=TC=r$, $BT=R_a$ y $BQ=R_b$

- Por el teorema 8.2 (B): $PB=CQ=R_c$.

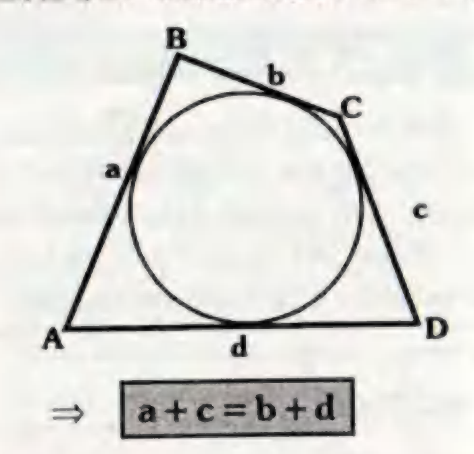
- Del gráfico: $BQ=BT+TC+CQ$

  $\therefore\ R_b=R_a+r+R_c$

## 8.13 TEOREMA DE PITOT

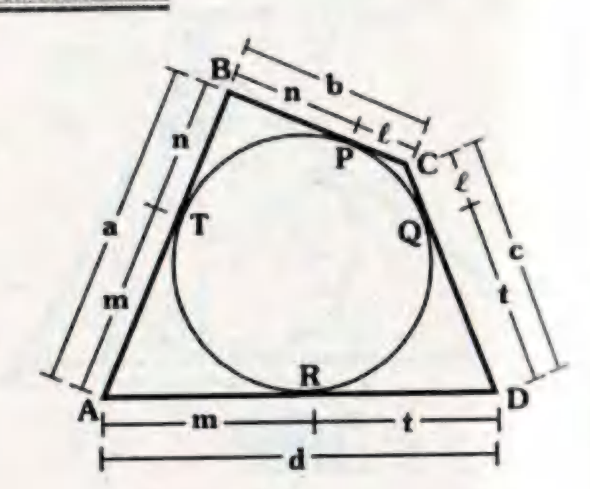
Para todo cuadrilátero circunscrito o circunscriptible las sumas de las longitudes de los lados opuestos son iguales.

◻ABCD: Cuadrilátero circunscrito.




$\Rightarrow$ $a+c=b+d$

**Demostración:**



- Por teorema de circunferencia:

$AT = AR = m\,,\quad BT = BP = n\,,$

$CP = CQ = \ell\,,\quad DQ = DR = t$

- Se observa: $a = m + n\,,\quad b = n + \ell\,,$ $c = \ell + t$ y $d = m + t$

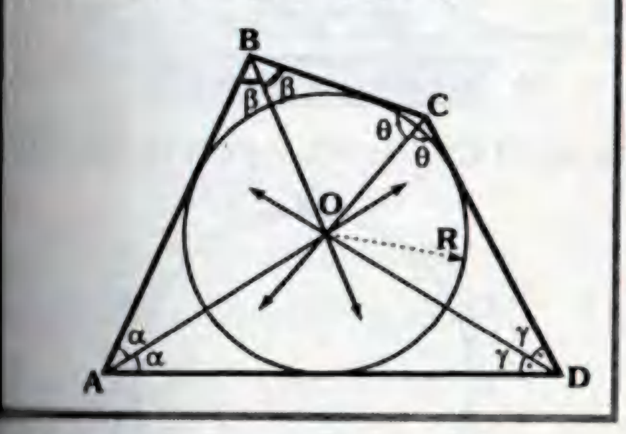
- $a + c = m + n + \ell + t$ y $b + d = n + \ell + m + t$

$\therefore\quad a + c = b + d$

**Nota**

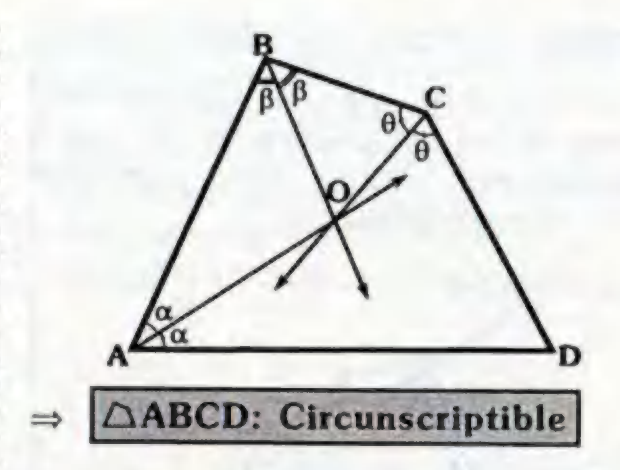
- *El semiperímetro de la región limitada por un cuadrilátero circunscrito es igual a la suma de las longitudes de cualquier par de lados opuestos.*
- *En todo cuadrilátero circunscrito las bisectrices interiores pasan por el centro de la circunferencia inscrita.*
- *Las bisectrices internas concurren en O.*

R: *Inradio del* ⏢ABCD.



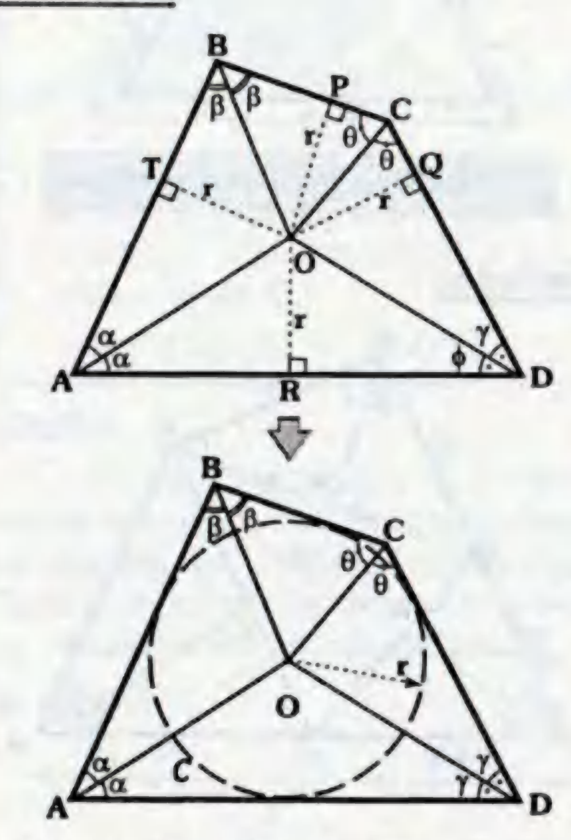

**TEOREMA:**

Si en un cuadrilátero convexo tres bisectrices interiores son concurrentes, dicho cuadrilátero es circunscriptible.




$\Rightarrow$ **⏢ABCD: Circunscriptible**

**Demostración:**



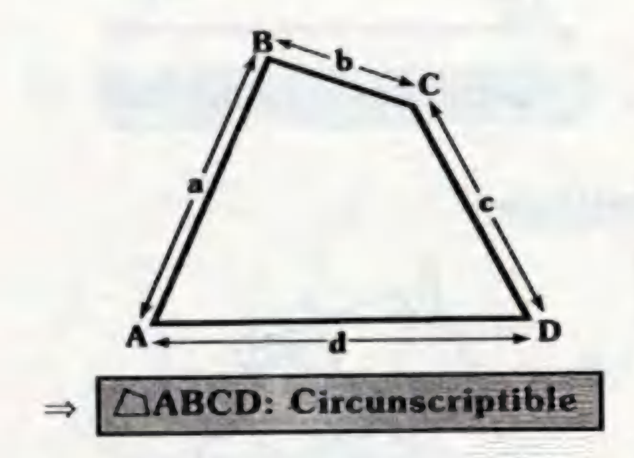

- Por teorema de la bisectriz: $OR = OT = OP = OQ = r$
- Como: $OR = OQ \;\Rightarrow\; \phi = \gamma$
- Luego por el postulado de Euclides, con centro en O y radio **r** podemos trazar la circunferencia $\mathscr{C}$, la cual es tangente a los cuatro lados.

$\therefore$ ⏢ABCD: Circunscriptible

**TEOREMA:**

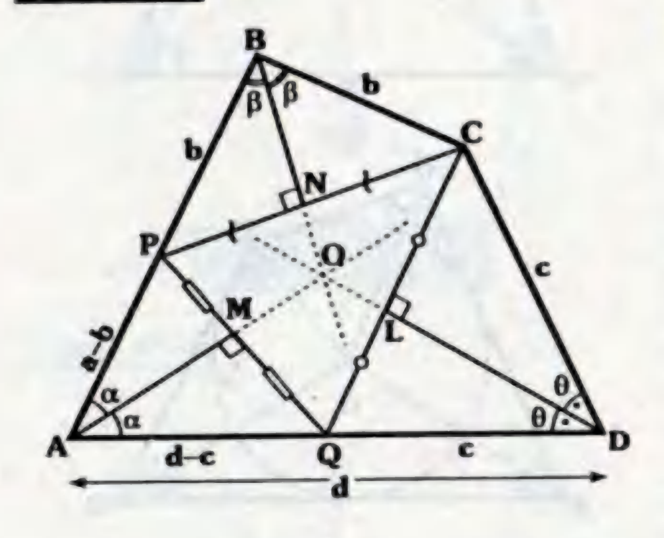
Si en un cuadrilátero convexo la suma de las longitudes de los lados opuestos es la misma, dicho cuadrilátero es circunscriptible.

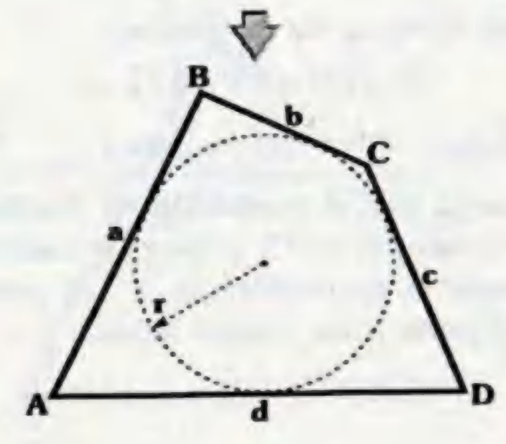
Si $a+c=b+d$




⇒ **⏢ABCD: Circunscriptible**

**Demostración:**



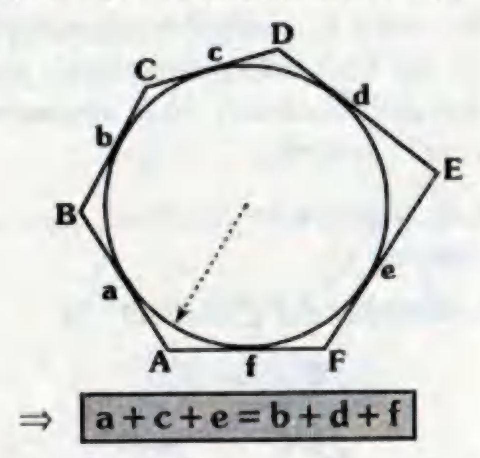




- Se ubican P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, tal que: $BP=b$ y $DQ=c$.
- De la condición del teorema se tiene $a-b=d-c$.
- Luego trazamos las alturas AM y BN las cuales se cortan en O, el cual es circuncentro del $\Delta PQC$.
- Para el $\Delta PQC$ $\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{BN}$ y $\overleftrightarrow{DL}$ son concurrentes.
- Puesto que las bisectrices AM, BN y DL son concurrentes, por el teorema anterior.

$\therefore$ ⏢ABCD: Circunscriptible.

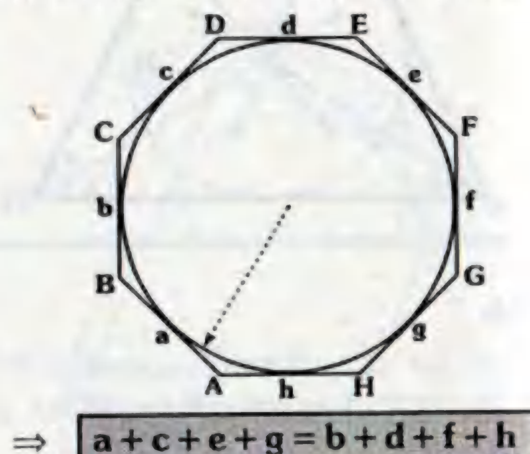
**Generalizando:**

Si ABCDEF: Hexágono circunscrito




⇒ $a+c+e=b+d+f$

Si ABCDEFGH: Octógono circunscrito

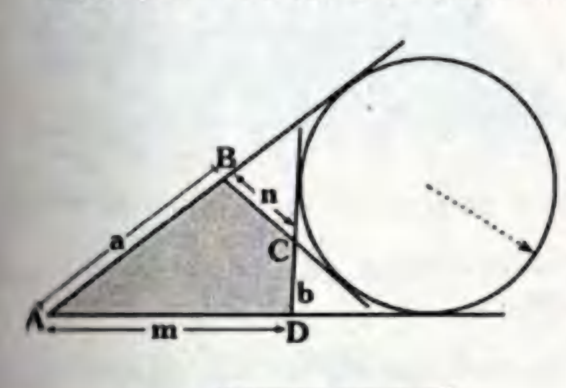



⇒ $a+c+e+g=b+d+f+h$

## 8.14. TEOREMA DE STEINER

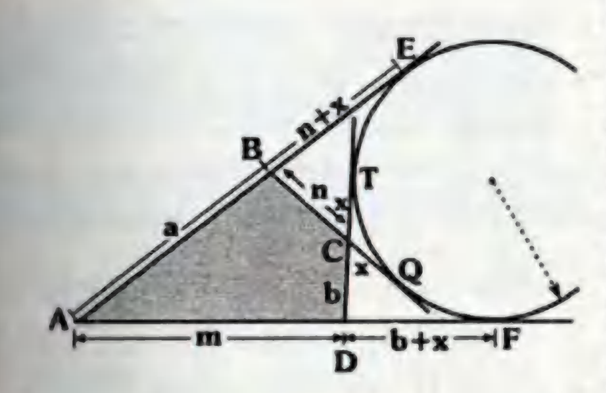
En todo cuadrilátero exinscrito o exinscriptible, las diferencias entre las longitudes de los lados opuestos son iguales.

△ABCD: Cuadrilátero exinscrito




$\Rightarrow$ $\boxed{a-b=m-n}$

**Demostración:**




- Por teorema:

$$CT=CQ=x$$

$$BQ=BE=n+x$$

$$DT=DF=b+x$$

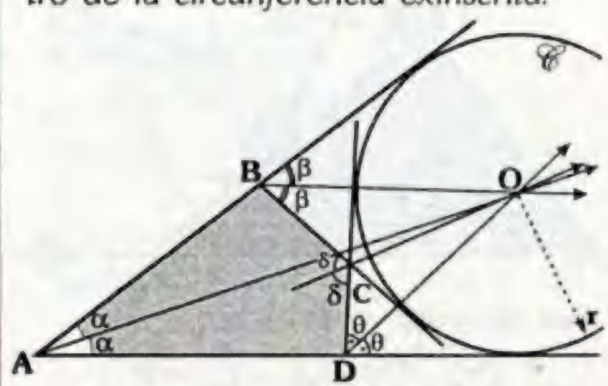
- Finalmente:

$$AE=AF$$

$$a+n+x=m+b+x$$

$$\Rightarrow\ a+n=m+b$$

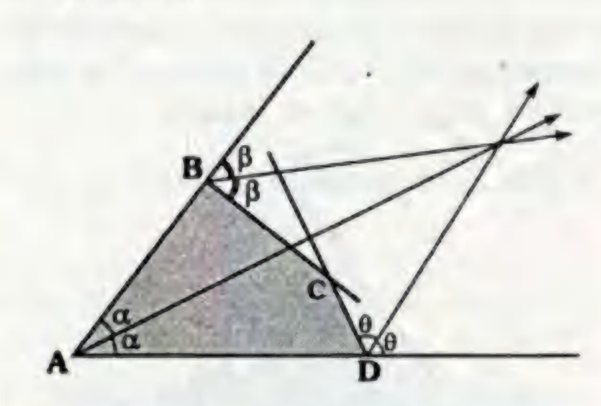
$$\therefore\ a-b=m-n$$

> **Nota**
>
> *En todo cuadrilátero exinscrito las bisectrices de dos ángulo exteriores opuestos y las bisectrices de los otros ángulos interiores concurren en el centro de la circunferencia exinscrita.*
>
> 
> 
>
> *En el gráfico las bisectrices exteriores trazadas de B y D con las bisectrices trazadas desde A y C concurren en O.*
>
> r: Exradio del △ABCD

**TEOREMA:**

Si en un cuadrilátero convexo las bisectrices exteriores de dos ángulos opuestos concurre con la bisectriz interior trazada desde cualquiera de los otros vértices opuestos, el cuadrilátero es **Exinscriptible**.

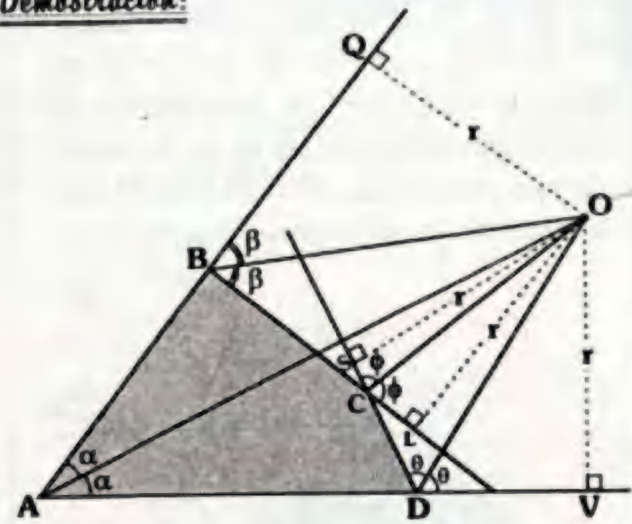
En el gráfico:




Se cumple:

**△ABCD: Exinscriptible**

**Demostración:**




- Por teorema de la bisectriz:

$$OQ = OV = OL = OS = R$$

Se concluirá: $m\measuredangle SCO = m\measuredangle OCL = \phi$ debido a OS=OL (Recíproco) del teorema de la bisectriz.

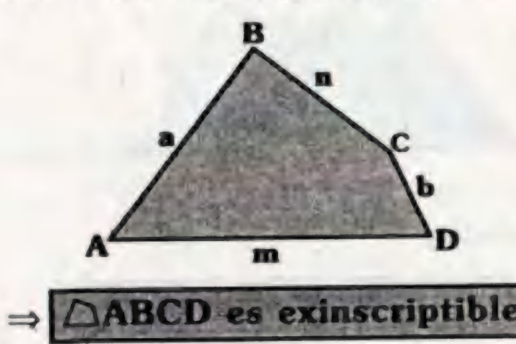
- Luego se tendrá: O equidista de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, entonces es centro de una circunferencia tangente a dichos lados.

$\therefore$ ⏢ABCD es exinscriptible

**TEOREMA:**

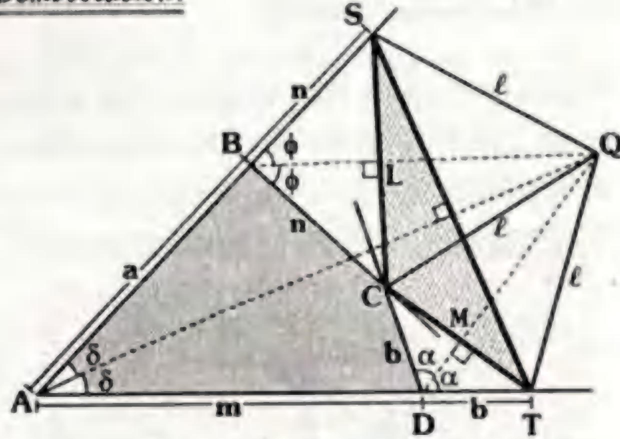
Si en un cuadrilátero convexo la diferencia de longitudes de los lados opuestos son iguales, entonces el cuadrilátero es exinscriptible. (Considerando la diferencia el mayor con el menor).

Si ⏢ABCD es convexo y $a - b = m - n$




$\Rightarrow$ **⏢ABCD es exinscriptible**

**Demostración:**

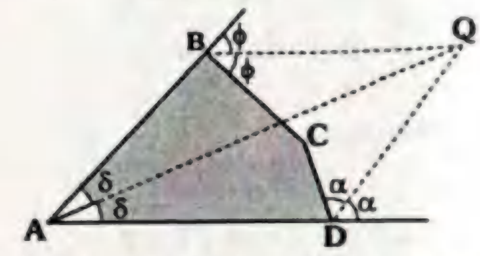



- Por dato: $a - b = m - n \Rightarrow a + n = b + m$
- Se prolonga $\overline{AB}$ hasta S, tal que: BS = n.
- Se prolonga $\overline{AD}$ hasta T, tal que DT = b
$\Rightarrow \Delta CBS$ y $\Delta CDT$: Isósceles.
- Debido a que $AS = a + n$ y $AT = m + b$
$$\Rightarrow AS = AT$$
Se concluye: $\Delta AST$: Isósceles
- Se trazan $\overline{AL}$ y $\overline{DM}$ alturas de los triángulos SBC y CDT, las cuales son bisectrices y medianas.

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BQ}$ y $\overleftrightarrow{DQ}$ son mediatrices de $\overline{CS}$ y $\overline{CT}$, luego Q es circuncentro del:

ATCS $\Rightarrow QS = QC = QT = \ell$

- ⏢ASQT: es trapezoide simétrico
$$\Rightarrow m\measuredangle SAQ = m\measuredangle QAT = \delta$$
- Se tendrá entonces:




- Por el teorema anterior, se deduce:

⏢ABCD es exinscriptible.

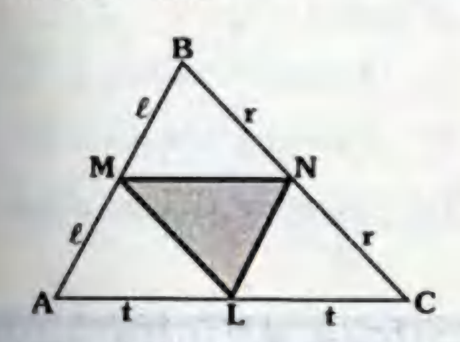
## 9. TRIÁNGULOS ESPECIALES

En este capítulo estudiaremos aquellos triángulos cuyos vértices tienen la misma característica respecto a un triángulo dado.

A un nivel preuniversitario se estudia a los triángulos mediano, órtico y exincentral, pero veremos que existen muchos más.

### 9.1 TRIÁNGULO MEDIANO, MEDIAL O COMPLEMENTARIO

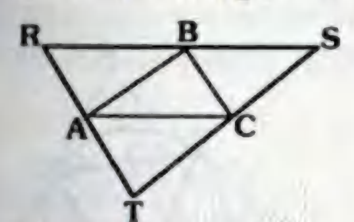
Es aquel triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de un triángulo dado.




**ΔMNL :Triángulo mediano, medial o complementario del ABC.**

**Nota**

*El triángulo antimediano del triángulo* ABC *es el triángulo* RST *tal que el triángulo ABC es triángulo mediano del triángulo* RST.



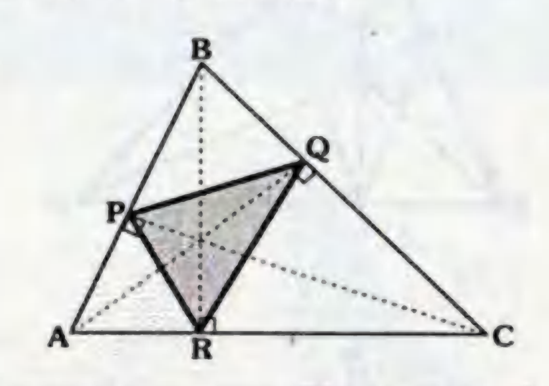

*En el gráfico:*
*El* ΔABC *es triángulo mediano del* ΔRST.

**ΔRST : *Triángulo antimediano, antimedial o anticomplementario del* ΔABC .**

### 9.2 TRIÁNGULO ÓRTICO

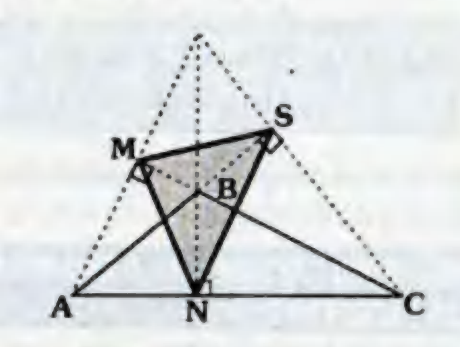
Es aquel triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas de un triángulo.

En el gráfico:
ΔABC : Acutángulo




**ΔPQR : Triángulo órtico del ΔABC .**

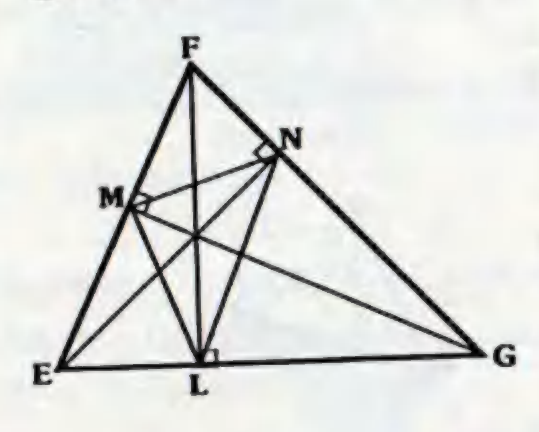
En el gráfico
ΔABC : Obtusángulo

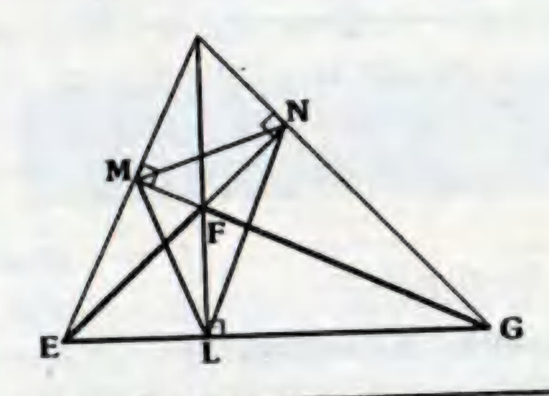



**ΔMNS : Triángulo órtico del ΔABC .**

**Nota**

- *Todos los triángulos presentan triángulo órtico, excepto el triángulo rectángulo.*
- *El triángulo* EFG *es antiórtico del triángulo* MNL, *si el triángulo* MNL *es triángulo órtico del triángulo* EFG.

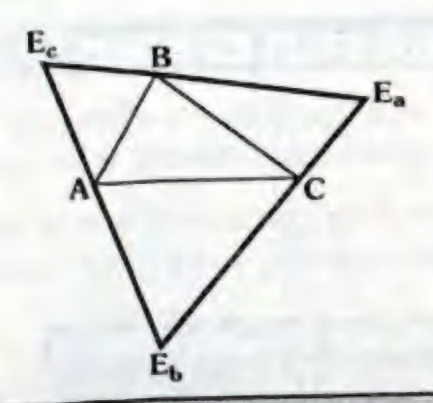



**ΔEFG : Triángulo antiórtico del ΔMNL .**

## 9.3 TRIÁNGULO EXINCENTRAL O TRIÁNGULO DE LOS EXCENTROS

Es aquel triángulo cuyos vértices son los excentros relativos a cada lado.




**$\Delta E_aE_bE_c$ : Δ Exincentral del Δ ABC**

En el gráfico:

$E_a$ : Excentro relativo a $\overline{BC}$ .

$E_c$ : Excentro relativo a $\overline{AB}$ .

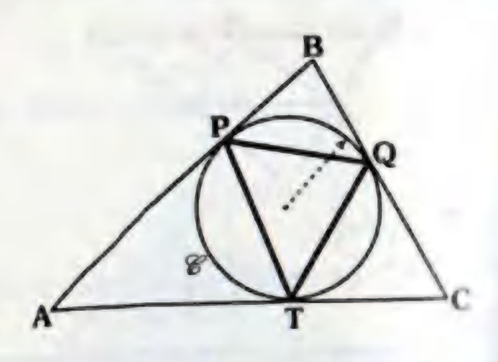
$E_b$ : Excentro relativo a $\overline{AC}$ .

## 9.4 TRIÁNGULO DE CONTACTO INTERIOR

Es el triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados de un triángulo.

En el gráfico:

$\mathscr{C}$: Circunferencia inscrita en el ΔABC .



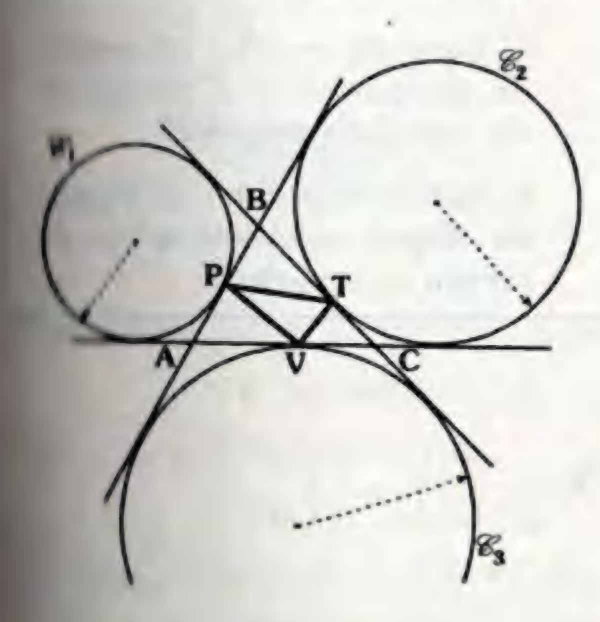

**ΔPQT : Δ de contacto interior del Δ ABC.**

## 9.5 TRIÁNGULO DE CONTACTO EXTERIOR

Es el triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia de las circunferencias exinscritas con los lados de un triángulo.

En el gráfico:

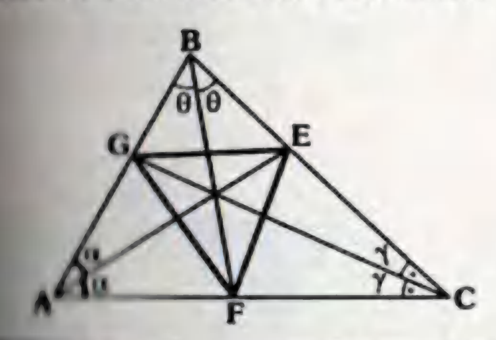
$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, y $\mathscr{C}_3$ : Circunferencias exinscritas relativas a los lados del $\Delta ABC$.




**ΔVPT : Δ de contacto exterior del ΔABC.**

## 9.6 TRIÁNGULO INCÉNTRICO

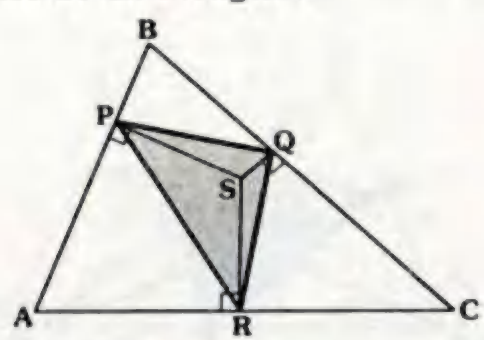
Es el triángulo cuyos vértices son los pies de las bisectrices interiores.



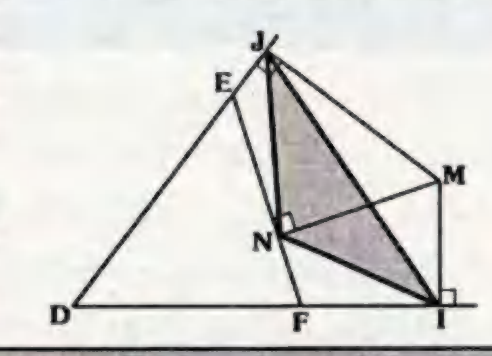

**FG : Triángulo incentrico del ΔABC.**

## 9.7 TRIÁNGULO PEDAL O PODAR

Es el triángulo cuyos vértices son las proyeccione de un punto sobre los lados de un triángulo.




**ΔPQR : Triángulo pedal o podar del ΔABC respecto a S.**



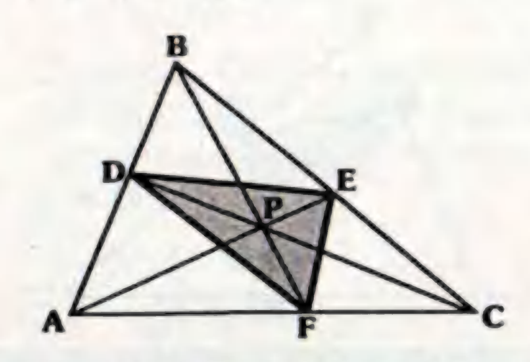

**ΔINJ : Triángulo pedal o podar del ΔEFD respecto de M.**

### Nota

- *El triángulo pedal de circuncentro es el* ***triángulo mediano.***
- *El triángulo pedal del* ***ortocentro*** *es el* ***triángulo órtico.***
- *El triángulo pedal del* ***incentro*** *es el triángulo de contacto interior.*
- *Si el punto pertenece a la circunferencia circunscrita, los pies de las perpendiculares sobre los lados o prolongaciones son colineales (ver recta de Simson) no habría triángulo pedal.*

## 9.8 TRIÁNGULO CEVIANO

Es el triángulo cuyos vértices son los pies de las cevianas concurrentes en un punto dado.




**ΔDEF : Triángulo ceviano del ΔABC respecto de P.**




- *El triángulo ceviano del* ***baricentro*** *es el* ***triángulo mediano.***
- *El triángulo ceviano del* ***ortocentro*** *es el* ***triángulo órtico.***
- *El triángulo ceviano del* ***incentro*** *es el* ***triángulo incentrico.***
- *El triángulo ceviano del* ***punto de Gergonne*** *es el* ***triángulo de contacto interior.***
- *El triángulo ceviano de* ***Punto de Nagel*** *es el* ***triángulo de contacto exterior.***

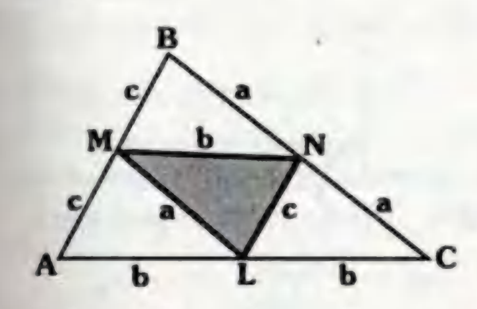


## 10. TEOREMAS SOBRE LOS TRIÁNGULOS ESPECIALES

**10.1** Si el triángulo MNL es triángulo mediano del triángulo ABC (M en $\overline{AB}$ y N en $\overline{BC}$) se cumple:

$$\Delta AML \cong \Delta MBN \cong \Delta LNC \cong \Delta MLN$$

***Demostración:***




En el gráfico: $\Delta MNL$ es triángulo mediano del triángulo ABC.

Por teorema de la base media:

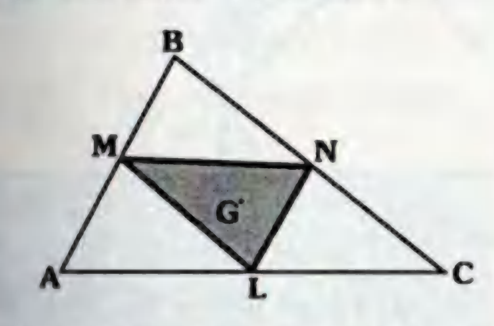
$$MN = b\,,\ ML = a \quad y \quad LN = c$$

Por caso de congruencia LLL, se tiene:

$$\Delta AML \cong \Delta MBN \cong \Delta LNC \cong \Delta MLN$$

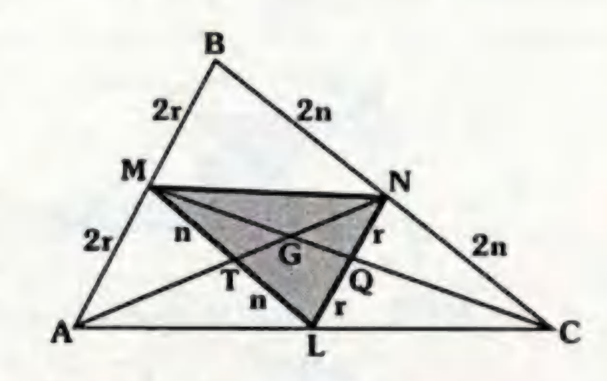
**10.2** El baricentro de todo triángulo es baricentro de su triángulo mediano.

Si $\Delta MNL$ :
Triángulo mediano del $\Delta ABC$ ; y
G: Baricentro del $\Delta ABC$ .




⇒ **G: Baricentro del $\Delta MNL$**

***Demostración:***

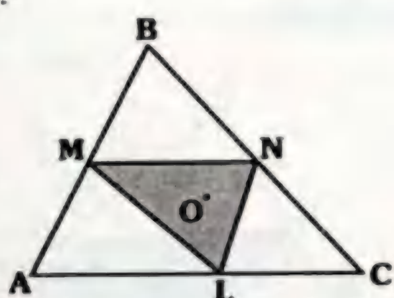



En el gráfico:

- $\Delta MNL$ : Triángulo mediano del $\Delta ABC$
  G: Baricentro del $\Delta ABC$ .
- Se tiene entonces:
  $AM = MB = 2r\,,\ BN = NC = 2n$ y
  $AL = LC$
- Por teorema de la base media:
  $$ML = 2n \quad y \quad \overline{ML} // \overline{BC}$$
  $$NL = 2r \quad y \quad \overline{NL} // \overline{AB}$$
- En $\Delta ABN$ se tiene $AM = MB$ y $\overline{MT} // \overline{BN} \Rightarrow \overline{MT}$ es base media.
- Luego: $MT = n$
- De los anterior, se tendrá:
  $$MT = TL = n$$
  $\Rightarrow \overline{NT}$ es mediana de $\Delta MNL$ .
- En forma análoga se verifica $\overline{MQ}$ es mediana del $\Delta MNL$ .
- Del criterio principal, como $\overline{NT}$ y $\overline{MQ}$ son medianas:

$\therefore$ G es baricentro del $\Delta MNL$ .

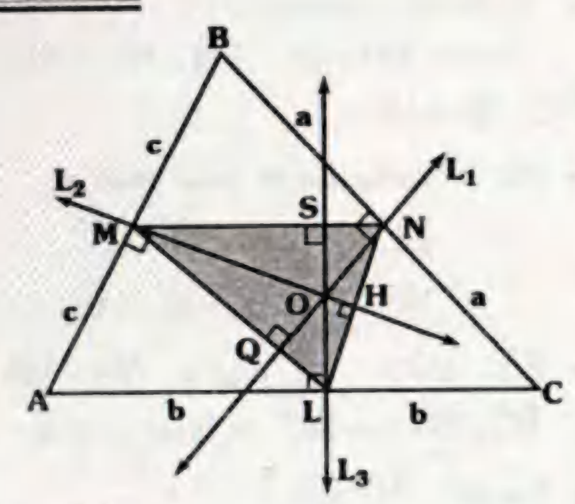
**10.3** El circuncentro de todo triángulo es ortocentro de su triángulo mediano.




Si $\Delta MNL$ : Triángulo mediano del $\Delta ABC$.
y O: Circuncentro del $\Delta ABC$.

$\Rightarrow$ **O: Ortocentro del $\nabla MNL$**

**Demostración:**

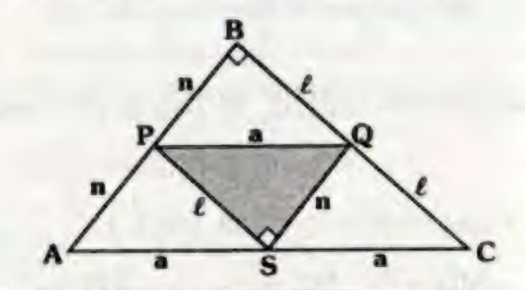



En el gráfico:

- $\Delta MNL$ es el triángulo mediano del $\Delta ABC$.
- Se sabe entonces:
  $AM = MB$, $AL = LC$ y $CN = NB$
- Se trazan $\overleftrightarrow{L_1}$, $\overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3}$ mediatrices de $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.
- Luego: O es circuncentro del $\Delta ABC$.
- También se sabe: $\overline{MN}$, $\overline{NL}$ y $\overline{ML}$ son las bases medias para el $\Delta ABC$, entonces:
  $\overline{MN} // \overline{AC}$, $\overline{LN} // \overline{AB}$ y $\overline{ML} // \overline{BC}$
- Luego se tendrá por propiedad de las paralelas:
  $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overline{ML}$, $\overleftrightarrow{L_2} \perp \overline{NL}$ y $\overleftrightarrow{L_3} \perp \overline{MN}$
  $\Rightarrow$ $\overline{MH}$, $\overline{NQ}$ y $\overline{LS}$: alturas del $\Delta MNL$.
  $\therefore$ O es ortocentro de $\Delta MNL$.

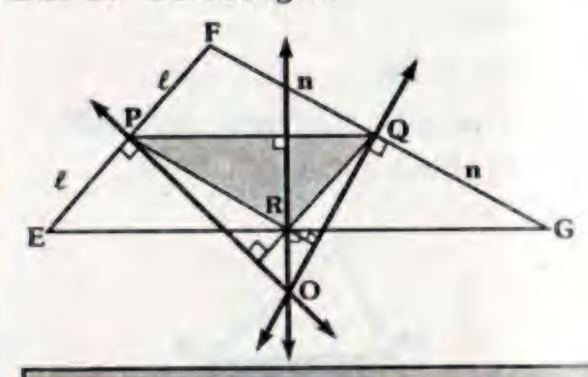
**Observación**

$\Delta ABC$ : *Triángulo rectángulo*




***⊿PQS : Es el triángulo mediano de ⊿ABC***
***S: Circuncentro del $\Delta ABC$.***
***S: Ortocentro del $\Delta PQS$.***

$\Delta EFG$: *Obtusángulo*

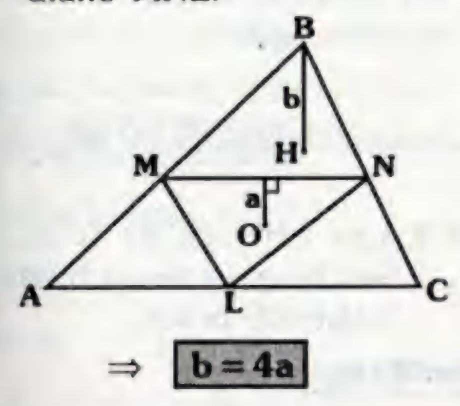



***$\Delta PQR$ : Triángulo mediano del $\Delta EFG$.***
***O: Circuncentro del $\Delta EFG$.***
***O: Ortocentro del $\Delta PQR$.***

**10.4** En todo triángulo la distancia de su ortocentro a un vértice es igual a cuatro veces la distancia del circuncentro de su triángulo mediano al lado paralelo al lado opuesto al vértice mencionado.

Si H: Ortocentro del $\Delta ABC$ y

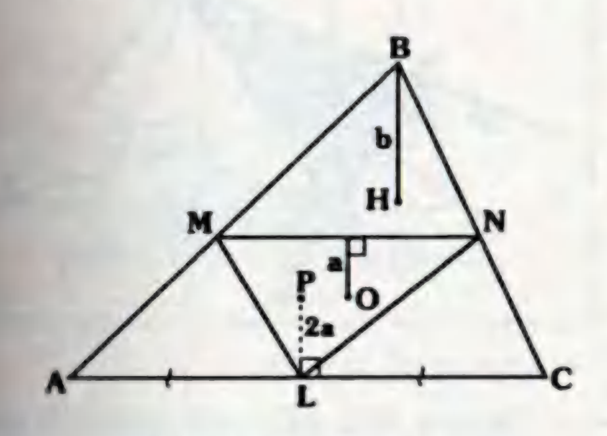
O: Circuncentro del triángulo mediano MNL.




$\Rightarrow$ $b = 4a$

**Demostración:**

- Se ubica el circuncentro P del $\Delta ABC$, por el teorema anterior P es ortocentro del $\Delta MNL$.




- $\Delta MNL$: Por el teorema 8.6(A):

$$\Rightarrow PL = 2a$$

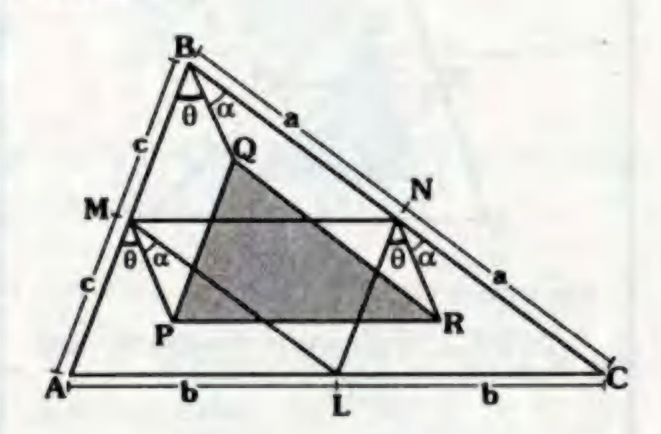
- Análogamente en el $\Delta ABC$, se tiene:

$$\therefore \; b = 4a$$

**10.5** Si el triángulo MNL es triángulo mediano del triángulo ABC (M en $\overline{AB}$ y N en $\overline{BC}$). Sean P, Q y R punto homólogos de los triángulos AML, MBN y LNC respectivamente, se cumple.

$$\Delta PQR \cong \Delta MLN$$

**Demostración:**




- Sea $\Delta MNL$, triángulo mediano del $\Delta ABC$.
- Por teorema:

$$\Delta AML \cong \Delta MBN \cong \Delta LNC \cong \Delta MLN$$

- Entonces: $MN = b$, $NL = c$, $ML = a$
- Por condición, P, Q y R son puntos homólogos, entonces:

$$MP = BQ = NR$$

$$m\measuredangle AMP = m\measuredangle MBQ = m\measuredangle LNR = \theta$$

$$m\measuredangle PML = m\measuredangle QBN = m\measuredangle RNC = \alpha$$

- Luego, se tendría:

PMBQ, QBNR y PMNR son paralelogramos.

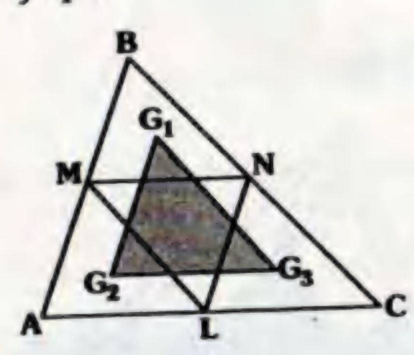
- Entonces: $PQ = c$, $QR = a$ y $PR = b$
- Finalmente por caso de congruencia LLL.

$$\Delta PQR \cong \Delta NLM$$

**Observación**

*Del teorema anterior podemos considerar casos particulares, cuando los puntos homólogos son algunos de los puntos notables.*

***Por ejemplo:***




*En este caso:*

ΔMNL : *Triángulo mediano del* ΔABC.

$G_1$ : *Baricentro del* ΔMBN.

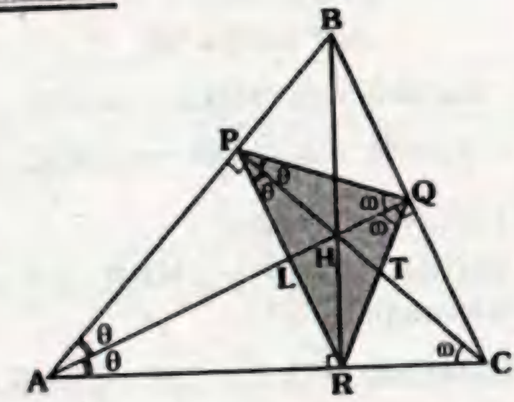
$G_2$ : *Baricentro del* ΔAML.

$G_3$ : *Baricentro del* ΔLNC.

$\Rightarrow \quad \Delta G_1G_2G_3 \cong \Delta LMN$

**10.6** El ortocentro de todo triángulo acutángulo es incentro de su respectivo triángulo órtico.

**Demostración:**




- En el gráfico:

  ΔABC : Acutángulo

  H: Ortocentro del ΔABC

- ⊡RHQC y ⊡APQC: Inscriptibles

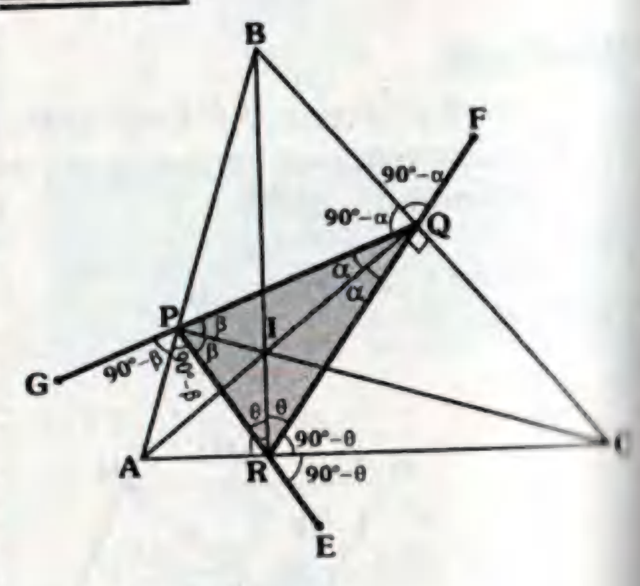
  $\Rightarrow \ m\measuredangle RCH = m\measuredangle RQA = \omega$

  y $\ m\measuredangle ACP = m\measuredangle AQP = \omega$

- En ΔPQR (triángulo órtico del ΔABC ).
- Se tiene $\overline{QL}$ es bisectriz interior.
- En forma análoga, se verifica $\overline{PT}$ es bisectriz interior.
- Por el criterio principal, se tendrá entonces H es incentro del ΔPQR.

**10.7** Los vértices de todo triángulo acutángulo son excentros de su triángulo órtico.

**Demostración:**




- En el gráfico:

  ΔPQR : Triángulo órtico del ΔABC

- Por el teorema anterior I es incentro de ΔPQR.

- Luego al prolongar $\overline{QP}$, $\overline{PR}$ y $\overline{RQ}$ se tendrá:

  $m\measuredangle GPA = m\measuredangle APR = 90° - \beta$

m∡ERC = m∡CRQ = 90° − θ

m∡FQB = m∡BQP = 90° − α

- Se concluye entonces para el ΔPQR

  A es excentro relativo a $\overline{PR}$.

  B es excentro relativo a $\overline{PQ}$.

  C es excentro relativo a $\overline{RQ}$.

**Observación**

ΔABC : *Obtusángulo.*

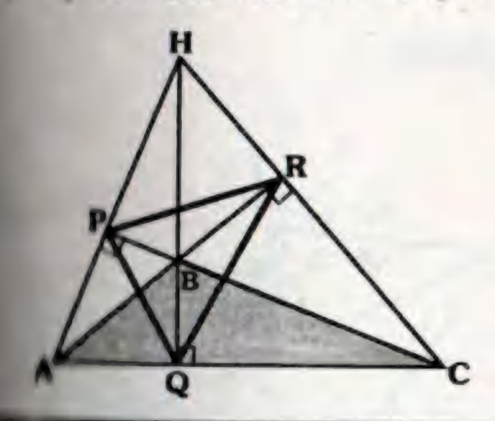
ΔPQR : *Triángulo órtico del ΔABC .*

*Se cumple:*

B: *es incentro del ΔPQR .*

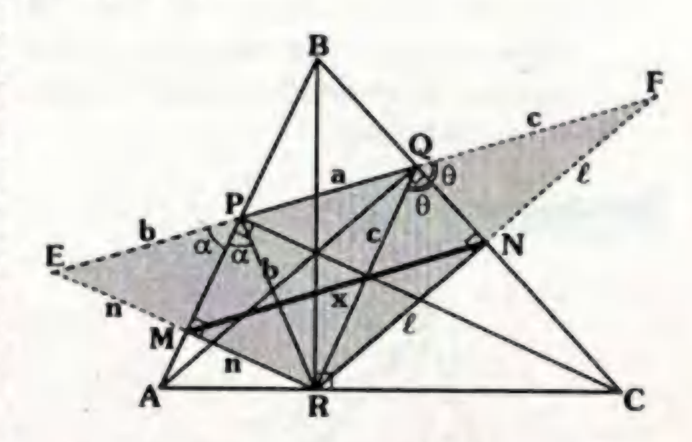
H: *ortocentro del ΔABC .*

A, H y C: *Excentros del ΔPQR .*




**10.8** La distancia entre los pies de las perpendiculares trazadas del pie de una de las alturas de un triángulo acutángulo hacia los lados adyacentes de dicha altura es igual al semiperímetro de la región limitada por el triángulo órtico.

**Demostración:**




- En el gráfico: ΔPQR :Triángulo órtico del ΔABC .

- Se va a demostrar: $x = \dfrac{a+b+c}{2}$

- Por el teorema anterior se sabe A y C son excentros, entonces:

  m∡EPA = m∡APR = α

  m∡RQC = m∡CQF = θ

- Se prolonga $\overline{RM}$ hasta E y $\overline{RN}$ hasta F se tiene entonces que en los triángulos EPR y RQF: $\overline{PM}$ y $\overline{QN}$ son bisectrices y alturas.

  ⇒ ΔRQF y ΔRPA son isósceles

  ⇒ EP = PR = b  y  RQ = QF = c

- Además: EM = MR  y  RN = NF

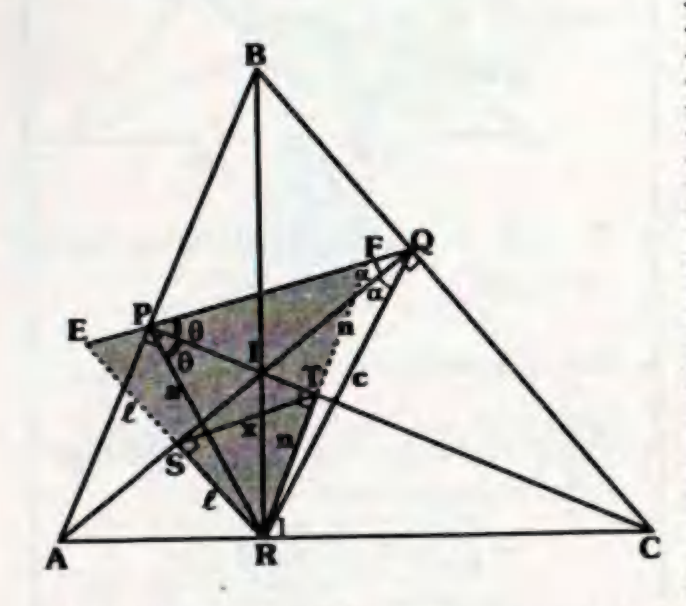
- En ΔERF, $\overline{MN}$ es base media, por teorema:

$$x = \frac{b+a+c}{2}$$

**10.9** En un triángulo acutángulo la longitud del segmento que tiene como extremos los pies de las perpendiculares trazadas desde el pie de

una de las alturas del triángulo hacia las otras alturas, es igual al semiperímetro del triángulo órtico menos la longitud del lado opuesto a dicho pie.

Demostración:




- Por teorema 10.5, I es incentro del $\Delta PQR$ al prolongar $\overline{RS}$ y $\overline{RT}$ hasta E y F respectivamente se tendrá:

$\Delta QRE$ y $\Delta PRF$ isósceles

$\Rightarrow QR = QE = c$ y $PR = PF = a$

- Además: $RS = SE$ y $RT = TF$

$\Delta REF$ : $\overline{ST}$ es base media.

$\Rightarrow EF = 2x$

- Se observa: $EP = EF - PF = 2x - a$

$EP = EQ - PQ = c - b$

$\Rightarrow 2x - a = c - b$

$\Rightarrow 2x = a + c - b$

- En el segundo miembro:

$$2x = a + c + b - b - b$$

$$\Rightarrow 2x = a + b + c - 2b$$

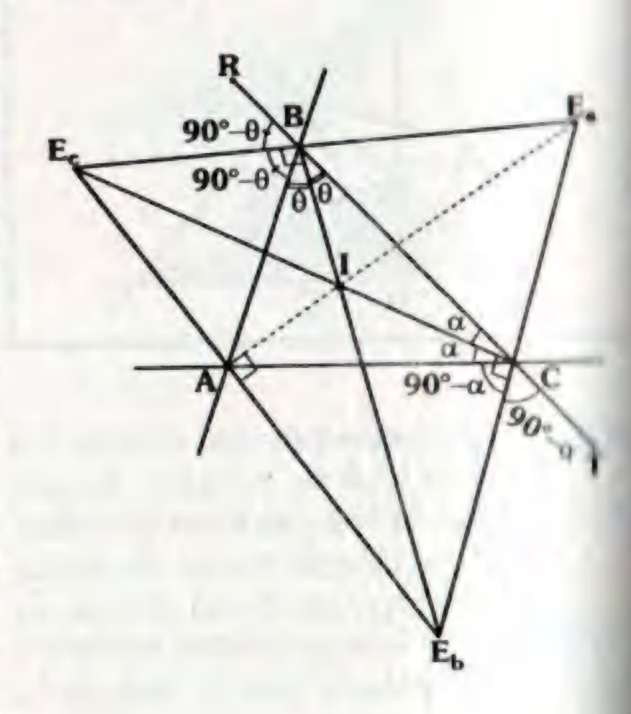
$$\therefore x = \frac{a+b+c}{2} - b$$

**10.10** De todos los triángulos que se pueden trazar cuyos vértices estén sobre los lados o prolongaciones de un triángulo obtusángulo, el de menor perímetro es el triángulo órtico.

(*ver Teorema de Fagnano*)

**10.11** El incentro de un triángulo es ortocentro del triángulo exincentral.

Demostración:




En el gráfico:

$m\measuredangle ERC = m\measuredangle CRQ = 90° - \theta$

$m\measuredangle FQB = m\measuredangle BQP = 90° - \alpha$

- Se concluye entonces para el $\Delta PQR$

  A es excentro relativo a $\overline{PR}$.

  B es excentro relativo a $\overline{PQ}$.

  C es excentro relativo a $\overline{RQ}$.

**Observación**

$\Delta ABC$ : *Obtusángulo.*

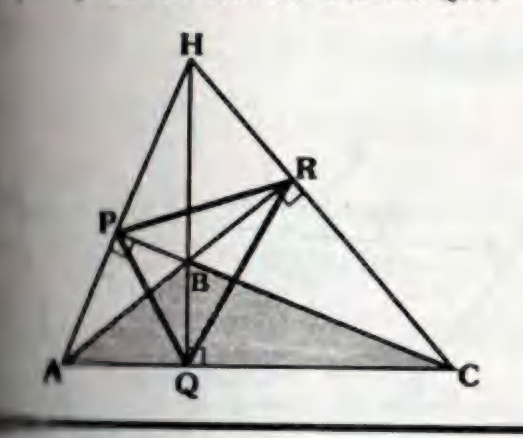
$\Delta PQR$ : *Triángulo órtico del* $\Delta ABC$.

*Se cumple:*

B: *es incentro del* $\Delta PQR$.

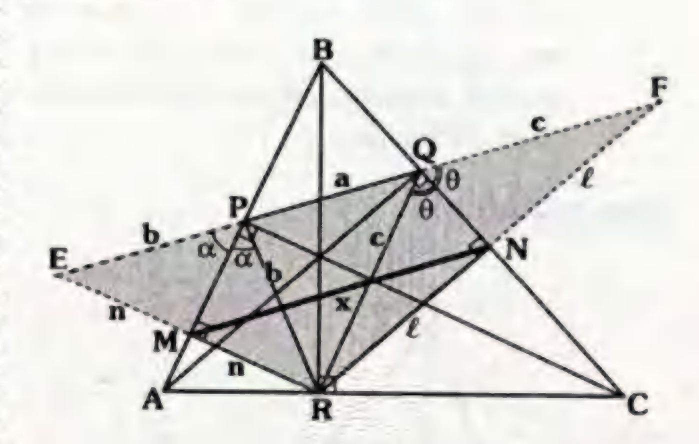
H: *ortocentro del* $\Delta ABC$.

A, H y C: *Excentros del* $\Delta PQR$.




10.8 La distancia entre los pies de las perpendiculares trazadas del pie de una de las alturas de un triángulo acutángulo hacia los lados adyacentes de dicha altura es igual al semiperímetro de la región limitada por el triángulo órtico.

**Demostración:**




- En el gráfico: $\Delta PQR$ :Triángulo órtico del $\Delta ABC$.
- Se va a demostrar: $x = \dfrac{a+b+c}{2}$
- Por el teorema anterior se sabe A y C son excentros, entonces:

$$m\measuredangle EPA = m\measuredangle APR = \alpha$$

$$m\measuredangle RQC = m\measuredangle CQF = \theta$$

- Se prolonga $\overline{RM}$ hasta E y $\overline{RN}$ hasta F se tiene entonces que en los triángulos EPR y RQF: $\overline{PM}$ y $\overline{QN}$ son bisectrices y alturas.

  $\Rightarrow$ $\Delta RQF$ y $\Delta RPA$ son isósceles

  $\Rightarrow$ $EP = PR = b$ y $RQ = QF = c$

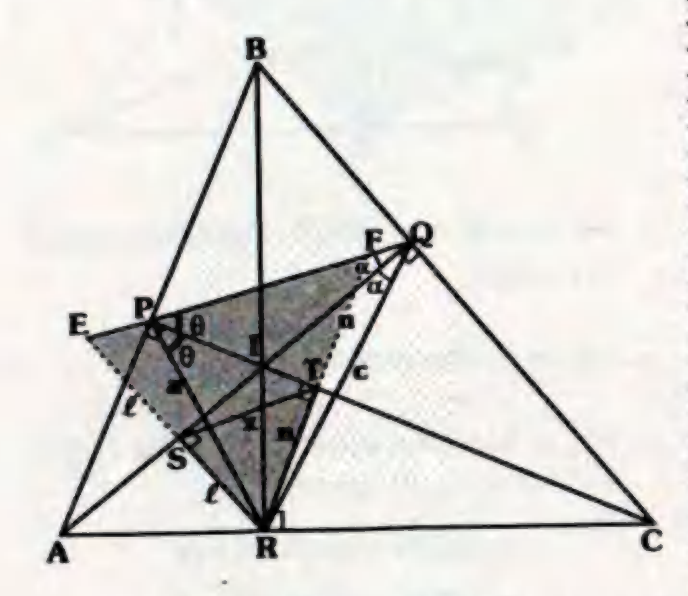
- Además: $EM = MR$ y $RN = NF$
- En $\Delta ERF$, $\overline{MN}$ es base media, por teorema:

$$x = \frac{b+a+c}{2}$$

**10.9** En un triángulo acutángulo la longitud del segmento que tiene como extremos los pies de las perpendiculares trazadas desde el pie de

una de las alturas del triángulo hacia las otras alturas, es igual al semiperímetro del triángulo órtico menos la longitud del lado opuesto a dicho pie.

**Demostración:**




- Por teorema 10.5, I es incentro del $\Delta PQR$ al prolongar $\overline{RS}$ y $\overline{RT}$ hasta E y F respectivamente se tendrá:

$\Delta QRE$ y $\Delta PRF$ isósceles

$\Rightarrow QR = QE = c$ y $PR = PF = a$

- Además: $RS = SE$ y $RT = TF$

$\Delta REF$ : $\overline{ST}$ es base media.

$\Rightarrow EF = 2x$

- Se observa: $EP = EF - PF = 2x - a$

$EP = EQ - PQ = c - b$

$\Rightarrow 2x - a = c - b$

$\Rightarrow 2x = a + c - b$

- En el segundo miembro:

$$2x = a + c + b - b - b$$

$$\Rightarrow 2x = a + b + c - 2b$$

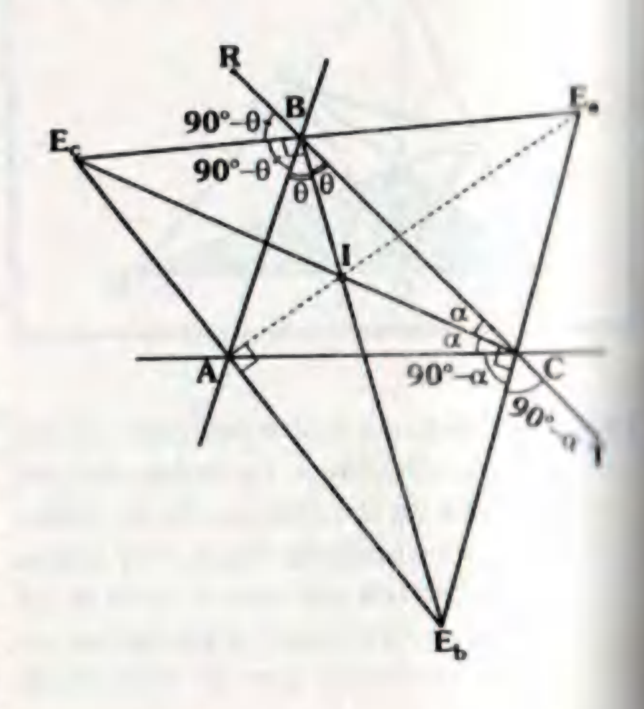
$$\therefore x = \frac{a+b+c}{2} - b$$

**10.10** De todos los triángulos que se pueden trazar cuyos vértices estén sobre los lados o prolongaciones de un triángulo obtusángulo, el de menor perímetro es el triángulo órtico.

*(ver Teorema de Fagnano)*

**10.11** El incentro de un triángulo es ortocentro del triángulo exincentral.

**Demostración:**




En el gráfico:

- $\Delta E_aE_bE_c$: Triángulo exincentral o triángulo de los excentros del $\Delta ABC$.

  I: Incentro del $\Delta ABC$.

- Se observa:

$$m\measuredangle ACE_b = m\measuredangle E_bCT = 90^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle E_cCE_b = 90^\circ$$

$$m\measuredangle ABE_c = m\measuredangle E_cBR = 90^\circ - \theta$$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle E_bBE_c = 90^\circ$$

- Como: $\overline{E_cC}$ y $\overline{E_bB}$ son alturas entonces I es ortocentro del $\Delta E_a E_b E_c$.

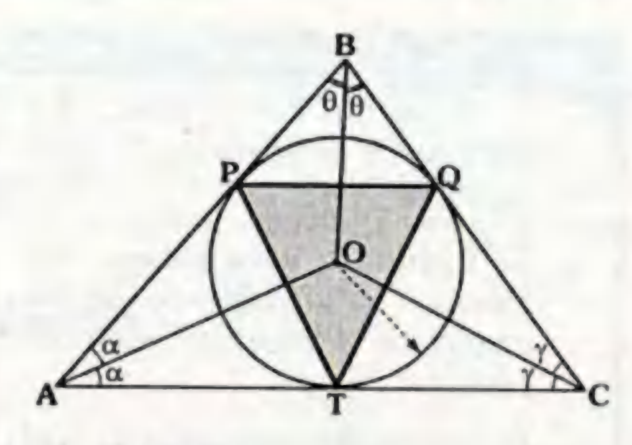
**Observación**

*También se puede indicar:*

- A, I y $E_a$: *Colineales.*
- $\Delta E_a E_b E_c$: *Acutángulo.*
- $\Delta ABC$ *es triángulo órtico del triángulo* $E_aE_bE_c$.
- $\Delta E_a E_b E_c$ *es triángulo antiórtico del* $\Delta ABC$.

**10.12** El circuncentro del triángulo de contacto interior es incentro del triángulo inicial.

**Demostración:**




En el gráfico:

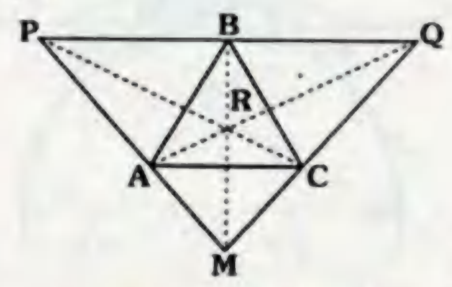
- $\Delta PQT$ es el triángulo de contacto interior del triángulo ABC.
- O es circuncentro del $\Delta PQT$.
- Por teorema de circunferencia: $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$ y $\overrightarrow{BO}$ son bisectrices de los ángulos BAC, ACB y ABC respectivamente.

$\therefore$ O es incentro del $\Delta ABC$.

## 10.13 OTROS TRIÁNGULOS ESPECIALES

### TRIÁNGULO ANTICEVIANO

El triángulo anticeviano de un triángulo ABC es el triángulo PMQ tal que el triángulo ABC es triángulo ceviano del triángulo PQR.



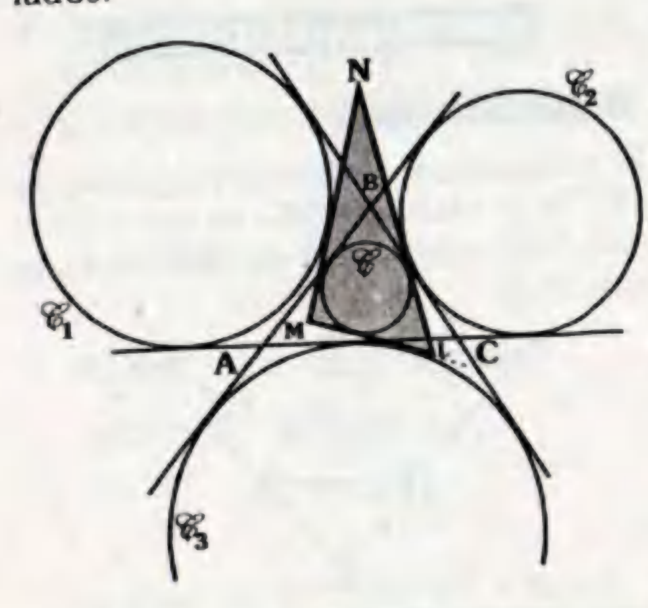

- El $\Delta PMQ$ es anticeviano del $\Delta ABC$ respecto de R.
- **El $\Delta ABC$ es ceviano del $\Delta PMQ$ respecto de R.**

**Nota**

- *El triángulo anticeviano del baricentro es el triángulo antimediano.*
- *El triángulo anticeviano del incentro es el triángulo de los excentros o triángulo exincentral.*
- *El triángulo anticeviano del ortocentro es el triángulo antiórtico..*

## TRIÁNGULO INTANGENCIAL

Es el triángulo cuyos vértices resultan de la intersección de las tangentes interiores comunes a la circunferencia inscrita y a una de las circunferencias exinscritas que no corresponden a los lados.




En el gráfico:

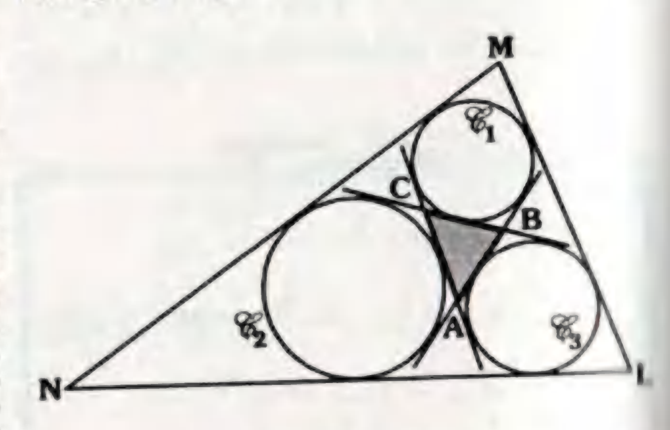
$\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ : Circunferencias exinscritas

$\mathscr{C}$ : Circunferencia inscrita.

**$\Delta$MNL : Triángulo intangencial del $\Delta$ABC**

## TRIÁNGULO EXTANGENCIAL

Es el triángulo cuyos vértices son las intersecciones de las tangentes exteriores comunes a las circunferencias exinscritas que no corresponden a las prolongaciones de los lados.




En el gráfico $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son las circunferencias exinscritas del $\Delta$ABC .

**$\Delta$MNL : Triángulo extangencial del $\Delta$ABC .**

## 11. RECTAS NOTABLES

A continuación vamos a estudiar aquellas rectas contenidas en un mismo plano, determinado por dichas rectas o por alguna figura relacionada a las rectas (ángulo, triángulo, circunferencia, etc.) a las cuales llamaremos rectas notables.

### 11.I RECTAS PARALELAS

Son aquellas que no tiene punto en común.

Si: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} = \{\ \}$

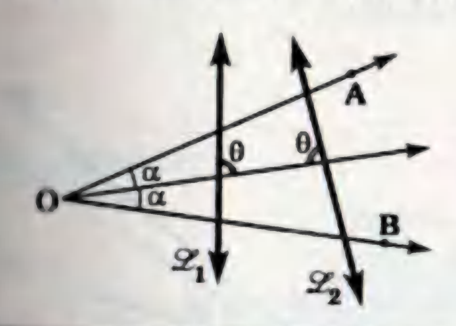
$\mathscr{L}_1$

$\mathscr{L}_2$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

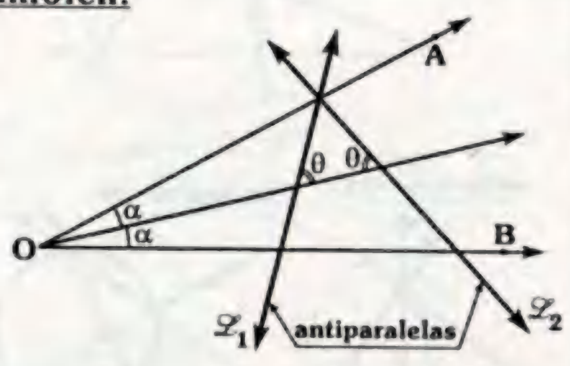
### 11.II RECTAS ANTIPARALELAS

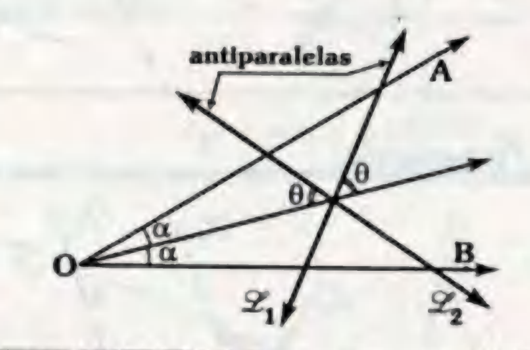
Dos rectas son antiparalelas con respecto a un ángulo, si la bisectriz de dicho ángulo es transversal y forma ángulos interiores al mismo lado de la transversal, de igual medida (y diferentes de 90°) con las rectas en mención.




$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ **son antiparalelas con respecto al ángulo AOB.**

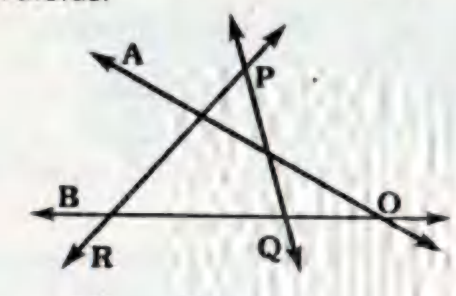
**También:**




**Nota**

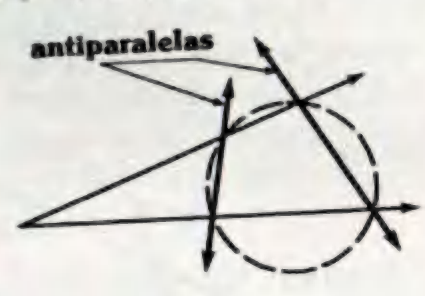
- *Los lados del ángulo son antiparalelos con respecto al ángulo formado por las rectas antiparalelas.*

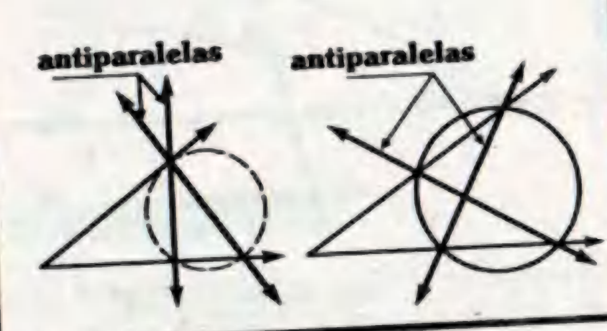



*Si:* $\overleftrightarrow{PQ}$ *y* $\overleftrightarrow{PR}$ *son antiparalelas con respecto al ángulo AOB.*

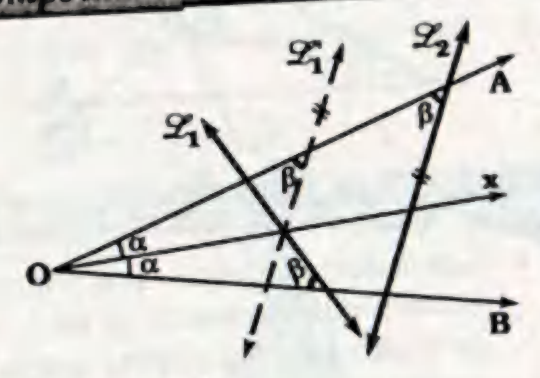
$\Leftrightarrow$ $\overleftrightarrow{OA}$ *y* $\overleftrightarrow{OB}$ *son antiparalelas con respecto al ángulo RPQ.*

- *Los puntos de corte entre los lados del ángulo y las rectas antiparalelas son concíclicos.*



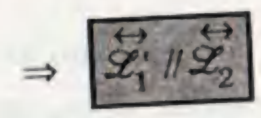




***Importante:***




*Si:* $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ *son antiparalelas con respecto al ángulo AOB.*

*y* $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1'}$: *simétrica de* $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ *con respecto a* $\overleftrightarrow{OX}$.

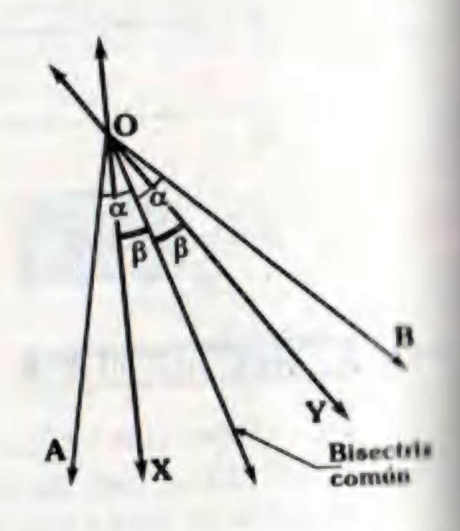
$\Rightarrow$ 
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1'} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

*Esta es la propiedad que sugiere el uso del término antiparalelo.*

## 11.3 RECTAS ISOGONALES

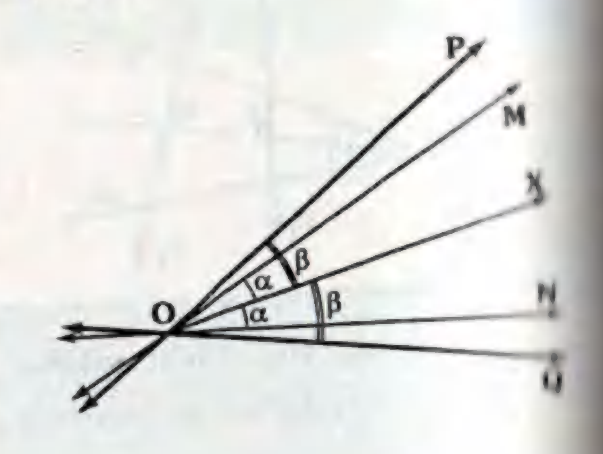
Dos rectas son conjugadas isogonales o simplemente isogonales respecto a un ángulo, cuando la bisectriz de dicho ángulo es también bisectriz del ángulo formado por las rectas en mención.

$\overleftrightarrow{OX}$ y $\overleftrightarrow{OY}$ son isogonales con respecto al $\measuredangle AOB$.




**También:**

$\overleftrightarrow{OP}$ y $\overleftrightarrow{OQ}$ son isogonales con respecto al $\measuredangle MON$.



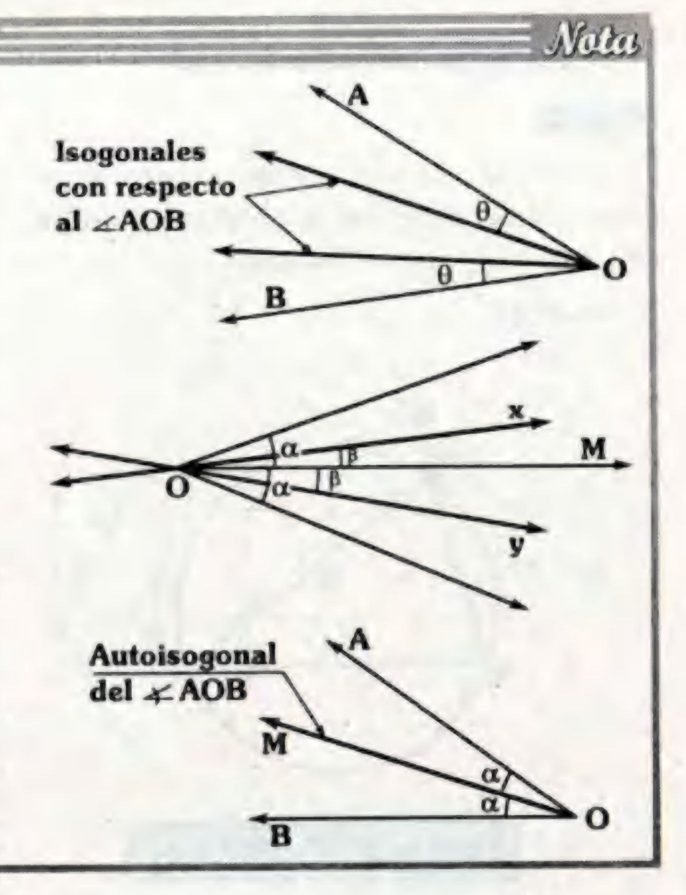
**Nota**

- Las isogonales con respecto a un ángulo forman ángulos de igual medida con los lados del ángulo.

- Las isogonales con relación a un ángulo son simétricos con respecto a la bisectriz de dicho ángulo.

  Las isogonales $\overleftrightarrow{OX}$ y $\overleftrightarrow{OY}$ son simétricas con respecto a la bisectriz OM.

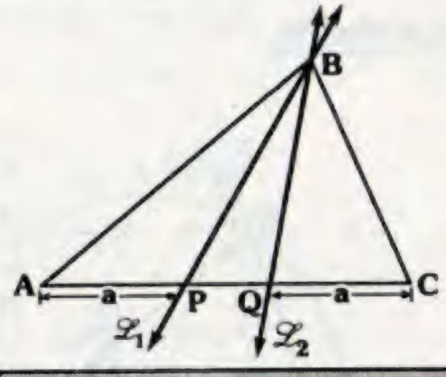
- La bisectriz de un ángulo, también es conocida como la autoisogonal.




## 11.4 RECTAS ISOTÓMICAS

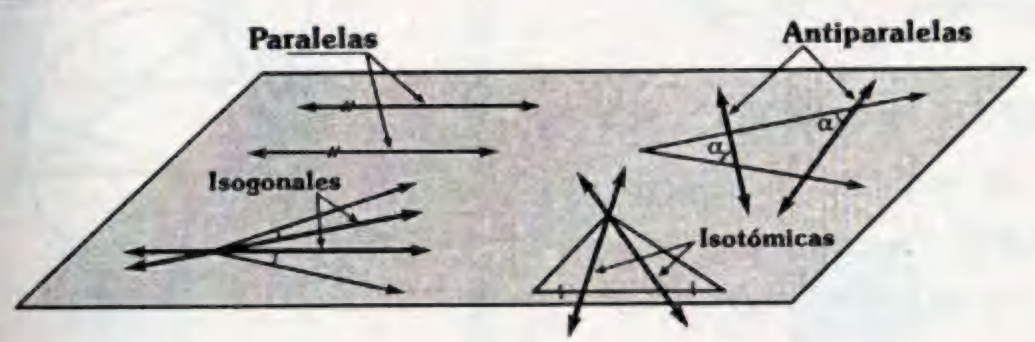
Dos rectas son isotómicas con respecto a un triángulo cuando pasando por un mismo vértice determinan en el lado opuesto dos segmentos extremos de igual longitud.

Si AP=QC=a




⇒ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son isotómicas con respecto $\Delta ABC$.

**En resumen:**

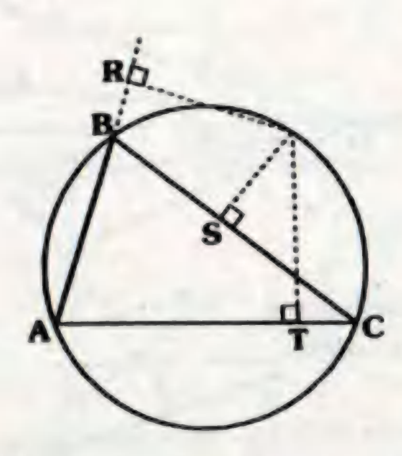


## 11.5 RECTA DE SIMSON - WALLACE

**TEOREMA**

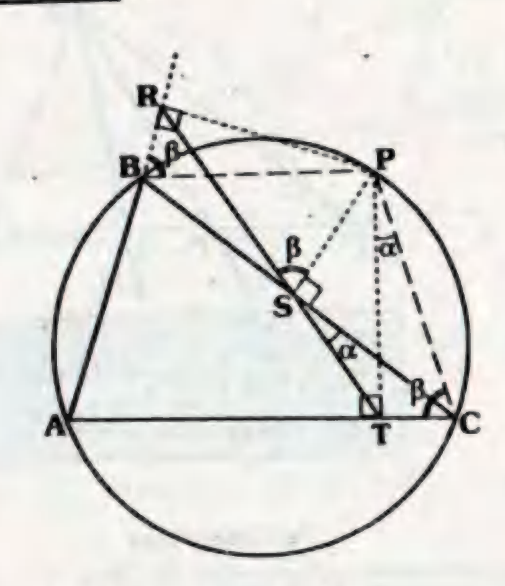
En todo triángulo las proyecciones de un punto de la circunferencia circunscrita hacia los lados son colineales.

Se cumple:




**R, S y T: Colineales**

**Demostración:**




- ⌂SPCT: Inscriptible

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle TSC = m\measuredangle TPC = \alpha$

- ⌂ABPC: Inscrito

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle RBP = m\measuredangle PCA = \beta$

- ⌂BRPS: Inscriptible

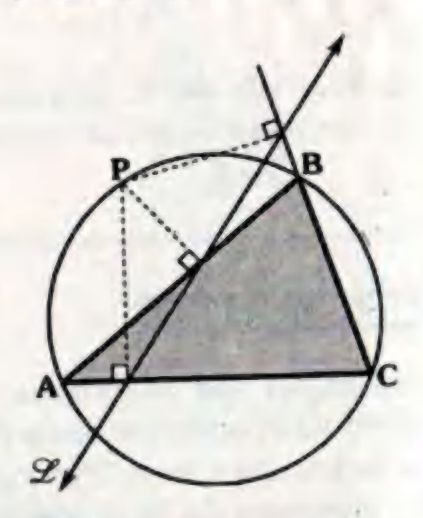
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle RBP = m\measuredangle RSP = \beta$

- ◺PTC : $\alpha + \beta = 90°$, con lo cual en "S" : $\alpha + 90° + \beta = 180°$ .

  $\therefore$ R, S y T son colineales

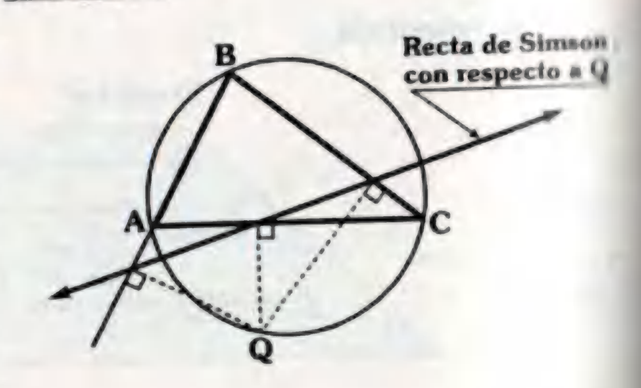
**RECTA SIMSON**

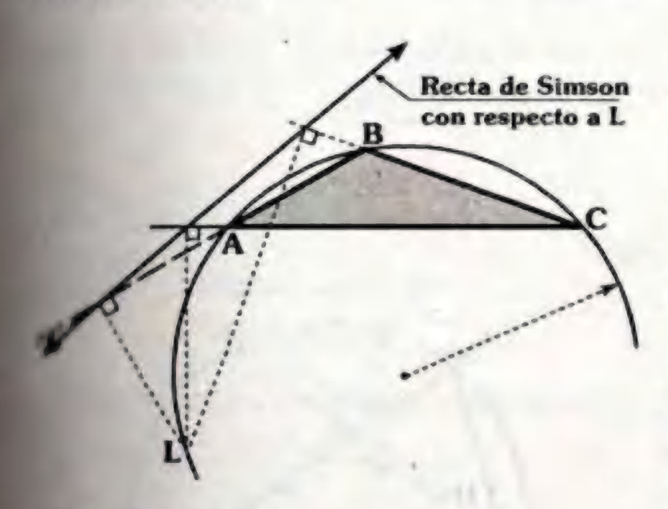
Es la recta que pasa por las proyecciones de un punto de la circunferencia circunscrita a los lados de un triángulo.



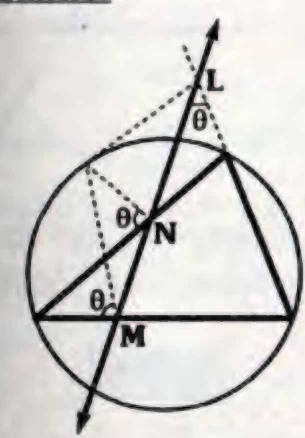

**$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: Recta de Simson del $\Delta ABC$, con respecto a P.**

**También:**






**Generalizando:**



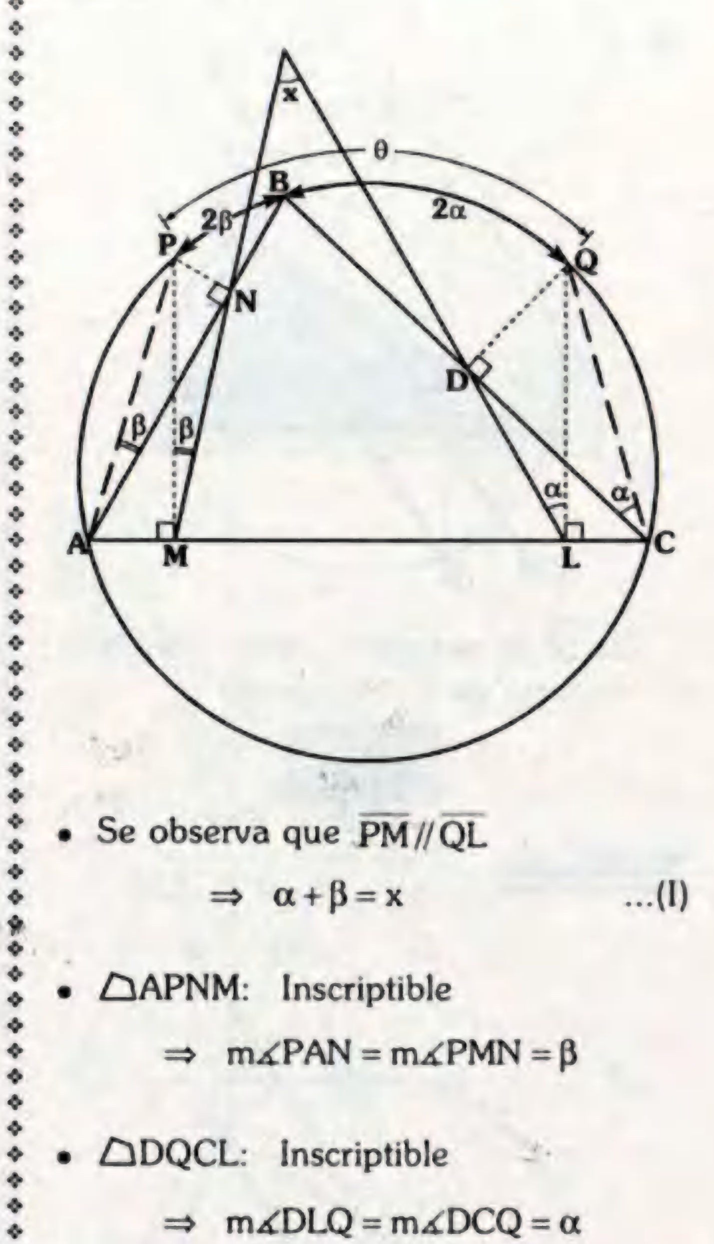

**M, N, L son colineales**

### 11.8.1 ÁNGULO ENTRE LAS RECTAS DE SIMSON




$$x = \frac{\theta}{2}$$

*Demostración:*




- Se observa que $\overline{PM} // \overline{QL}$

$$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = x \qquad ...(I)$$

- ⏢APNM: Inscriptible

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle PAN = m\measuredangle PMN = \beta$$

- ⏢DQCL: Inscriptible

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle DLQ = m\measuredangle DCQ = \alpha$$

- Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{PB} = 2\beta \quad y \quad m\widehat{BQ} = 2\alpha$$

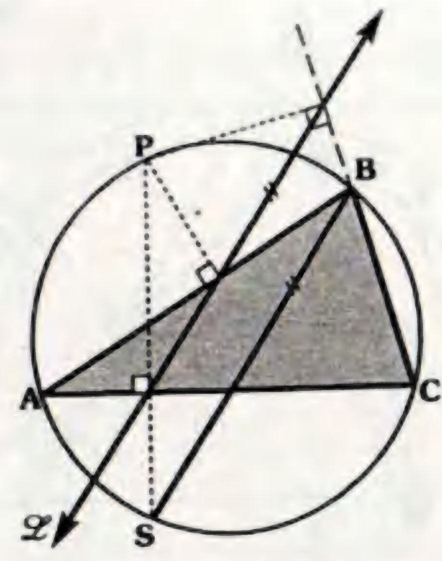
- Como: $2\alpha + 2\beta = \theta$ ...(II)

- De (I) y (II):

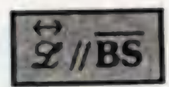
$$\therefore \quad x = \frac{\theta}{2}$$

## 11.5.2 PROPIEDADES

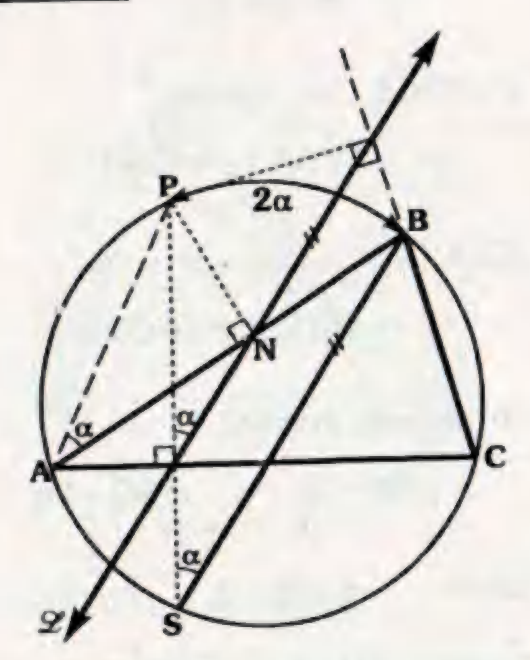





Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es recta de Simson del $\Delta ABC$, respecto de P. Se cumple :




**Demostración:**




- ⏢APNL: Inscriptible

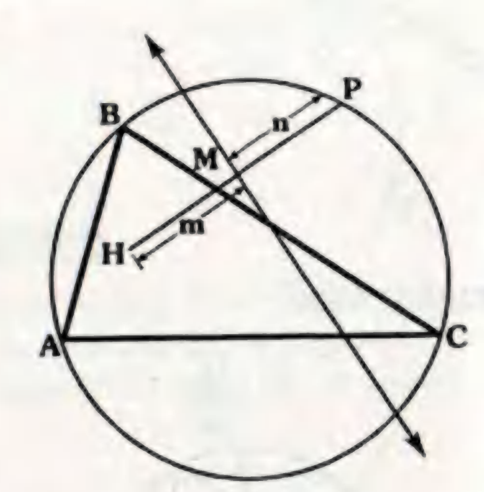
  $\Rightarrow \quad m\measuredangle PAN = m\measuredangle PLN = \alpha$

- Por ángulo inscrito:

  $m\measuredangle PSB = \alpha$

  $\therefore \quad \overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{BS}$

**2**

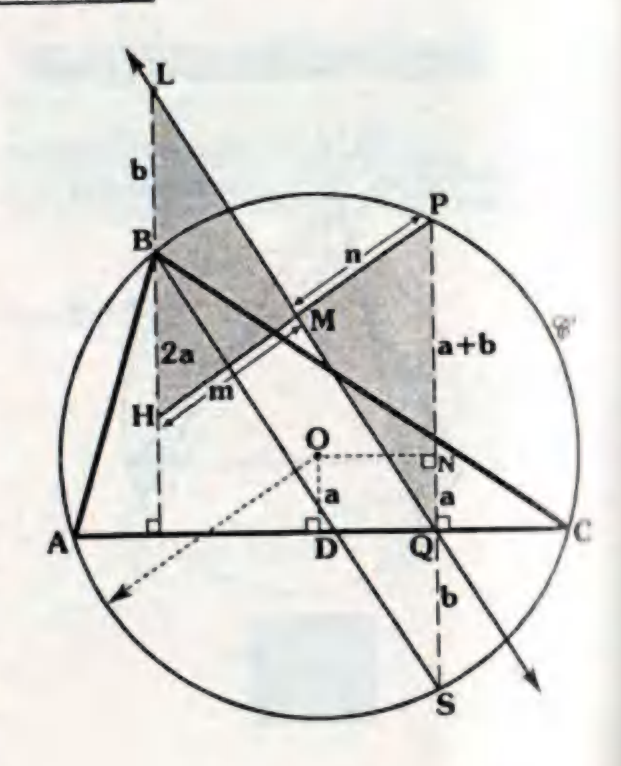



Si H : ortocentro del $\Delta ABC$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ recta de Simson del $\Delta ABC$, respecto a P.

**m = n**

**Demostración:**

**Método 1**



- Trazamos $\overline{PQ}$ cuya prolongación corta a $\mathscr{C}$ en S.
- De la propiedad anterior : $\overline{BS} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$
- BLQS: Paralelogramo

$\Rightarrow$ QS = BL = b

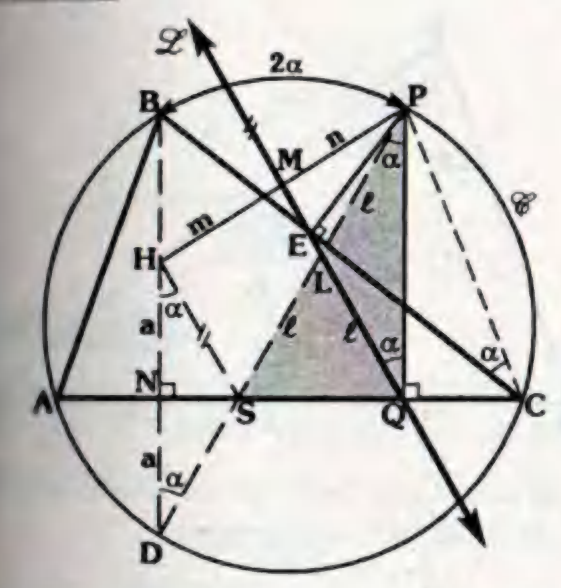
- Ubicamos el circuncentro O del ABC y trazamos $\overline{OD} \perp \overline{AC}$.
- Por el teorema 8.6: BH = 2a
- ODQN: Rectángulo

$\Rightarrow$ NQ = a

- Por teorema: NP = NS = a + b
- $\Delta HLM \cong \Delta MPQ$ (ALA), se tiene.

$\therefore$ m = n

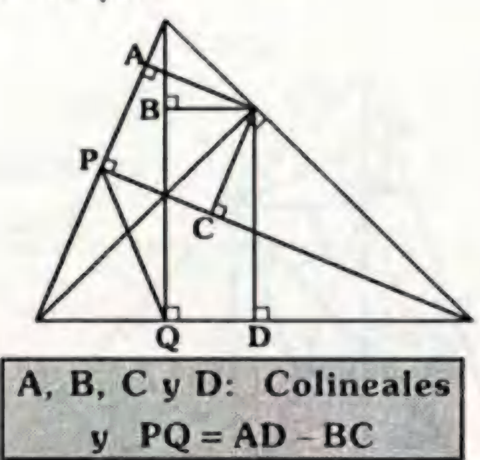
**Método 2**




- Prolongamos $\overline{BN}$ hasta D, por el teorema 8.5: HN=ND=a
- $\Delta PQS$: PL = LQ = $\ell$ $\Rightarrow$ SL = $\ell$
- $\overline{ML}$: Base media del $\Delta PHS$.

$\therefore$ m = n

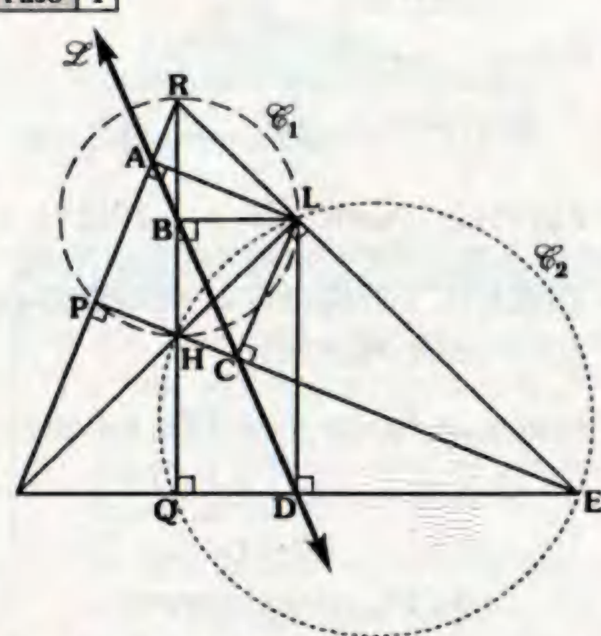
**3** Se cumple:




**A, B, C y D: Colineales y PQ = AD − BC**

**Demostración:**

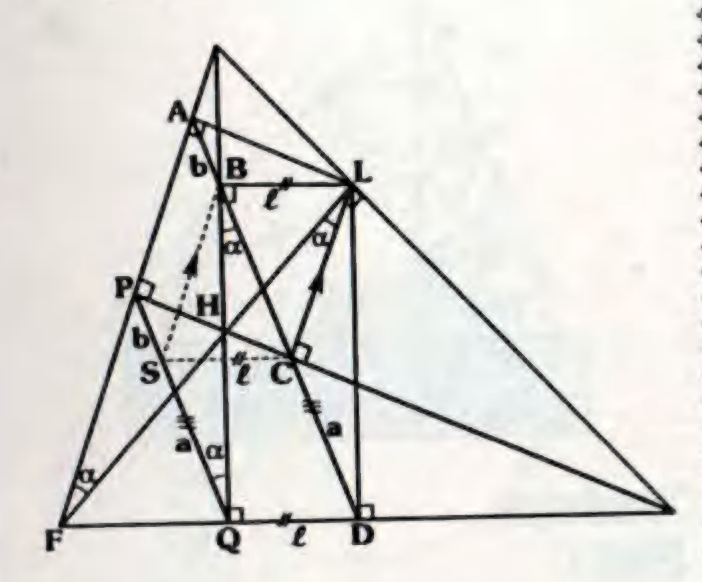
**Paso 1**




- ⏢RPHL: Inscriptible, con lo cual se observa que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Simson del $\Delta PRH$, respecto a L (A, B y C son colineales) en $\mathscr{C}_1$.
- Análogamente, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Simson del $\Delta HQE$, respecto a L (B, C y D son colineales) en $\mathscr{C}_2$.

$\therefore$ A, B, C y D son colineales.

**Paso 2**




- Como:

$$\overline{PF} // \overline{LC} \Rightarrow m\measuredangle PFL = m\measuredangle FLC = \alpha$$

- $\square$FPHQ: Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle PQH = \alpha$

- $\square$BLCH: Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle HBC = \alpha$, con lo cual $\overline{PQ} // \overline{AD}$.

- Luego ubicamos S en $\overline{PQ}$, tal que

$$\overline{SC} // \overline{QD} \Rightarrow SC = QD = \ell \quad y$$
$$SQ = DC = a$$
(SCDQ *paralelogramo*)

- BLDQ: Rectángulo $\Rightarrow BL = QD = \ell$

- Puesto que $\overline{SC} // \overline{BL}$ y $SC = BL = \ell$ $\Rightarrow \overline{BS} // \overline{CL}$ (SCLB: *paralelogramo*)

- ABSP: Paralelogramo

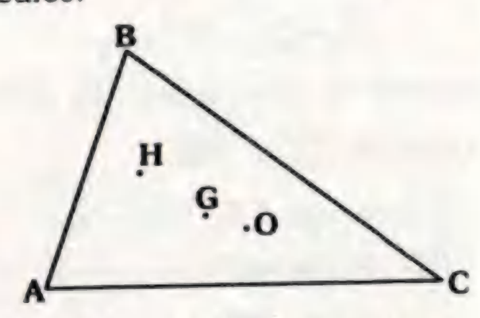
$$\Rightarrow PS = AB = b$$

$$\therefore \quad PQ = AD - BC$$

## 11.6 RECTA DE EULER

### TEOREMA

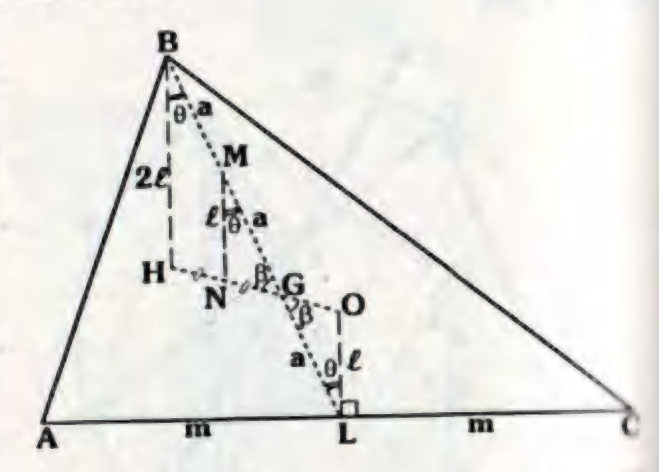
El ortocentro, baricentro y circuncentro, de un triángulo no equilátero, son colineales.




Para el $\Delta$ABC : H: Ortocentro
G: Baricentro ; O: Circuncentro

**H, G y O son colineales**

***Demostración:***




- Como G es baricentro, entonces $\overline{BL}$ es mediana, así tenemos:

$$AL = LC = m \quad y \quad BG = 2(GL) = 2a$$

- Por el teorema 8.4 (B):

$$m\measuredangle OLC = 90°$$

- Por el teorema 8.6 (A):

$$BH = 2(OL) = 2\ell$$

- Luego trazamos la base media MN del $\Delta BHG$ (BM = MG = a).

$\Rightarrow MN = \ell$ y $\overline{MN} // \overline{BH}$

- $\Delta MNG \cong \Delta GOL$ (LAL)

$\Rightarrow m\measuredangle MGN = m\measuredangle LGO = \beta$

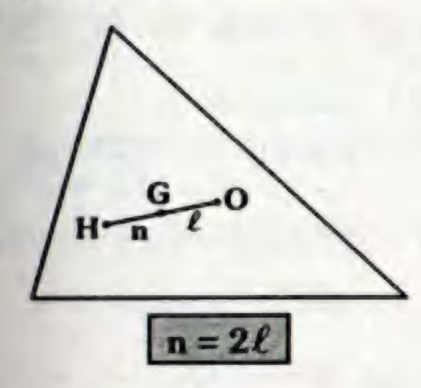
$\therefore$ H, G y O son colineales

Además: HG=2(GO)

### COROLARIO

En todo triángulo no equilátero, la distancia del ortocentro al baricentro es el doble de la distancia del circuncentro al baricentro.

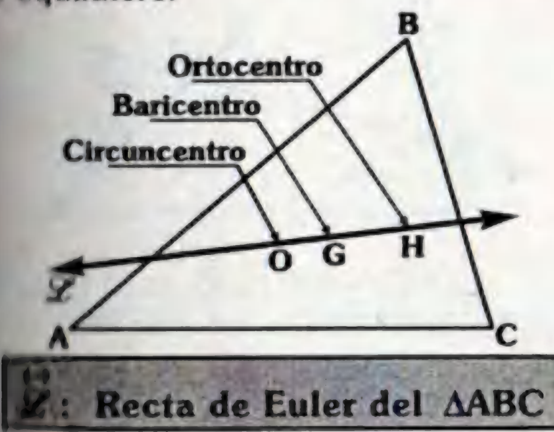
Se cumple:




$n = 2\ell$

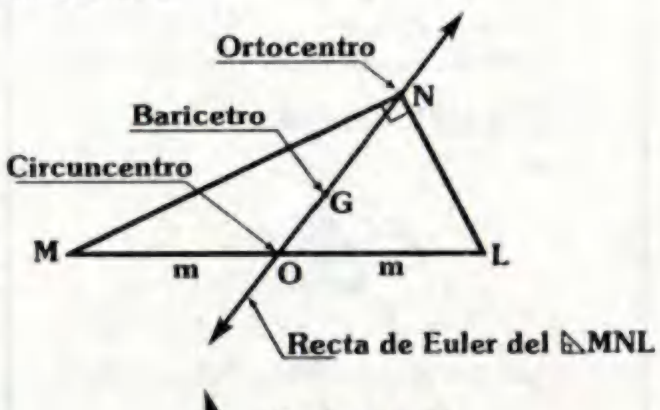
### RECTA DE EULER

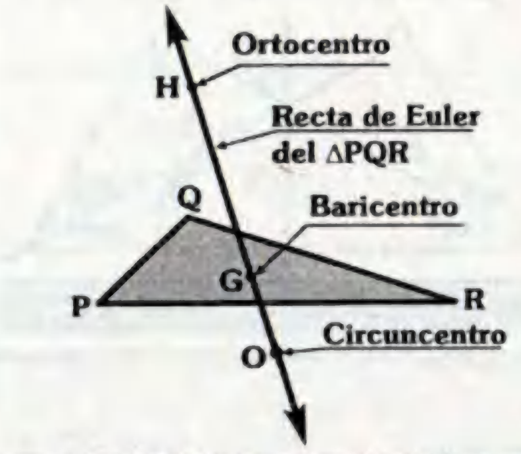
Es la recta que pasa por el circuncentro, baricentro y ortocentro de un triángulo no equilátero.




$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ : Recta de Euler del $\Delta ABC$

**También:**

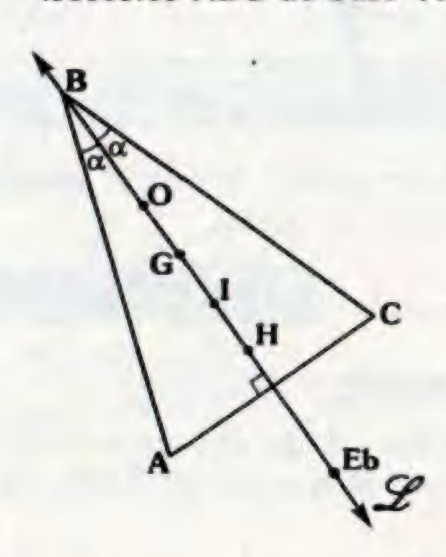



**Nota**

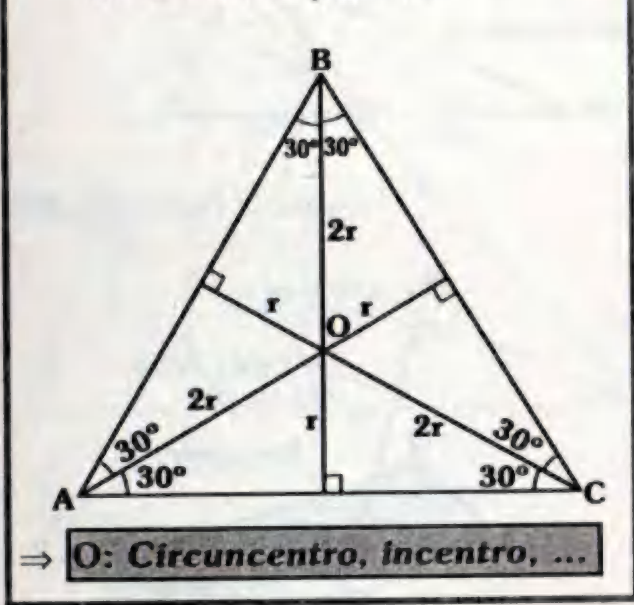
- *En todo triángulo isósceles, el circuncentro, baricentro, incentro, ortocentro y el excentro relativo a la base, son colineales (recta de Euler).*

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ : *Recta de Euler del triángulo isósceles ABC de base* $\overline{AC}$.



- *Para todo triángulo equilátero el circuncentro, baricentro, incentro y baricentro, coinciden.*

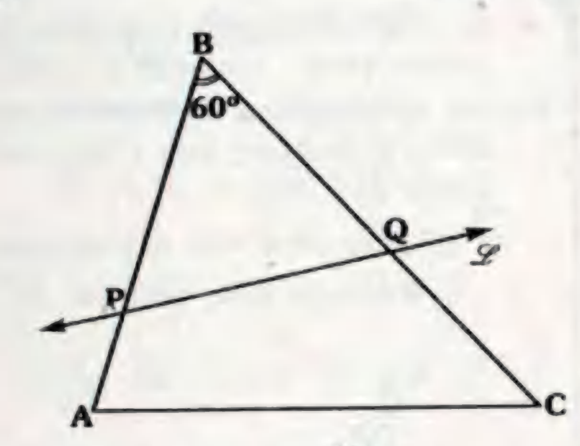
*Si* $\Delta ABC$ *: Equilátero*




⇒ **O: Circuncentro, incentro, ...**

**PROPIEDADES**



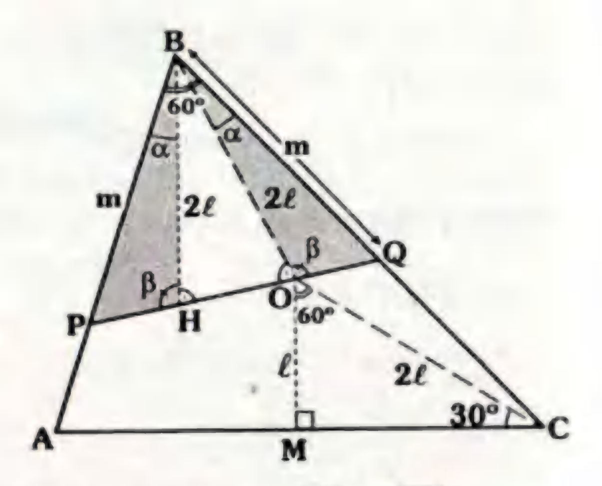



Si: $m\measuredangle ABC = 60^\circ$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Euler del $\Delta ABC$.

⇒ **$\Delta PBQ$ : Equilátero**

**Demostración:**

- Ubicamos el ortocentro H y circuncentro O del $\Delta ABC$.




- Luego trazamos $\overline{OM} \perp \overline{AC}$
- Por el teorema 8.6: $BH = 2(OM) = 2\ell$
- Puesto que O es circuncentro:

  $\Rightarrow \; m\measuredangle MOC = m\measuredangle ABC = 60^\circ$ y

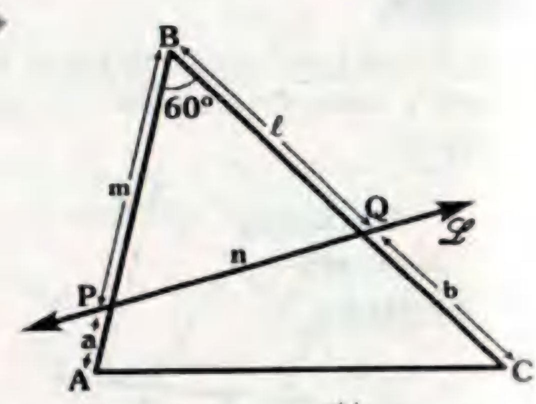
  $OC = OB$
- ⊿MOC: Notable ⇒ $OC = 2\ell$
- $\Delta BHO$ : Isósceles

  $\Rightarrow \; m\measuredangle BHP = m\measuredangle BOQ = \beta$
- $\Delta BHP \cong \Delta BOQ$ (ALA) ⇒ $BP = BQ = m$

  ∴ $\Delta BPQ$ es equilátero.

Además: $PH = OQ$

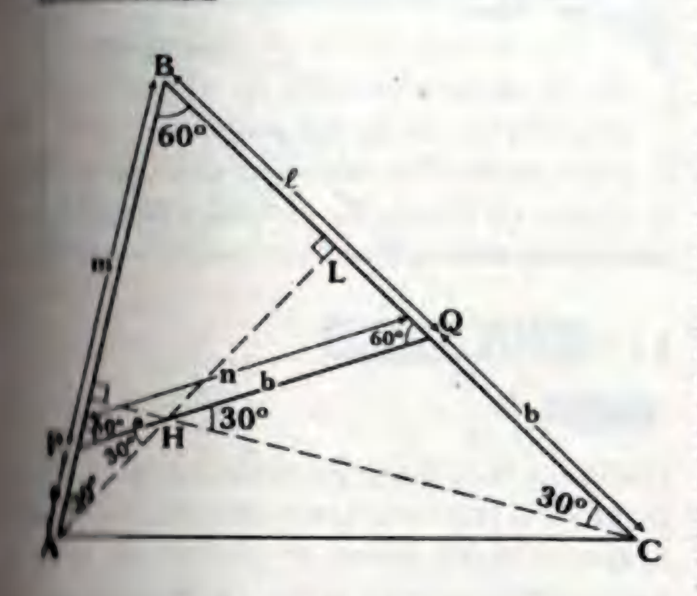
② 




Si $m\measuredangle ABC = 60^\circ$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Euler del $\Delta ABC$.

⇒ **$m = n = \ell = a + b$**

Demostración:



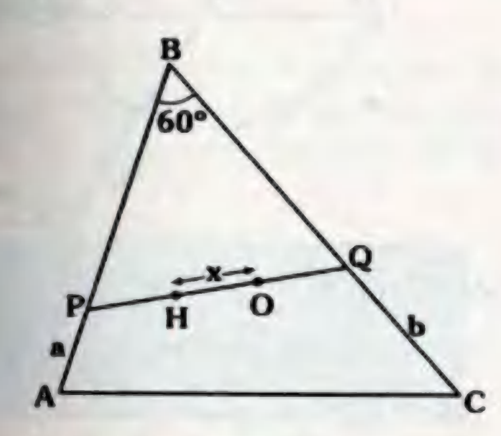

- Por la propiedad anterior:

$$m = n = \ell \quad y \quad m\measuredangle BPQ = 60°$$

- Ubicamos el ortocentro H, con lo cual $\overline{AL}$ es altura $\Rightarrow$ $m\measuredangle BAL = 30°$.

- $\triangle APH$ : Isósceles $\Rightarrow PH = a$ , del mismo modo: $HQ = b$

$$\therefore \; m = \ell = n = a + b$$

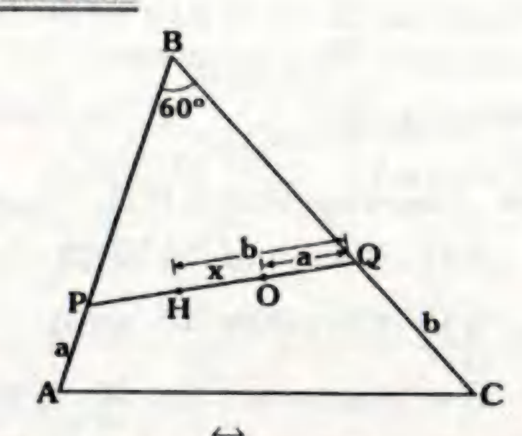



Si: $m\measuredangle ABC = 60°$ ,

H: Ortocentro y O: Circuncentro.

$\Rightarrow$ $\boxed{x = b - a}$

Demostración:




- Se sabe que $\overleftrightarrow{HO}$ es la recta de Euler.
- De las propiedades anteriores

$$PH = a\,, \quad HQ = b \quad y \quad OQ = a$$

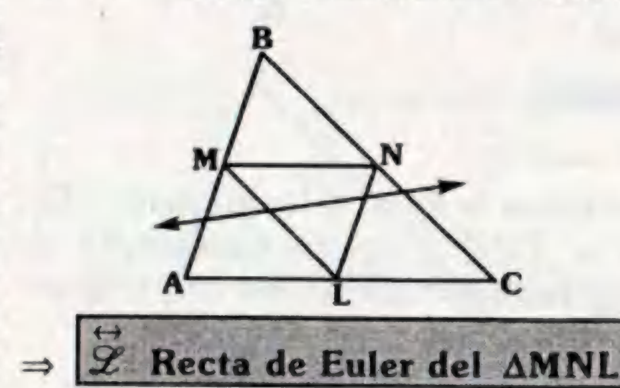
$$\therefore \; x = b - a$$

**TEOREMA**

La recta de Euler de todo triángulo es también la recta de Euler de su respectivo triángulo mediano.

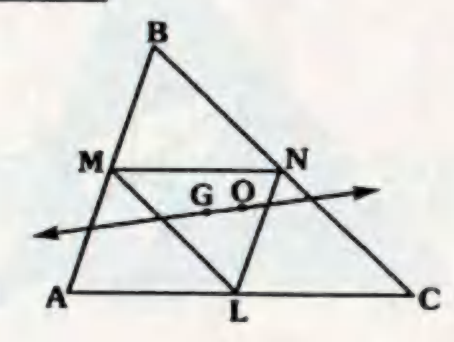
Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ : Recta de Euler del $\triangle ABC$ y

$\triangle MNL$ : Triángulo mediano del $\triangle ABC$ .




$\Rightarrow$ $\boxed{\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \text{ Recta de Euler del } \triangle MNL.}$

Demostración:



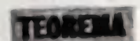
- Puesto que $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Euler, el baricentro (G) y circuncentro (O) se ubican en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

- Por el teorema 10.2 y 10.3:

  $\Rightarrow$ G: Baricentro del $\triangle MNL$.

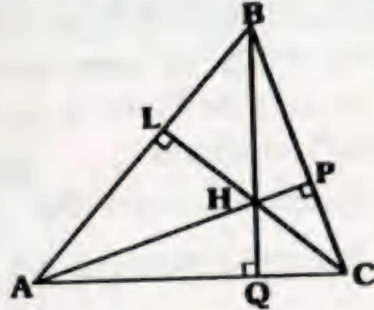
  y O: Ortocentro del $\triangle MNL$.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Euler del $\triangle MNL$.




Se cumple:

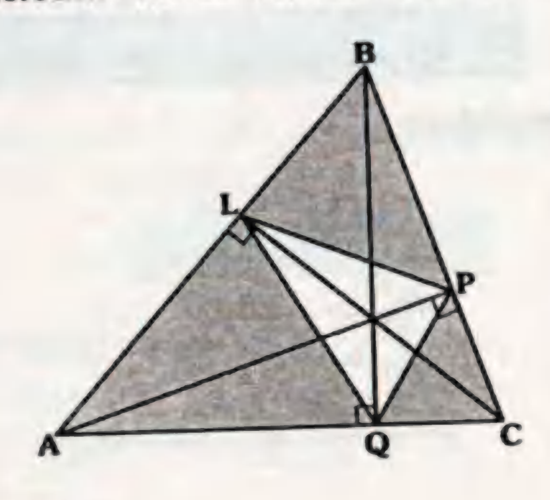
Las rectas de Euler de los triángulos ABH, BCH, ACH y ABC son concurrentes.

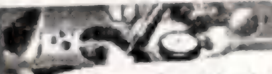



**TEOREMA**

Se cumple:

Las rectas de Euler de los triángulos AQL, BPL, CPQ y la circunferencia de Feuerbach del $\triangle ABC$, son concurrentes.



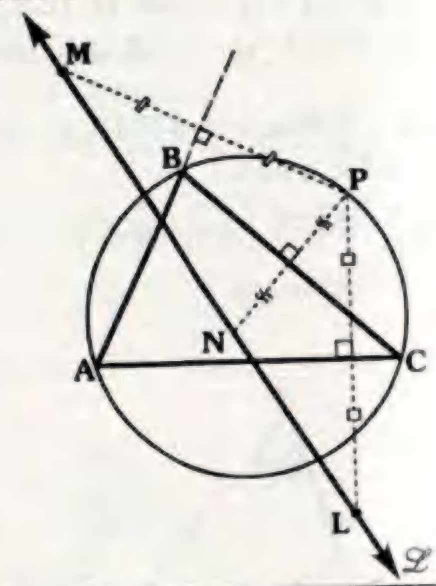

*La demostración de este teorema la desarrollaremos en el capítulo denominado temas selectos. También estarán incluídos las demostraciones de Rectas de Housel y Nagel.*

## 11.7 RECTA DE STEINER

**TEOREMA**

Dado un triángulo, los simétricos de un punto de la circunferencia circunscrita respecto a los lados se ubican en una recta denominada recta de Steiner.

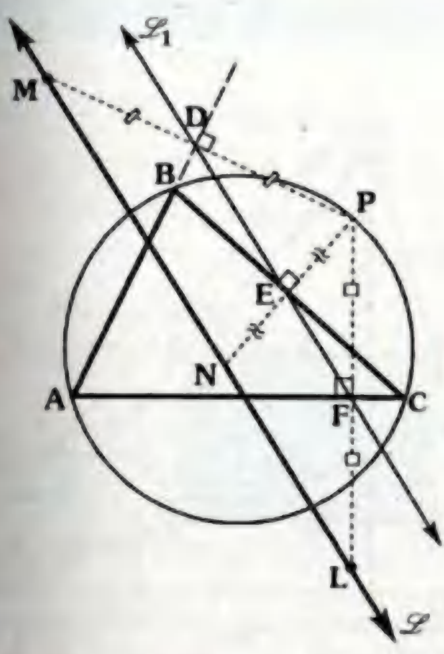
Si, M, N y L son simétricos de P respecto a los lados AB, BC y AC respectivamente.




$\Rightarrow$ **M, N y L colineales y**
**$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: Recta de Steiner, respecto a P.**

**Demostración:**

- Sabemos: D, E y F son colineales ($\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$: recta de Simson).



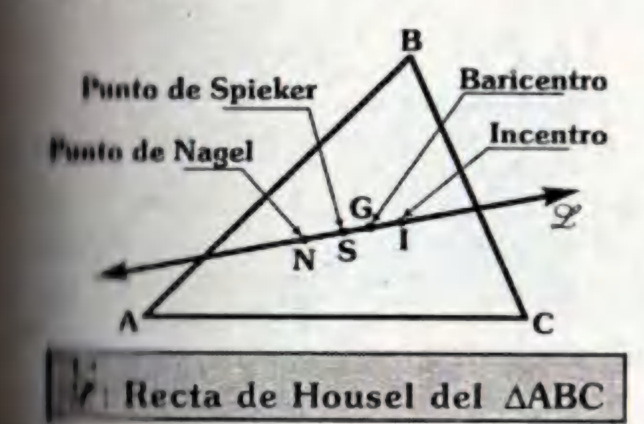

- EF: Base media $\Delta NPL \Rightarrow \overline{NL} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$
- FD: Base media $\Delta MNP \Rightarrow \overline{MN} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$
- Por postulado de N solo podemos trazar una recta paralela.

  $\therefore$ M, N y L son colineales.

## 11.8 RECTA DE HOUSEL

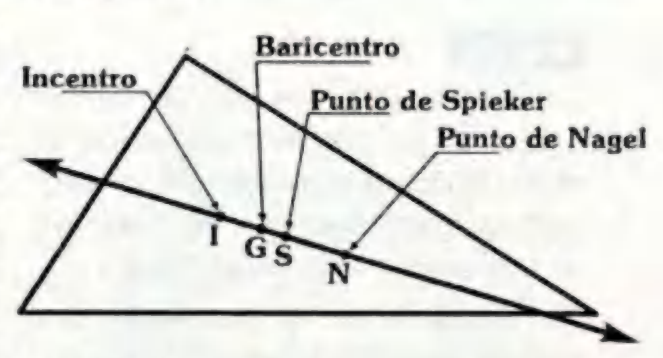
### TEOREMA

El incentro, baricentro, el punto de Nagel y el punto de Spieker, de un triángulo, se ubican en una recta denominada recta de Housel.




**$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: Recta de Housel del $\Delta ABC$**

### PROPIEDADES



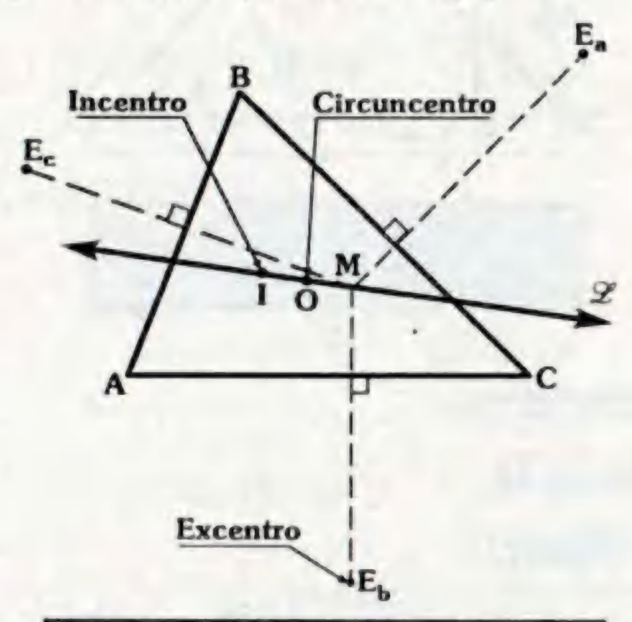

Se cumple:

$$IS = SN, \quad GN = 2(GI)$$
$$y \quad (IG)(SN) = (GS)(IN)$$

## 11.9 RECTA DE NAGEL

### TEOREMA

El incentro, el circuncentro y el punto de concurrencia de las perpendiculares trazadas desde los excentros a los lados del triángulo, se encuentran en una recta conocida como la recta de Nagel.




**$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: Recta de Nagel del $\Delta ABC$**

Además: $IO = OM$

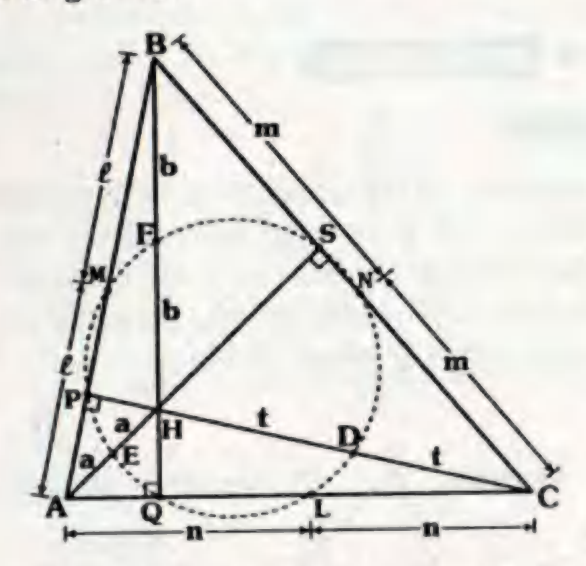
# 12. CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS

## 12.1 TEOREMA

En un triángulo los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices con el ortocentro son concíclicos.

La circunferencia que pasa por dichos puntos se denomina circunferencia de los nueve puntos, circunferencia de Euler o de Feuerbach.

En el gráfico:



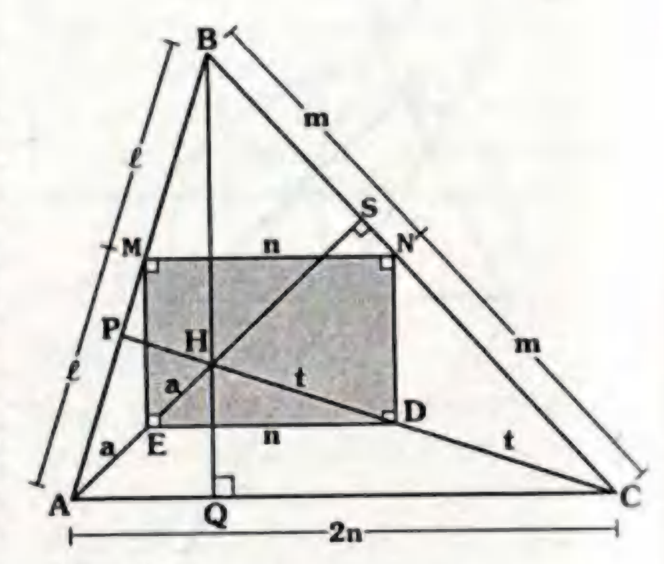

**M, N, L, P, Q, S, E, F y D: Concíclicos**

***Demostración:***

**Método 1**

**Paso 1**

- En el $\Delta ABC$, $\Delta AHC$, $\Delta AHB$ y $\Delta BHC$ se tiene: $\overline{MN}$, $\overline{ED}$, $\overline{EM}$, $\overline{ND}$ son bases medias respectivamente.




- Por teorema:

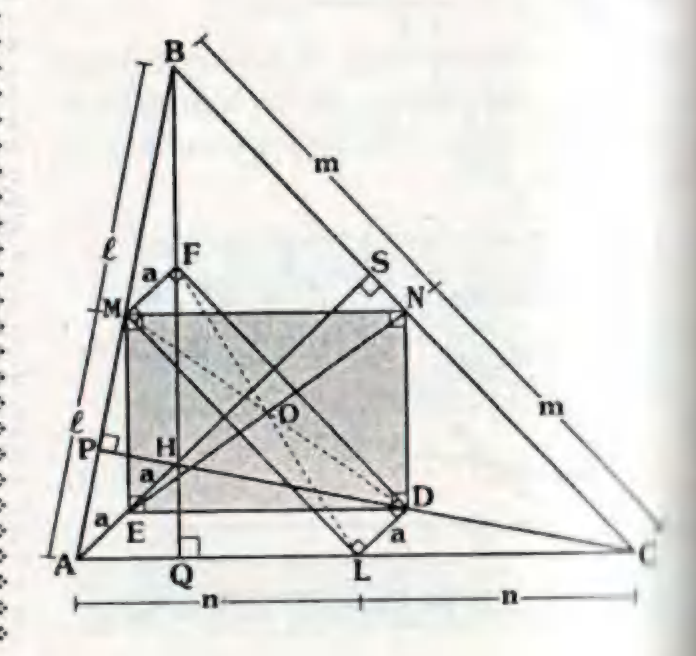
$\overline{MN} // \overline{AC}$ y $\overline{ED} // \overline{AC} \Rightarrow \overline{MN} // \overline{ED}$

$\overline{EM} // \overline{HB}$ y $\overline{DN} // \overline{HB} \Rightarrow \overline{EM} // \overline{DN}$

- Pero: $\overline{HB} \perp \overline{AC} \Rightarrow \overline{EM} \perp \overline{MN}$

$\Rightarrow$ EMND es rectángulo

**Paso 2**

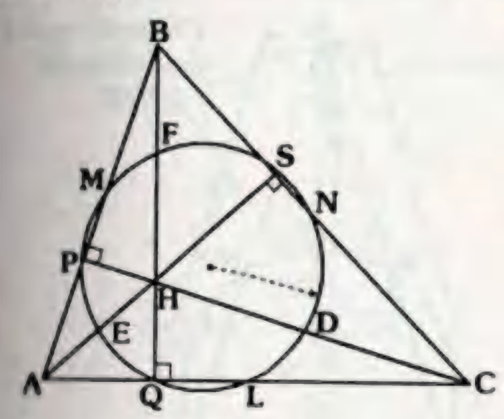


- En forma similar al anterior, MFDL es también rectángulo.
- Además $\overline{MD}$ es diagonal para ambos rectángulos (MFDL y EMND), luego $\overline{FL}$, $\overline{EN}$ y $\overline{MD}$ concurren en O (punto medio de dichas diagonales).
- Con ello tenemos que O equidista de E, M, F, N, D y L.
- En los triángulos rectángulos FQL, ESN y MPD, O es punto medio de $\overline{FL}$, $\overline{EN}$ y $\overline{MD}$ (hipotenusas de dichos triángulos rectángulos).
- Por teorema del ⊾: O equidista de P, Q y S, debido a que $EN = MD = FL$.

  ∴ E, M, N, D, F, L, P, Q y S son concíclicos.

**Método 2**

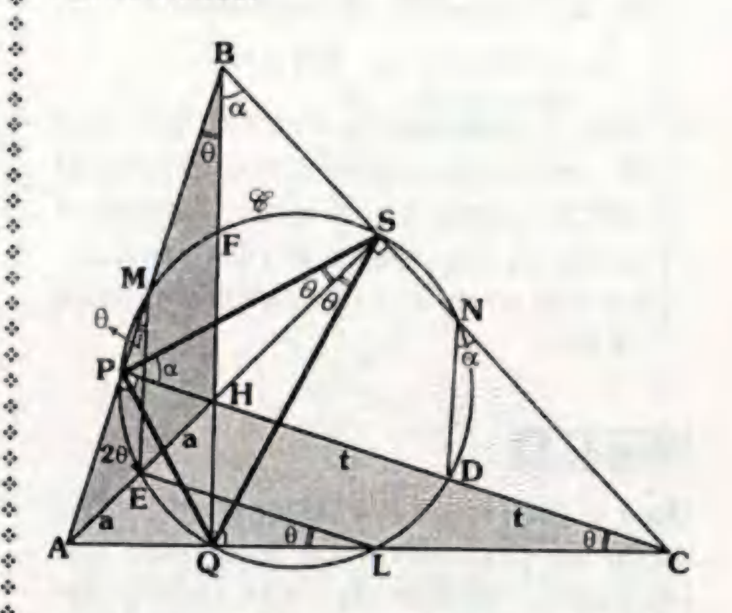
Otra forma para verificar el teorema, sería trazar la circunferencia que pasa por los pies de las alturas y comprobar que los otros puntos están sobre dicha circunferencia.




En el gráfico P, Q y S son pies de las alturas, se ha trazado la circunferencia que pasa por P, Q y S, vamos a demostrar:

$$AM = MB\ ,\ BN = NC\ \ y\ \ AL = LC$$
$$AE = EH\ ,\ BF = FH\ \ y\ \ HD = DC$$

Así tenemos:




- $\Delta PQS$ es triángulo órtico de $\Delta ABC$.
- Por teorema 10.5 y 10.6 se tiene:
  - H es incentro del $\Delta PQS$.
  - A, B y C son excentros de $\Delta PQS$.
  - Notar que 𝒞 es la circunferencia circunscrita al $\Delta PQS$.
- Por teorema 8.3-B:

  $$AE = EH\ ,\ HD = DC\ \ y\ \ HF = FB$$

- ⏢PBSH: Inscriptible

  $$\Rightarrow\ m\measuredangle PSH = m\measuredangle PBH = \theta$$

- Por ángulo inscrito: $m\overset{\frown}{EP} = 2\theta$

  $$\Rightarrow\ m\measuredangle PME = \theta$$

- En $\Delta AHB$: $\overline{ME} \parallel \overline{BH}$ y debido a que $AE = EH$ se concluye $\overline{EM}$ es base media $\Rightarrow AM = MB$.
- En forma análoga:

  En $\Delta AHC$: $\overline{EL}$ es base media $\Rightarrow\ AL = LC$

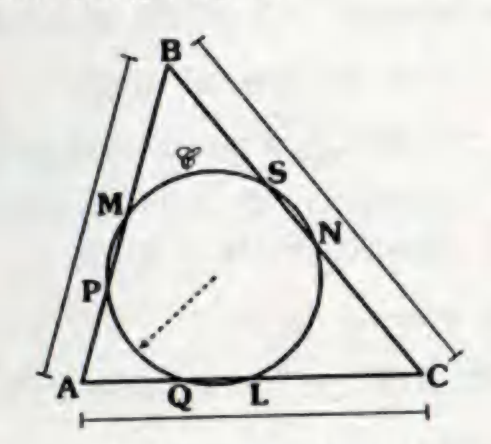
En $\Delta BHC$: $\overline{ND}$ es base media

$\Rightarrow BN = NC$

- Con lo cual queda demostrado que $\mathscr{C}$, circunferencia circunscrita al $\Delta PQS$, corta en el punto medio a los lados del $\Delta ABC$ y a los segmentos que unen el ortocentro con cada vértice.

**Método 3**

Otro método similar al anterior, sería trazar la circunferencia que pasa por los puntos medios de cada lado y demostrar que los otros puntos están sobre esa circunferencia.



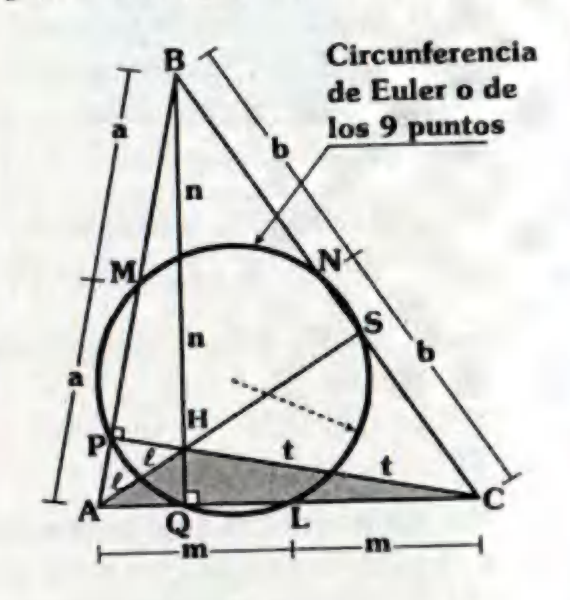

En el gráfico M, N y L son puntos medios de los lados del $\Delta ABC$, $\mathscr{C}$ es la circunferencia que pasa por ellos, se demuestra en forma análoga que P, Q y S son pies de las alturas y que $\mathscr{C}$ pasa por los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro y cada vértice.

**Método 4**

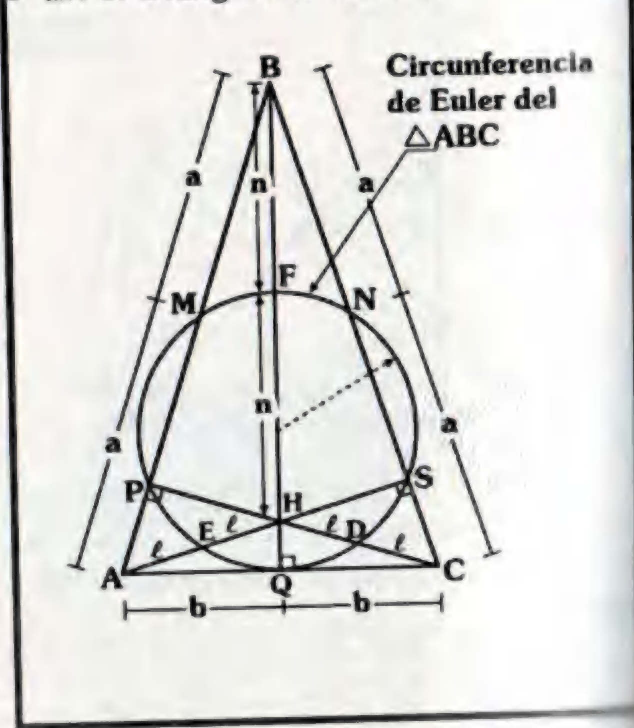
En el capítulo de temas selectos, daremos otra demostración de la circunferencia de los nueve puntos.

**Observaciones**

- *Notar que el triángulo órtico y el triángulo mediano están circunscritos a la circunferencia de Euler.*
- *En el gráfico, la circunferencia de Euler o de los nueve punto del $\Delta ABC$, es la misma para los triángulos AHC, AHB y BHC.*



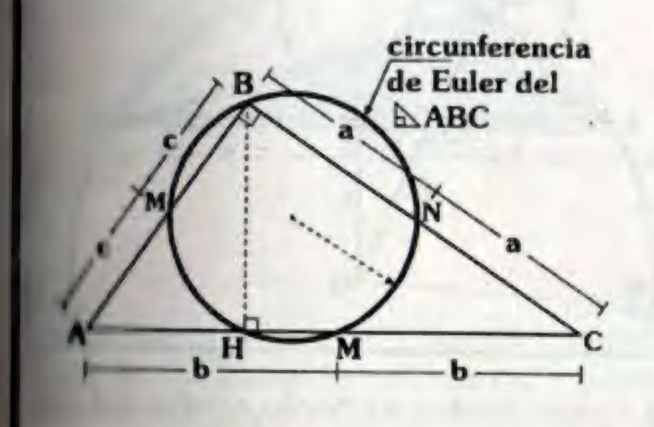

- *En el triángulo isósceles.*



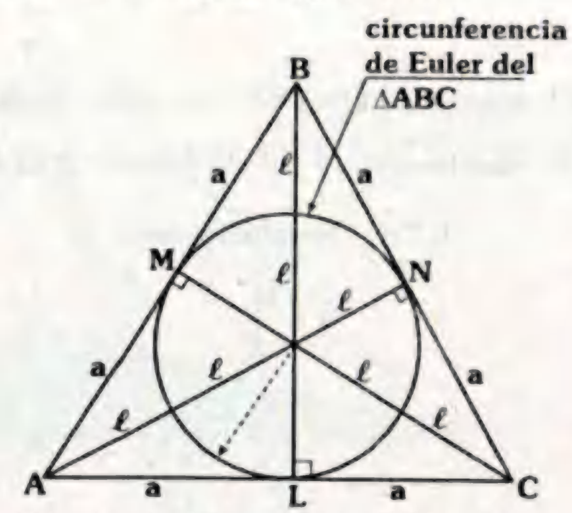
*En el gráfico AB=BC.*

*Se cumple* $\overline{AC}$ *es tangente a la circunferencia de Euler.*

- *En el triángulo rectángulo.*




- *En el triángulo equilátero.*



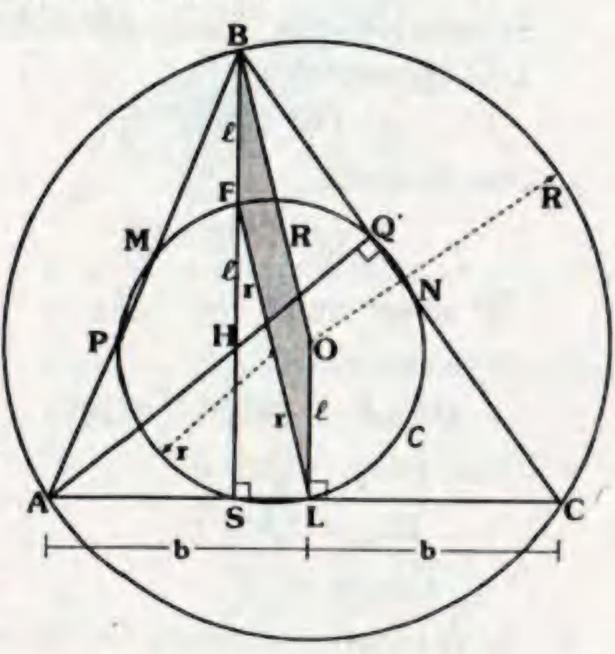

- *En el gráfico el triángulo ABC es equilátero,* $\overline{AB}$ , $\overline{BC}$ *y* $\overline{AC}$ *son tangentes a la circunferencia de Euler, la cual coincide con la circunferencia inscrita.*

## 12.2 TEOREMAS SOBRE LA CIRCUNFERENCIA DE EULER O DE LOS NUEVE PUNTOS

**12.2.1** El radio de la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es la mitad del circunradio de dicho triángulo.

**Demostración:**

- Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia de los nueve puntos del $\Delta ABC$ .




$\overline{BS}$: Altura $\Rightarrow$ $\overline{FL}$ es diámetro de: $\mathscr{C} \Rightarrow FL = 2r$

- Debido a que AL=LC

$\Rightarrow \overline{OL} \perp \overline{AC}$

- Por teorema: $HB = 2(OL)$

$\Rightarrow HF = FB = OL$

- Luego OLFB es un paralelogramo, pues:

$\overline{FB} // \overline{LO}$ y $FB = LO \Rightarrow 2r = R$

$\therefore \quad r = \dfrac{R}{2}$

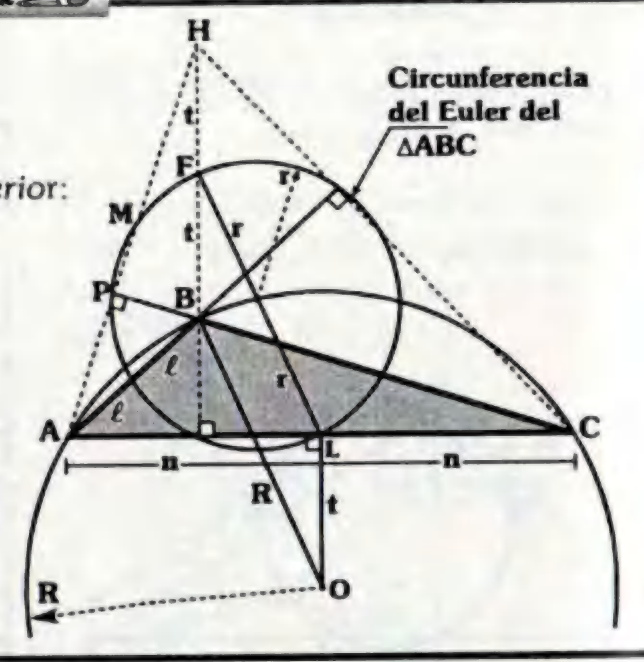
**Observación**

*En el gráfico el* $\Delta ABC$ *es obtusánglo.*

*Se demuestra en forma similar a la anterior:*

OLFB: *Paralelogramo y*

$$r = \frac{R}{2}$$




**12.2.2** El centro de la circunferencia de los nueve puntos es punto medio del segmento que une el ortocentro y circuncentro de un triángulo dado.

**Demostración:**

- En el gráfico sea $\mathscr{C}$ la circunferencia de los nueve puntos del $\Delta ABC$.
- H y O: Ortocentro y circuncentro del $\Delta ABC$, respectivamente.
- Se sabe HE=EB. Como AM=MC y O circuncentro.

  $\Rightarrow \overline{OM} \perp \overline{AC}$
- Por teorema:

  $\Rightarrow OM = HE = EB$

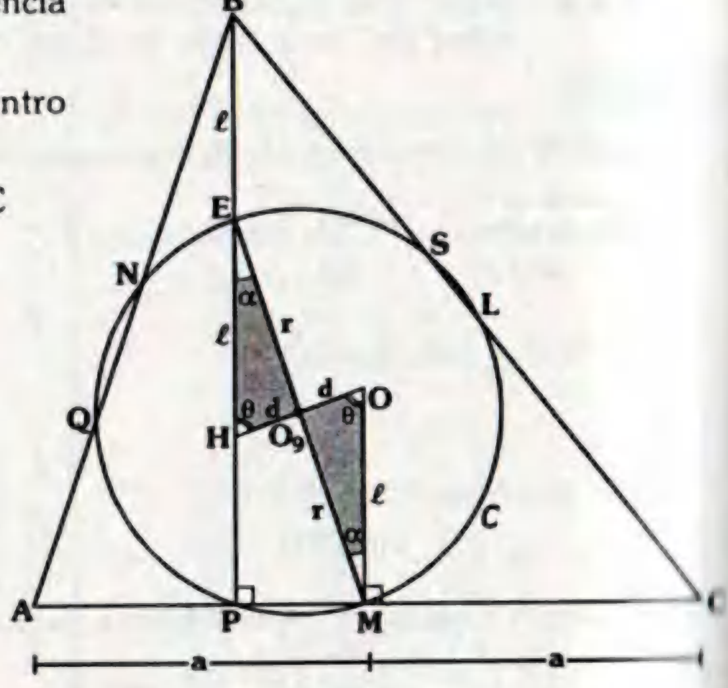
  $\overline{BP}$ al ser altura $\Rightarrow \overline{EM}$: Diámetro de $\mathscr{C}$

  $\Delta HO_9E \cong \Delta OO_9M$ (ALA)

  $\Rightarrow HO_9 = O_9O = d$

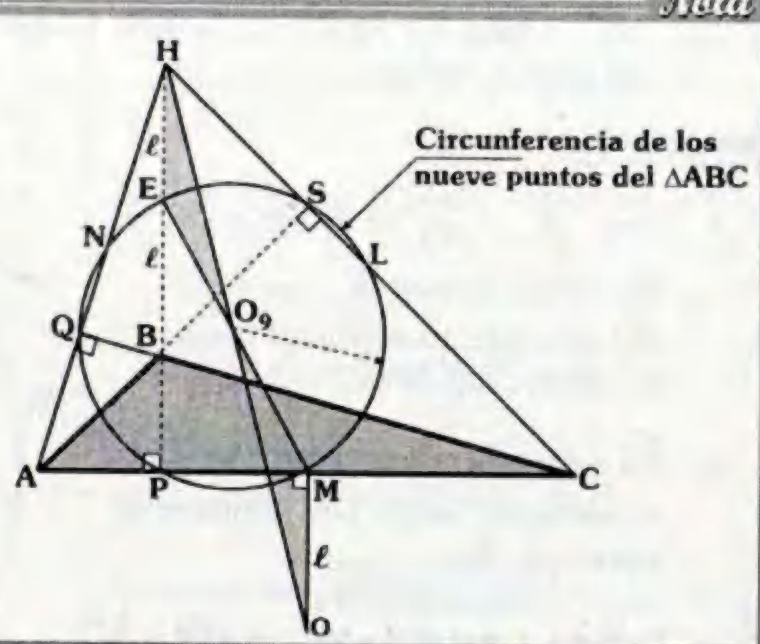
  $EO_9 = O_9M = r$

  $O_9$: Centro de $\mathscr{C}$
- Se demuestra entonces $O_9$ biseca a $\overline{OH}$.

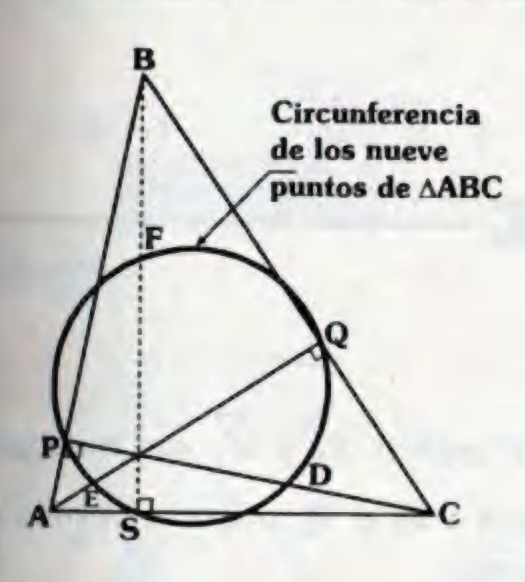


**Nota**

*Si el $\Delta ABC$ es obtusángulo también se demuestra en forma análoga: $OO_9 = O_9H$ donde H es ortocentro, O es circuncentro del $\Delta ABC$ y $O_9$ es centro de la circunferencia de los nueve puntos.*



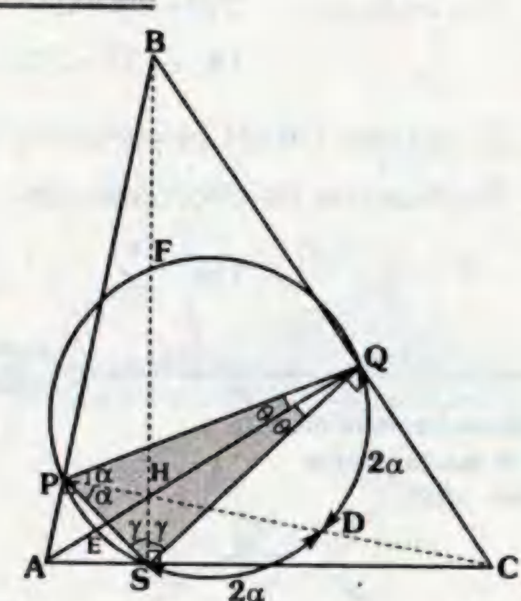

**10.2.3.** La altura de un triángulo biseca al arco, en la circunferencia de los nueve puntos, cuyos extremos son los pies de las otras alturas.




En el gráfico, se cumple:

$m\widehat{PE} = m\widehat{ES}$ ; $m\widehat{PF} = m\widehat{FQ}$ y $m\widehat{QD} = m\widehat{DS}$

**Demostración:**

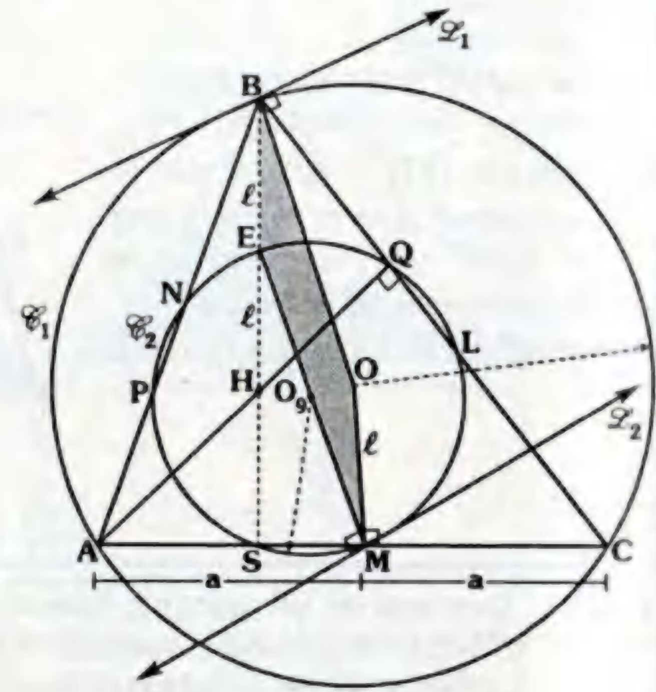



- Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia de los nueve puntos.
- Se observa $\Delta PQS$ es el triángulo órtico del $\Delta ABC$.
- Por teorema 10.5 H es incentro del $\Delta PQS$, por ángulo inscrito:

$$m\widehat{PE} = m\widehat{ES} = 2\theta$$
$$m\widehat{SD} = m\widehat{DQ} = 2\alpha$$
$$m\widehat{PF} = m\widehat{FQ} = 2\gamma$$

**12.2.4** La recta tangente a la circunferencia de los nueve puntos en e punto medio de un lado, es paralela a la recta tangente a la circunferencia circunscrita en el vértice opuesto.

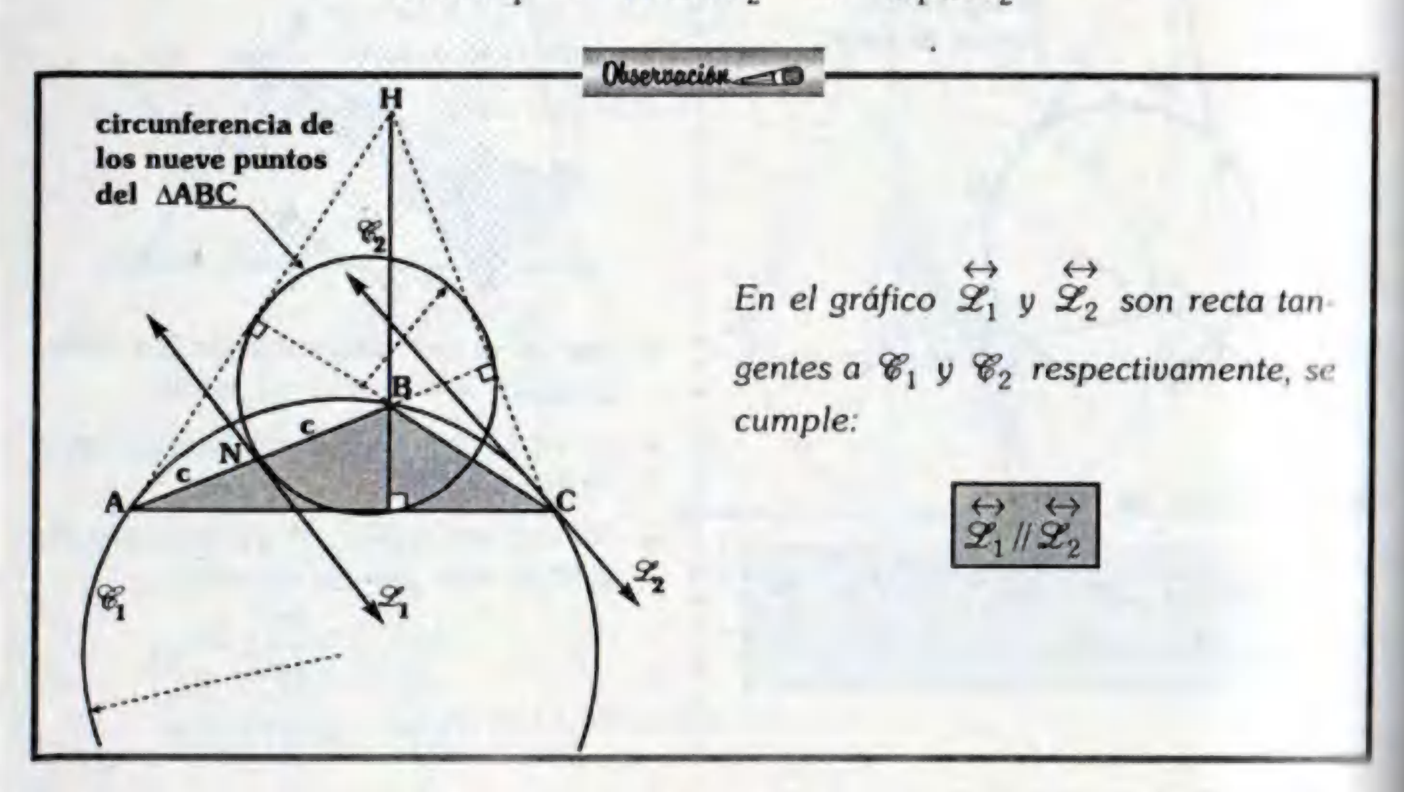
**Demostración:**




- Sea: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ tangente a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ respectivamente.
  $\mathscr{C}_2$ es la circunferencia de los nueve puntos del $\Delta ABC$.
- $\overline{BS}$ : altura y H ortocentro $\Rightarrow$ $\overline{EM}$ es diámetro, luego $\overline{EM}$ contiene al centro de $\mathscr{C}_2$.
- Debido a que AM=MC $\Rightarrow$ $\overline{OM} \perp \overline{AC}$
- Por teorema: HB=2(OM)
  $\Rightarrow$ HE = EB = OM = $\ell$
- Se verifica OBEM es paralelogramo (debido a que EB=OM y $\overline{EB} // \overline{OM}$).
- Por teorema de circunferencia.

$$\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \quad y \quad \overline{EM} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \quad \Rightarrow \quad \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$$

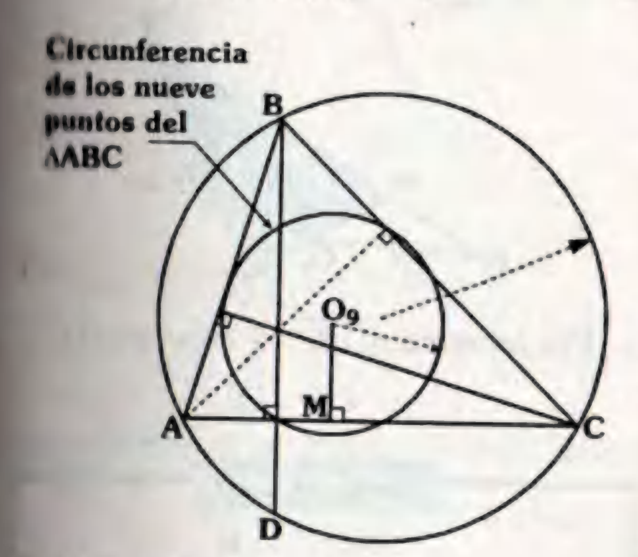
**Observación**




*En el gráfico $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son recta tangentes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ respectivamente, se cumple:*

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$$

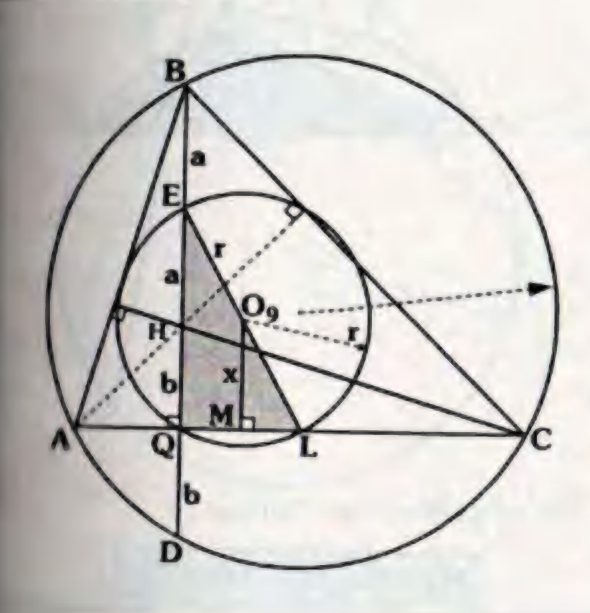
**10.2.5.** La longitud del segmento, cuyos extremos son un vértice de un triángulo y el punto de corte de la prolongación de la altura trazada de dicho vértice hacia un lado con la circunferencia circunscrita, es cuatro veces la distancia del centro de la circunferencia de los nueve puntos hacia dicho lado.




En el gráfico se cumple:

$$BD = 4(O_9M)$$

**Demostración:**

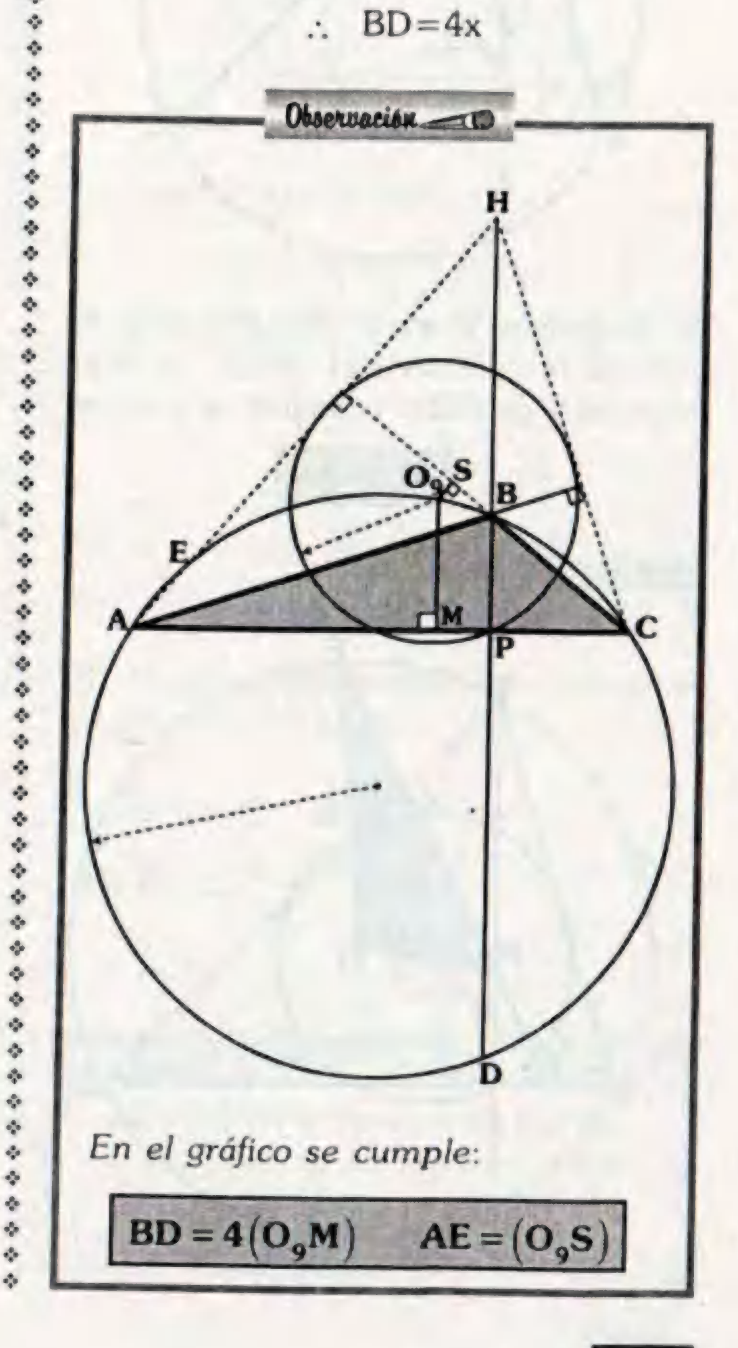



- Debido a que $\mathscr{C}$ es la circunferencia de los nueve puntos, se cumple BE=EH donde H es ortocentro del ΔABC.
- Por teorema 8.5: HQ=QD, como $\overline{BQ}$: altura ⇒ $\overline{EL}$ es diámetro, en ⊿EQL: $\overline{O_9M}$ es base media ⇒ $a+b=2x$.
- Del gráfico: $BD = 2a + 2b$

$$\Rightarrow BD = 2(a+b)$$

$$\therefore BD = 4x$$

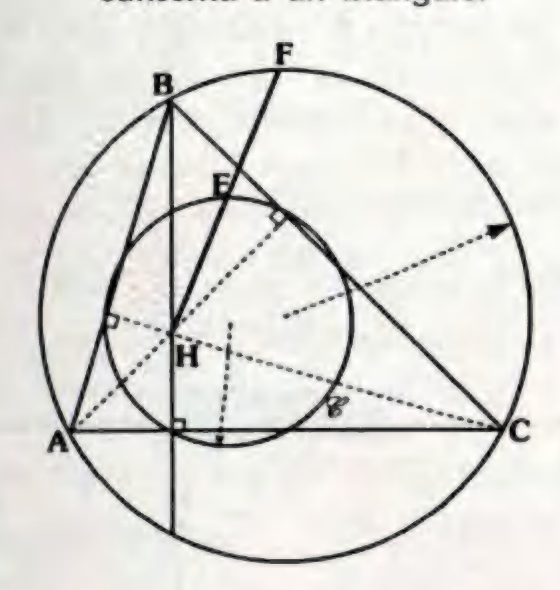
**Observación**




*En el gráfico se cumple:*

$$BD = 4(O_9M) \qquad AE = (O_9S)$$

**12.2.6** La circunferencia de los nueve puntos biseca al segmento que une el ortocentro con cualquier punto de la circunferencia circunscrita a un triángulo.

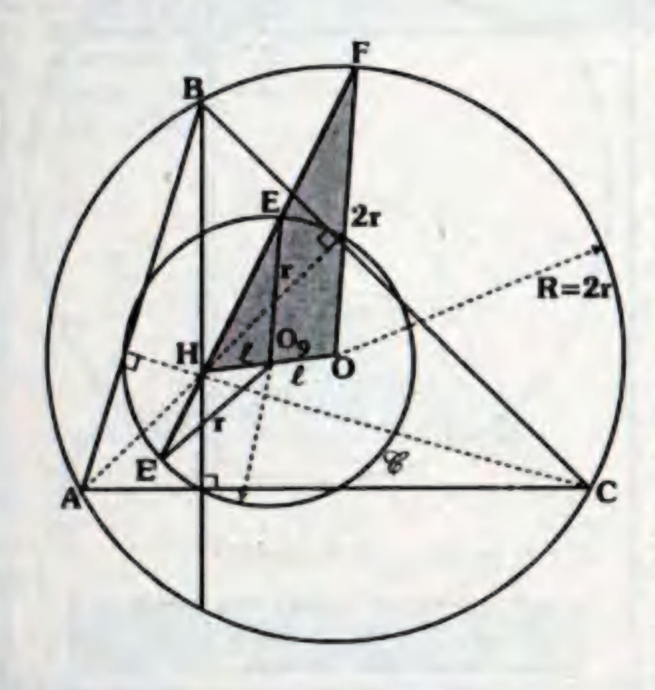



En el gráfico $\mathscr{C}$ es la circunferencia de los nueve puntos del $\Delta ABC$ y H es ortocentro de dicho triángulo se cumple:

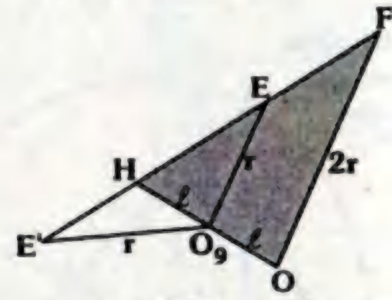
**HE=EF**



***Demostración:***



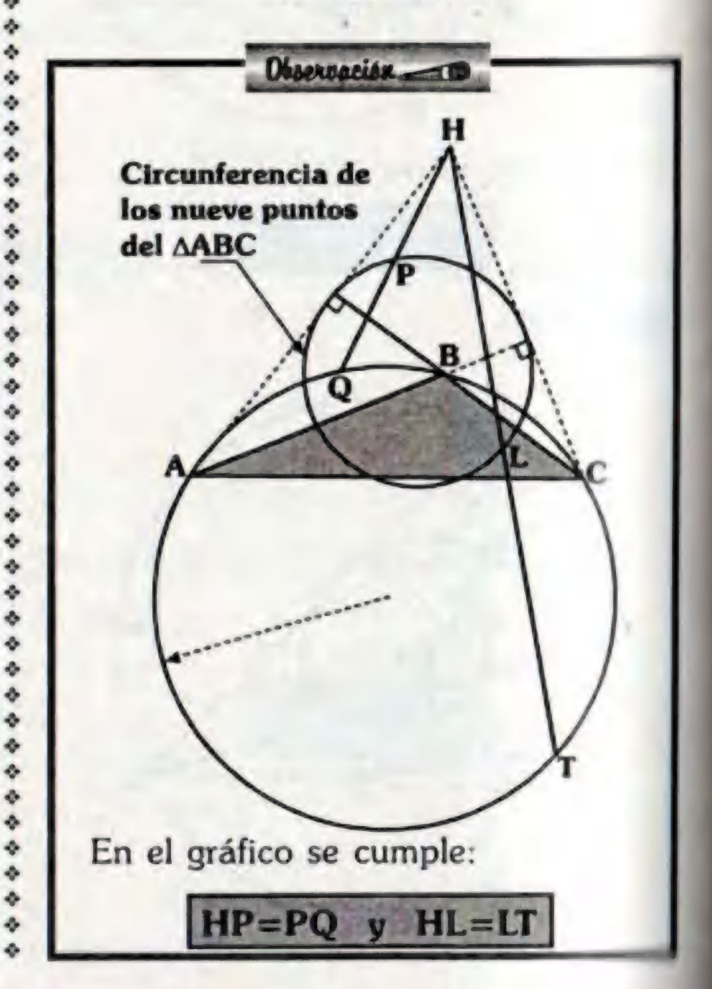

- Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia de los nueve puntos cuyo centro es $O_9$ y O es centro de la circunferencia circunscrita al $\Delta ABC$.
- Por teorema: 12.11 y 12.1.2 se tiene: H=2r; O, $O_9$ y H son colineales, además $OO_9 = O_9H$.
- En $\Delta OHF$ se tendrá:




- Por teorema: $\overline{O_9E}$ es base media.

$\therefore$ HE = EF

***Observación***

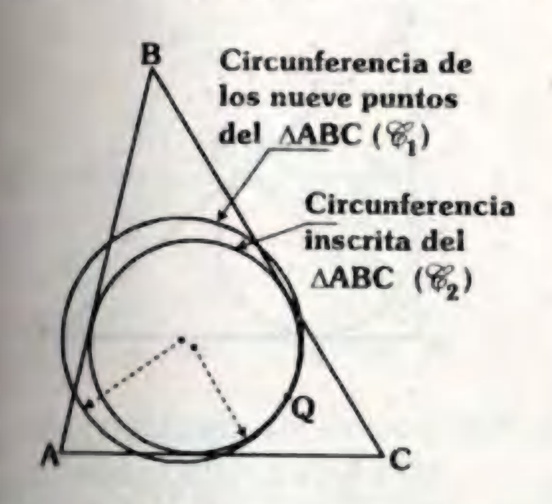



En el gráfico se cumple:

**HP=PQ y HL=LT**

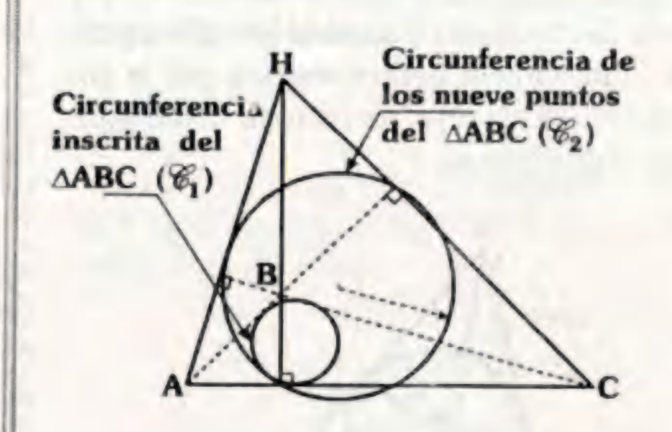
## 10.8 TEOREMA DE FEUERBACH

La circunferencia de los nueve puntos es tangente a la circunferencia inscrita en un triángulo y a cada una de las circunferencias exinscritas.




En el gráfico se cumple:

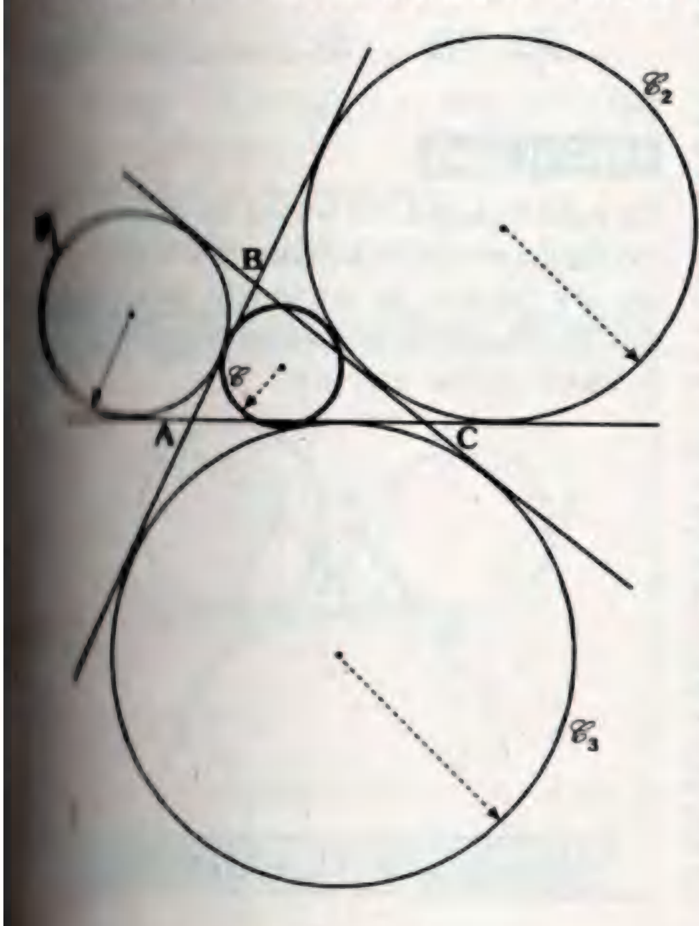
$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes




En el gráfico se cumple:

$\mathscr{C}_1$ es tangente a $\mathscr{C}_2$

Con respecto a las circunferencias exinscritas:




En el gráfico: $\mathscr{C}_1$ , $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son las circunferencias exinscritas del ΔABC .

**$\mathscr{C}$ es la circunferencia de los nueve puntos del ΔABC .**

Se cumple:

$\mathscr{C}$ es tangente a $\mathscr{C}_1$ , $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ .

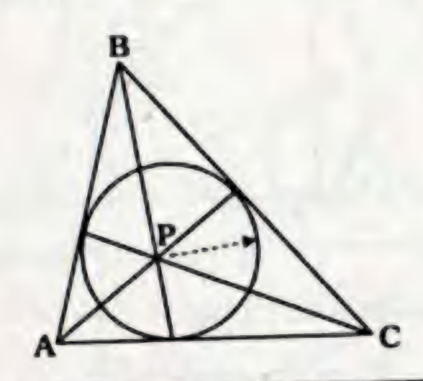
**Nota**

*La demostración de este maravilloso teorema se realizará en el capítulo de temas selectos.*

# 13. OTROS PUNTOS NOTABLES

## PUNTO DE GEORGONNE

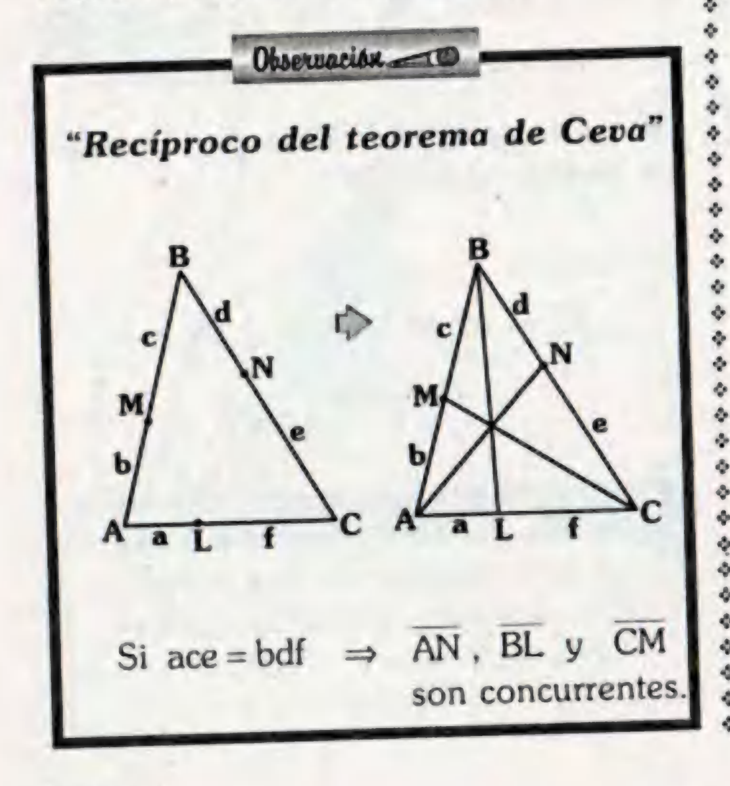
En todo triángulo el punto de concurrencia de las cevianas trazadas hacia los puntos de tangencia determinados por la circunferencia inscrita, se conoce como punto de Georgonne.



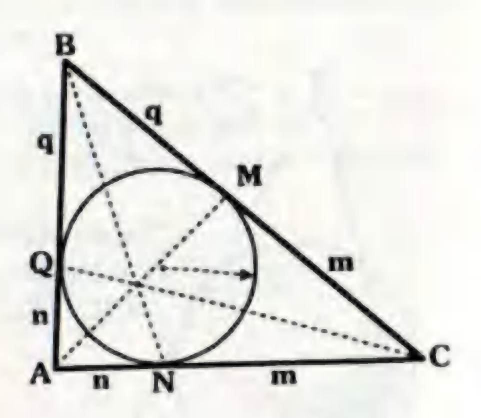

P: Punto de Georgonne del $\Delta ABC$.

**Demostración:**

Tener en cuenta lo siguiente:



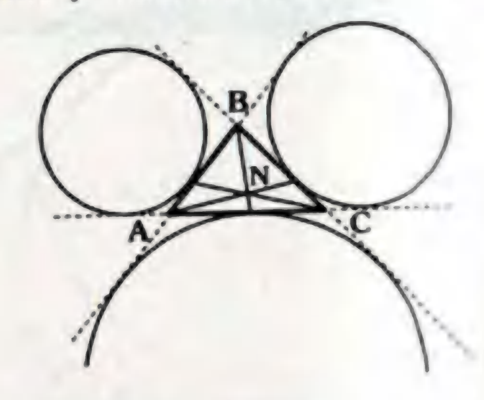

Si $ace = bdf \Rightarrow \overline{AN}$, $\overline{BL}$ y $\overline{CM}$ son concurrentes.




- Por teorema de circunferencia:
  $AQ = AN = n$, $BQ = BM = q$,
  $CN = CM = m$
- Del gráfico:
  $(AQ)(BM)(CN) = (AN)(BQ)(CM)$
- De la observación, se tiene:
  $\therefore$ $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CQ}$ son concurrentes

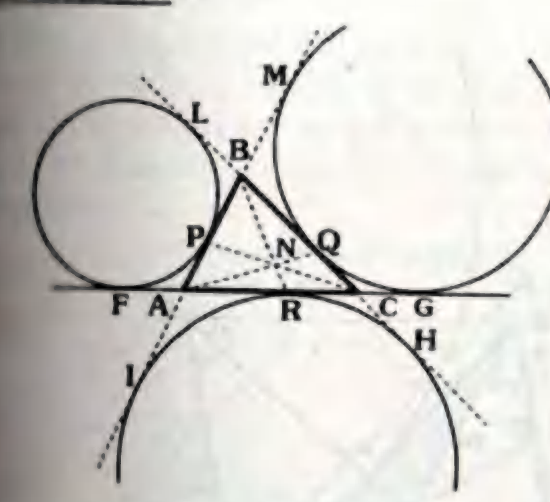
## PUNTO DE NAGEL

En todo triángulo el punto de concurrencia de las cevianas interiores trazadas hacia los puntos de tangencia determinados por las circunferencias exinscritas, se le llama punto de Nagel.




N: Punto de Nagel del $\Delta ABC$

**Demostración:**




- Por el teorema 8.2:

  AF=CG, CH=BL y AI=BM ...(I)

- Por teorema de circunferencia:

  AF=AP, AI=AR, BL=BP

  BM=BQ, CH=CR y CG=CQ ...(II)

- De (I) y (II) :

  AP=CQ, BQ=AR y BP=CR

- Como : (AP)(BQ)(R)=(PB)(QC)(AR) la observación del punto de Georgonne, se concluye:

  ∴ $\overline{AQ}$, $\overline{BR}$ y $\overline{CP}$ son concurrentes.

**Nota**

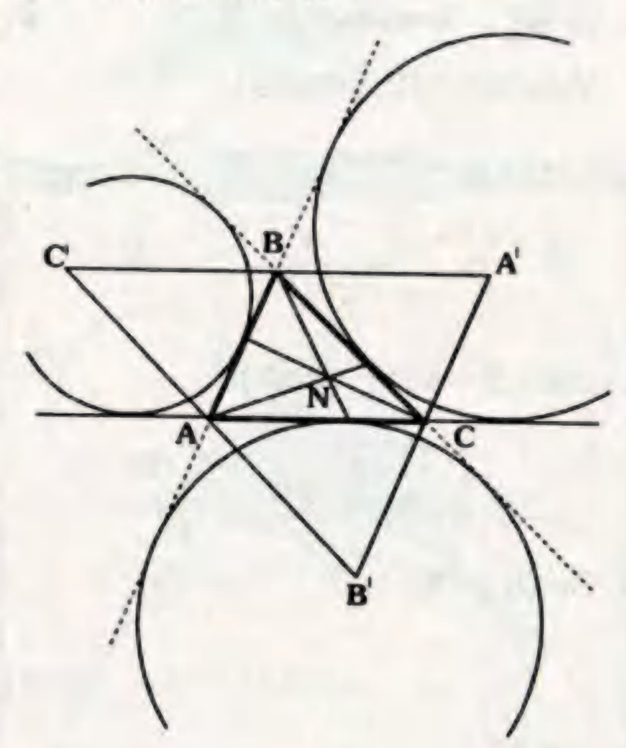
- AG=AM , BM=BQ y CQ=CG

  ⇒ $\text{Perímetro}_{\Delta ABQ} = \text{Perímetro}_{\Delta AQC}$

Por lo cual al trazar una de las cevianas AQ, BR o CP determinan regiones triangulares isoperimétricas. Debido a esta característica al punto de Nagel también es conocido como el **punto isoperimétrico.**

**TEOREMA**

El punto de Nagel de un triángulo es el incentro de su respectivo triángulo anticomplementario.




Si N : Punto de Nagel del ΔABC y

ΔA'B'C' : Anticomplementario del ΔABC .

⇒ **N: Incentro del ΔA'B'C'**

**Demostración:**

Sea : $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

- Por teorema 8.2 :

$$CD = p \Rightarrow AD = p - b$$

- Por teorema de circunferencia :

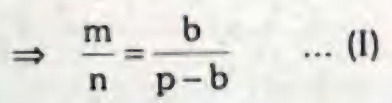
$$AE = p - b$$

- Análogamente :

$$BE = CF = P - a$$

- $\Delta FBC$: Teorema de Menelao ( $\overline{CE}$: secante)

$$(p-b)m(p-a) = (p-a)nb$$



$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{b}{p-b} \quad \ldots (I)$$

- $\Delta BA'N \sim \Delta SNF$ (AAA)

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{b}{\ell} \quad \ldots (II)$$

- De (I) y (II):

$$\ell = p - b \quad \Rightarrow \quad SC = p - b + p - a = c \Rightarrow SC = CA'$$

- $\Delta A'SC$:

$$\text{Isósceles} \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle A'SC = m\measuredangle SA'C = \alpha$$

- Por ángulos alternos internos; $m\measuredangle SA'C = \alpha$

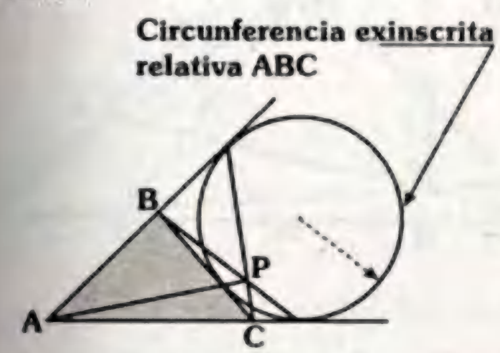
$$\Rightarrow \overrightarrow{A'N}: \text{ Bisectriz interior}$$

- Análogamente, $\overline{B'N}$ y $C'N$ son bisectrices.

$$\therefore \quad N: \text{ Incentro del } \Delta ABC$$

## PUNTO DE PONCELET

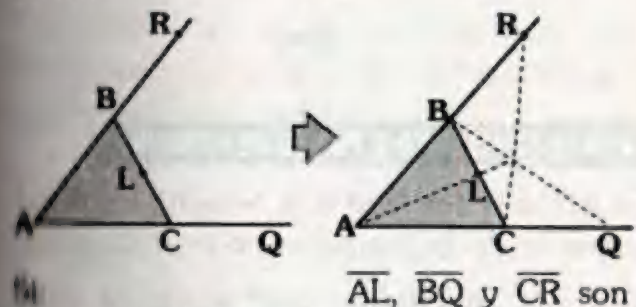
Dada la circunferencia exinscrita relativa a un lado, el punto de concurrencia de las cevianas trazadas hacia los puntos de tangencia se llama punto de poncelet.




**P: Punto de Poncelet relativo a $\overline{BC}$ del $\Delta ABC$.**

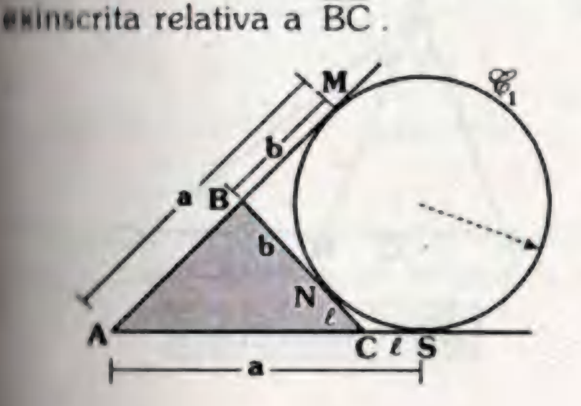
### Demostración

Para demostrar la concurrencia de las líneas mencionadas, usaremos el siguiente teorema (recíproco del teorema de Ceva).




Si (AB)(BL)(CQ)=(AQ)(LC)(BR) ⇒ $\overline{AL}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CR}$ son concurrentes

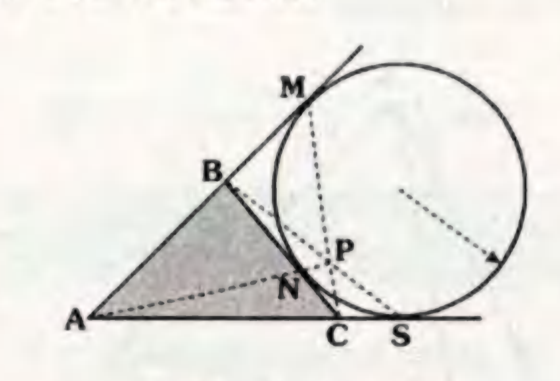
En el gráfico sea $\mathscr{C}_1$ la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{BC}$.



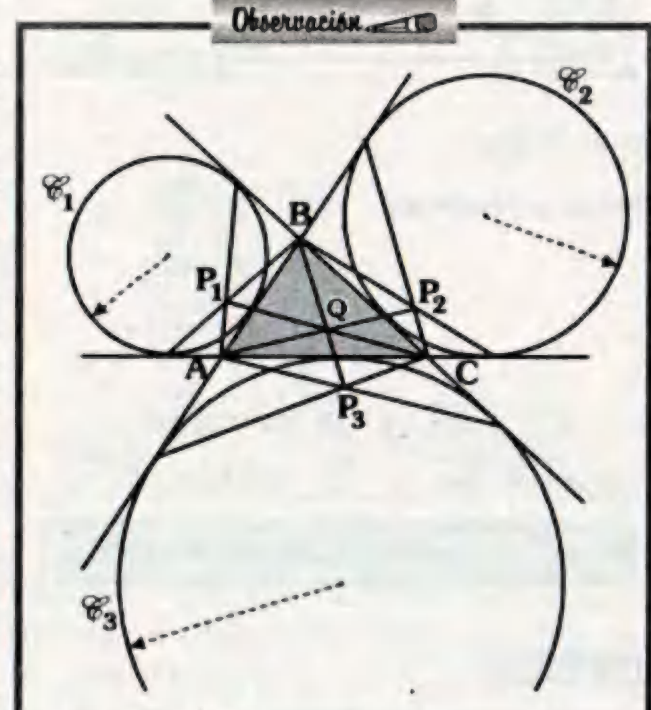

Por teoremas de circunferencia AM=AS, BM=BN y NC=CS

$$\Rightarrow (AM)(BN)(CS)=(AS)(NC)(BM)$$

Por el teorema mencionado $\overline{BS}$, $\overline{CM}$ y $\overline{AN}$ son concurrentes.




**Observación**

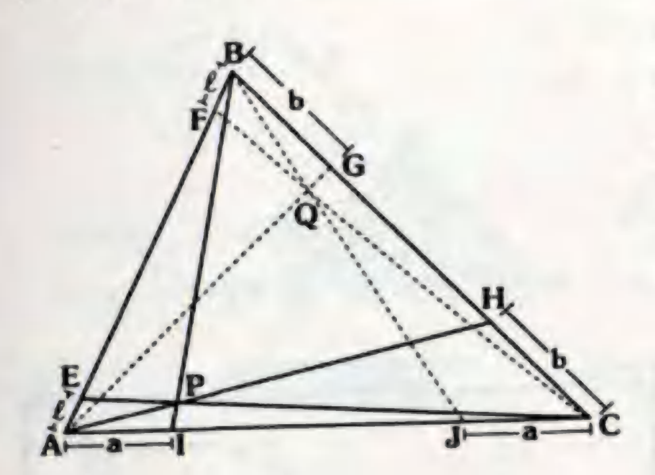



*En el gráfico:*

- $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ *son las circunferencias exinscritas del* $\Delta ABC$.
- $P_1$, $P_2$ y $P_3$ : *Puntos de Poncelet relativos a* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *y* $\overline{AC}$ *respectivamente.*
- Q : *Punto de Nagel del* $\Delta ABC$.

## PUNTOS CONJUGADOS ISOTÓMICOS

Si en un triángulo se trazan desde cada vértice un par de cevianas isotómicas tal que tres de ellas, una de cada vértice, sean concurrentes entonces las otras tres también concurren.




En el gráfico:

Líneas isotómicas: $\overline{CE}$ y $\overline{CF}$

$\overline{BI}$ y $\overline{BJ}$

$\overline{AG}$ y $\overline{AH}$

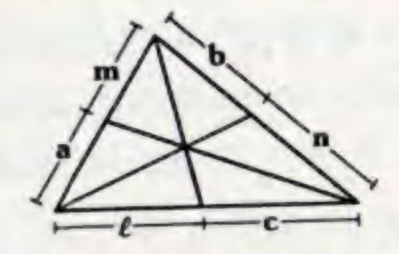
Si: $\overline{CE}$, $\overline{AH}$ y $\overline{BI}$ concurren

$\Rightarrow$ $\overline{AG}$, $\overline{BJ}$ y $\overline{CF}$ concurren

**P y Q: Conjugados isotómicos**

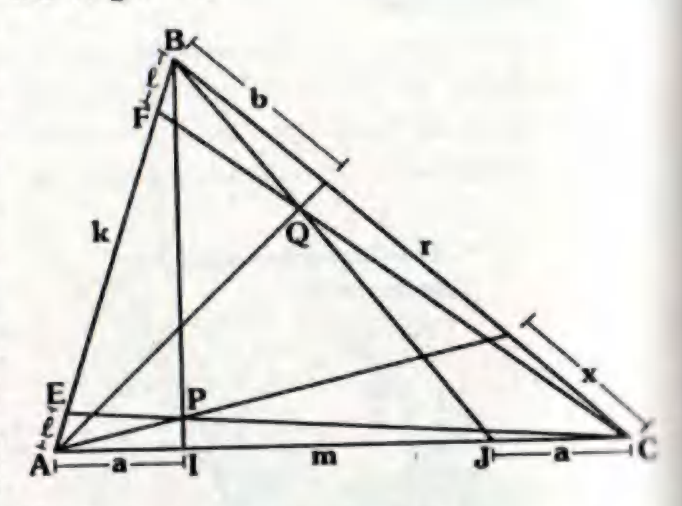
***Demostración:***

Tener en cuenta el Teorema de Ceva.




Se cumple: $abc = mn\ell$

En el gráfico:




Se va a demostrar: $x = b$

Por Teorema de Ceva:

$$a(x)(\ell + k) = (a + m)(b + r)\ell$$

$$ab(\ell + k) = (a + m)(x + r)\ell$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{b} = \frac{b + r}{x + r}$$

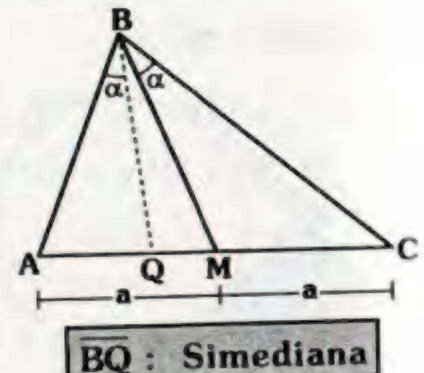
Acomodando: $(x + b + r)(x - b) = 0$

$\therefore \quad x = b$

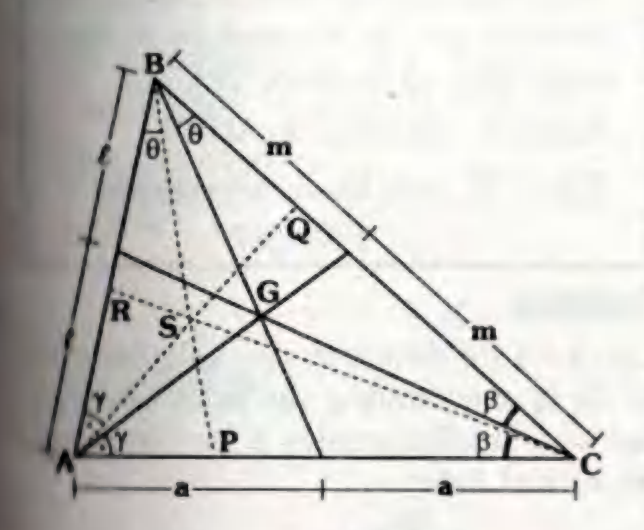
## PUNTO SIMEDIANO O PUNTO DE LEMOINE

Se llama simediana a la ceviana isogonal respecto de la mediana en un triángulo.

El punto simediano es el punto de concurrencia de las semidianas de un triángulo.




**$\overline{BQ}$ : Simediana**




En el gráfico:

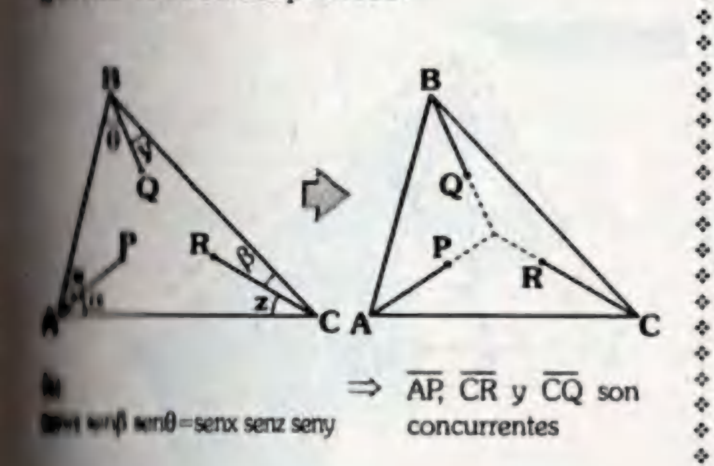
$\overline{AQ}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CR}$ son simedianas

G : Baricentro del $\triangle ABC$.

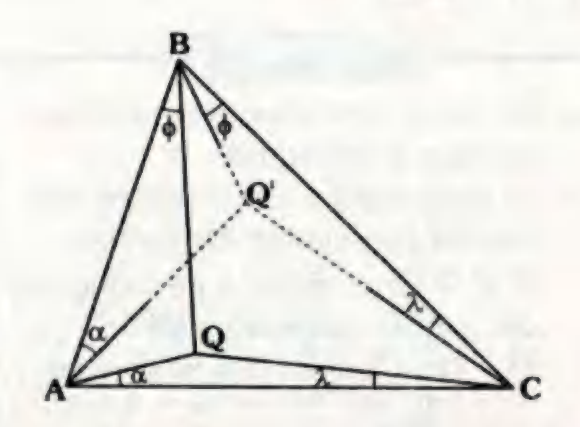
S : Punto Simediano del $\triangle ABC$.

***Demostración:***

Para demostrar la concurrencia de las simedianas hay que tener en cuenta algunos teoremas previos:



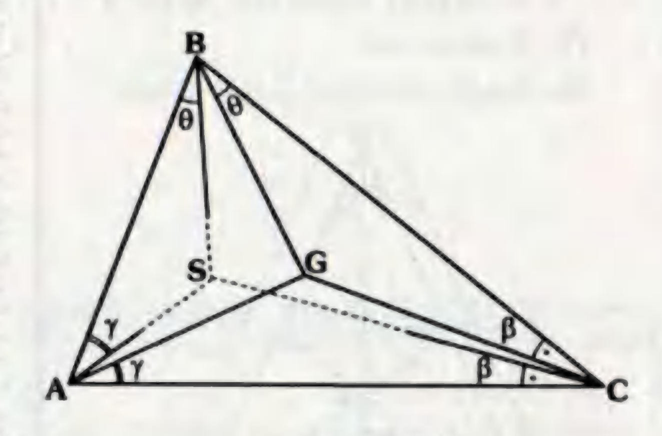

El teorema anterior es muy importante para la concurrencia, con el cual se demuestra rápidamente lo siguiente:




**Si tres cevianas son concurrentes también lo son sus isogonales.**

Q y Q' son conjugadas isogonales.

Con lo último la demostración de la concurrencia es inmediata:

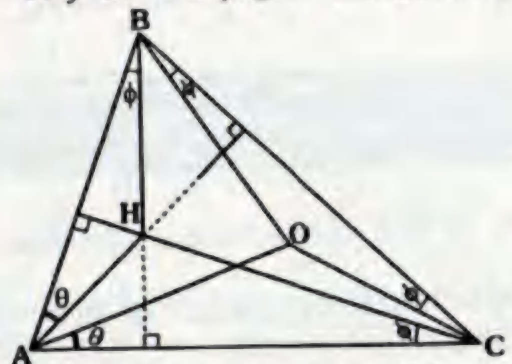



Debido a que las medianas son concurrentes en el baricentro (G), por el teorema anterior las isogonales de las medianas (simedianas) también son concurrentes (en S).

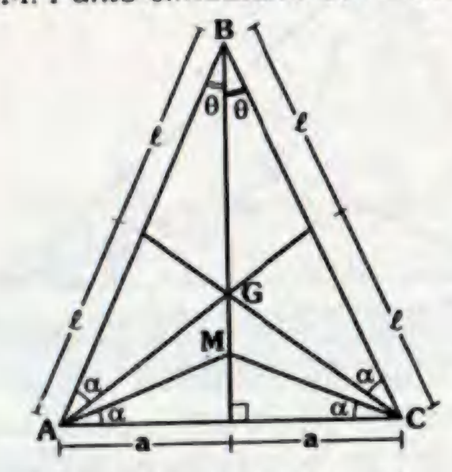
Luego G y S son conjugados isogonales.

**Observación**

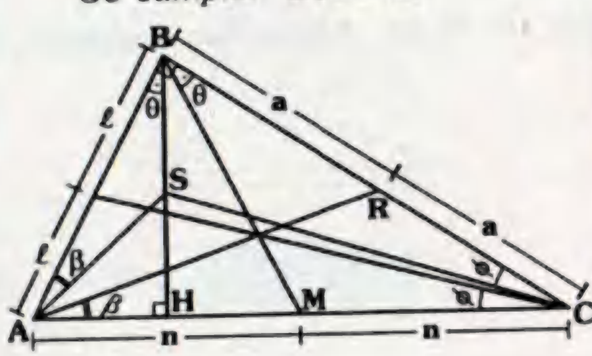
- *El punto simediano siempre es interior al triángulo.*
- *El ortocentro y circuncentro son puntos conjugados isogonales.*
  H *y* O: *Ortocentro y circuncentro del* $\triangle ABC$ *respectivamente.*
  H *y* O: *Conjugados isogonales*




- *En triángulo isósceles:* AB=BC
  G: *Baricentro*
  M: *Punto simediano del* $\triangle ABC$.




- *En el triángulo rectángulo:*
  S: *Punto simediano*
  *Se cumple:* BS = SH




*Con respecto al último podemos asegurar que la isogonal de la mediana* $\overline{BM}$ *es la altura* $\overline{BH}$.

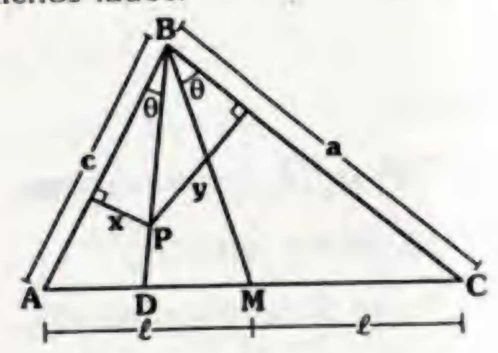
*Además:* $\triangle ABS \sim \triangle AHB$

$\overline{AR}$ *y* $\overline{AS}$ *son líneas homólogas*

$\Rightarrow$ BS = SH

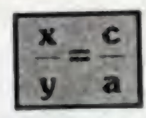
**TEOREMAS**

La razón de distancia de cualquier punto de la simediana a sus lados adyacentes son proporcionales a las longitudes de dichos lados.



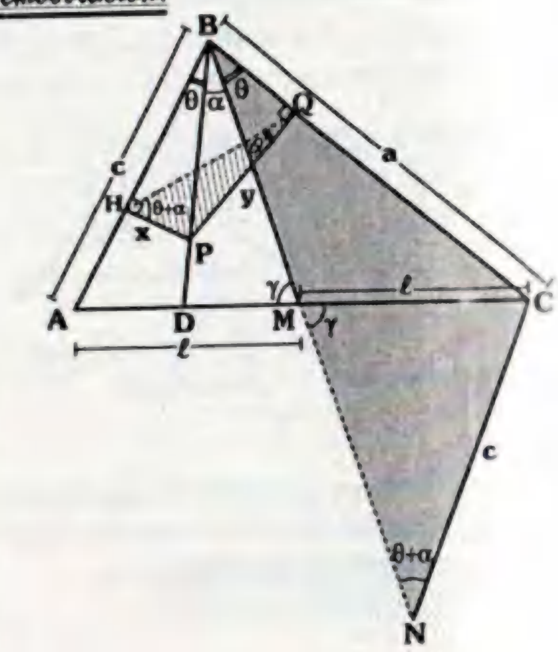

En el gráfico: $\overline{BD}$ es simediana

Se cumple:



$$\frac{x}{y} = \frac{c}{a}$$

**Demostración:**



- Se prolonga $\overline{BM}$ tal que MN=BM

$\Delta NMC \cong \Delta BMA$ (L.A.L)

$\Rightarrow m\measuredangle MNC = \theta+\alpha$ y NC=c

⏢BHPQ: Inscriptible

$\Rightarrow m\measuredangle HQP = \theta$ y

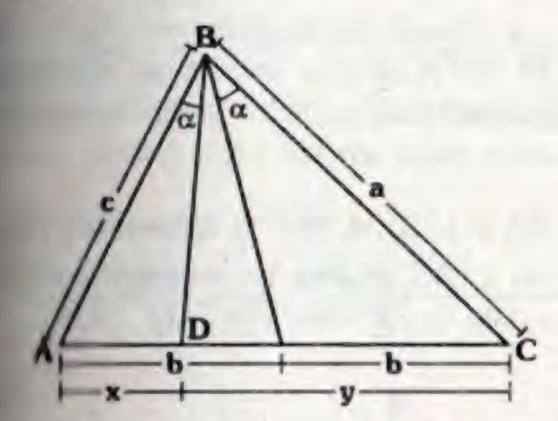
$\Rightarrow m\measuredangle PHQ = \theta+\alpha$

$\Delta QHP \sim \Delta NBC$:

$$\Rightarrow \frac{x}{c}=\frac{y}{a}$$

$$\therefore \frac{x}{y}=\frac{c}{a}$$

- Los segmentos en que divide la simediana a un lado son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes a dicha simediana.



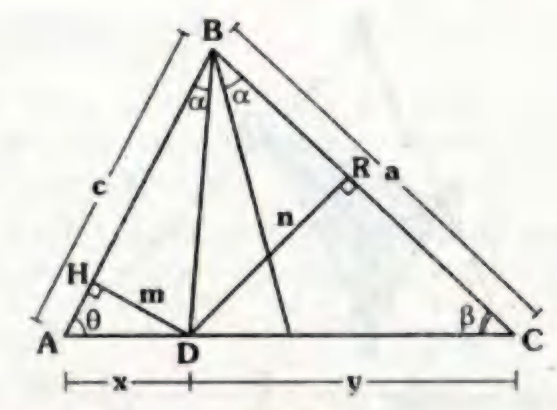

En el gráfico $\overline{BD}$ es simediana se cumple:

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{c^2}{a^2}}$$

*Demostración:*

BD es simediana.

Por teorema anterior: $\frac{m}{n}=\frac{c}{a}$




⊿AHD: $m = x \operatorname{sen}\theta$

⊿DRC: $n = y \operatorname{sen}\beta$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{a}$$

$$\Delta ABC: \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{a}{c}$$

Reemplazando: $\frac{x}{y}\cdot\frac{a}{c}=\frac{c}{a}$

$$\therefore \frac{x}{y}=\frac{c^2}{a^2}$$

**Nota**

*Si trazamos una ceviana tal que divida internamente al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los cuadrados de los lados adyacentes a dicha ceviana entonces dicha línea es* ***Simediana****.*

- El punto simediano es baricentro del triángulo pedal asociado a dicho punto.

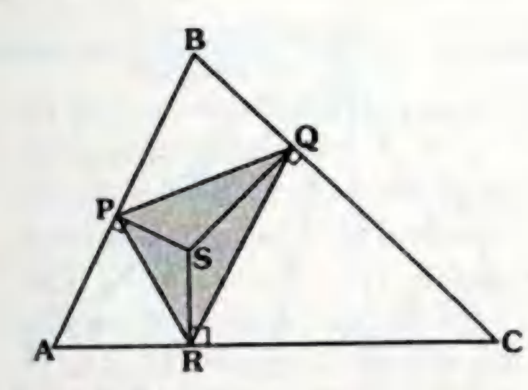
En el gráfico:

S : Punto simediano del $\Delta ABC$.

$\Delta PQR$: Triángulo pedal del $\Delta ABC$ respecto de S.



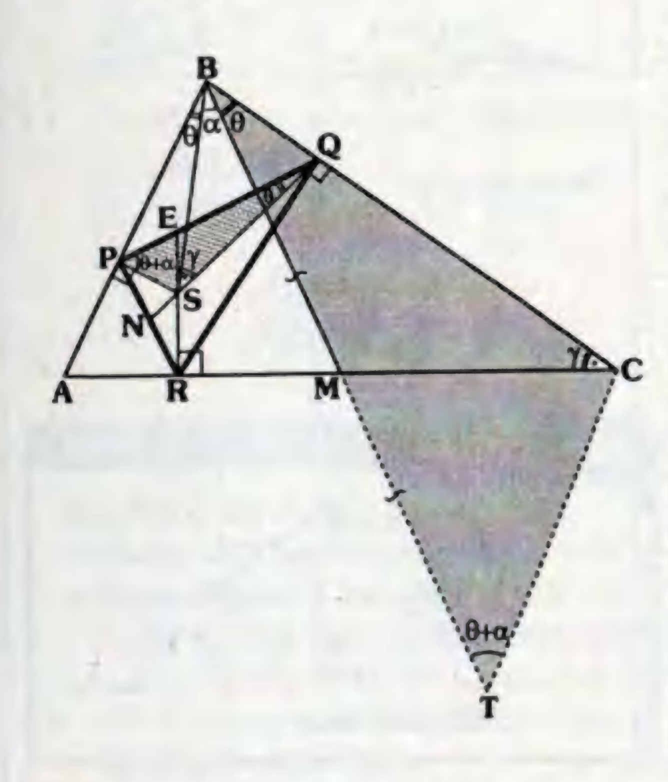



Se cumple:

**S: Baricentro del $\Delta ABC$**

**Demostración:**




En forma análoga al teorema se prolonga la mediana $\overline{BM}$ (isogonal a $\overline{BS}$) tal que: $MT = BM$

$$\Delta AMB \cong \Delta CMT$$

$$\Rightarrow \; m\measuredangle BTC = \theta+\alpha$$

$$m\measuredangle CBT = \theta$$

$\square SPBQ$: Inscriptible

$$\Rightarrow \; m\measuredangle PQS = \theta$$

$$m\measuredangle SPQ = \theta + \alpha$$

$\square SRCQ$: Inscriptible

$$m\measuredangle ESQ = \gamma$$

$$\Delta PSQ \sim \Delta TCB$$

$\overline{CM}$ y $\overline{SE}$ : Líneas homólogas

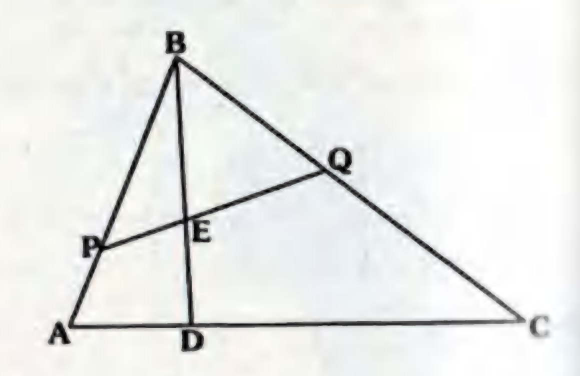
$$BM = MT \;\Rightarrow\; PE = EQ$$

Se demuestra $\overline{RE}$ es mediana, en forma análoga $\overline{QN}$ es mediana.

$\therefore$ S es baricentro del $\Delta PQR$.

- La simediana relativa a un lado, corta en el punto medio al segmento antiparalelo a dicho lado cuyos extremos están en los otros lados.

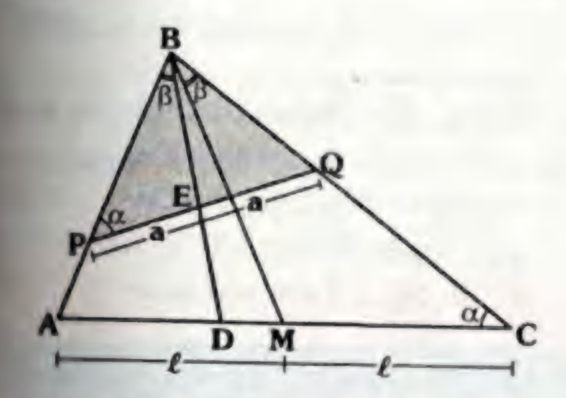
  En el gráfico $\overline{BD}$ es simediana relativa a $\overline{AC}$ y $\overline{PQ}$ es segmento antiparalelo a $\overline{AC}$ respecto del $\measuredangle ABC$.




Se cumple:

**EP = EQ**

***Demostración:***




Se traza la mediana $\overline{BM}$:

$\Rightarrow$ m∡ABD = m∡MBC

Por ser $\overline{PQ}$ antiparalela respecto del ∡ABC.

$\Rightarrow$ m∡BPQ = m∡ACB

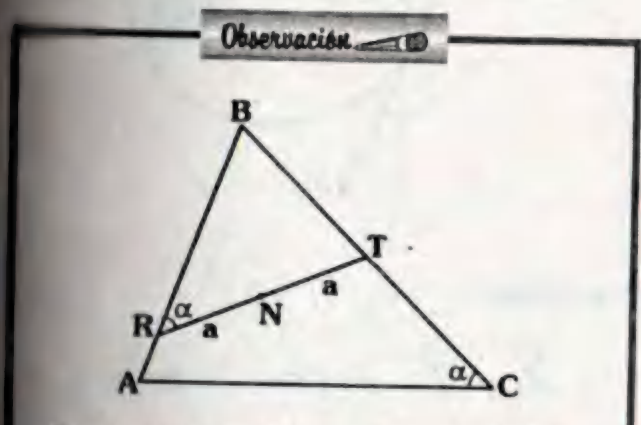
Del gráfico, se puede asegurar:

ΔABC ~ ΔQBA

$\overline{BM}$ y $\overline{BE}$ son líneas homólogas, pero $\overline{BM}$ es mediana $\Rightarrow$ $\overline{BE}$ también es mediana:

$\therefore$ EP=EQ

***Observación***

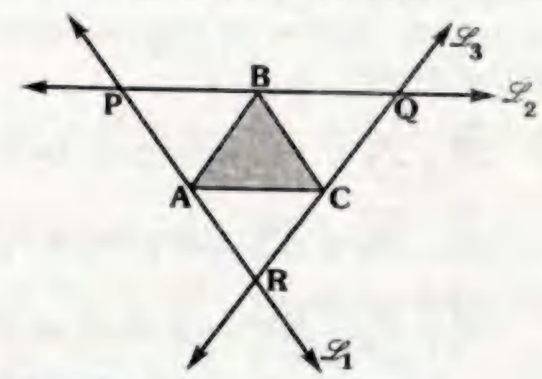



*De lo anterior se puede concluir si RT es antiparalelo con $\overline{AC}$ respecto del ∡ABC y RN = NT entonces la simediana relativa a $\overline{AC}$ pasa por N.*

**PUNTO EXMEDIANO**

Se llama exmedianas a las rectas paralelas a los lados opuestos trazadas desde los vértices.

El punto exmediano es el punto de intersección de dos exmedianas.




En el gráfico:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overline{BC}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \parallel \overline{AC}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \parallel \overline{AB}$

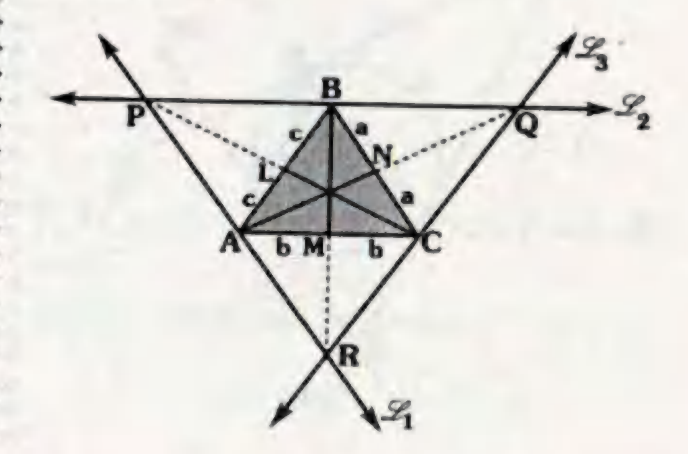
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$: Exmedianas

**P, Q y R: Puntos exmedianas del ΔABC.**

**TEOREMA**

Dos exmedianas y la mediana trazada del tercer vértice son concurrentes en uno de los puntos exmedianos.

***Demostración:***



En el gráfico:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ son las exmedianas

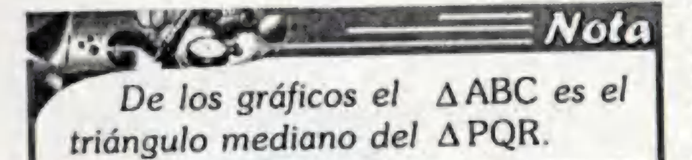
$\overline{AN}$, $\overline{CL}$ y $\overline{BM}$ son medianas.

Se puede observar ABQC, CBPA y ABCR son paralelogramos, en los cuales N, L y M son puntos medios de sus diagonales respectivamente.

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overline{CL}$ concurren en P.

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ y $\overline{AN}$ concurren en Q.

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ y $\overline{BM}$ concurren en R.

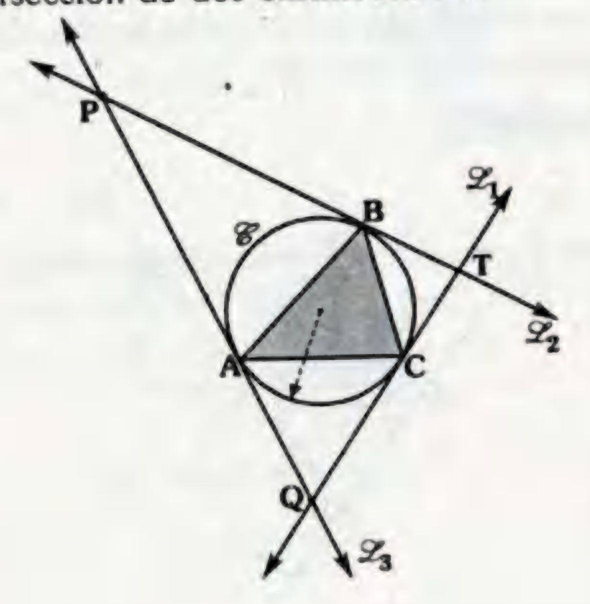



*De los gráficos el* $\Delta$ABC *es el triángulo mediano del* $\Delta$PQR.

## PUNTO EXSIMEDIANO

Se llama exsimediana a cada una de las rectas tangentes en los vértices del triángulo de la circunferencia circunscrita.

El punto exsimediano es el punto de intersección de dos exsimedianas.




En el gráfico:

$\mathscr{C}$: Circunferencia circunscrita al $\Delta$ABC

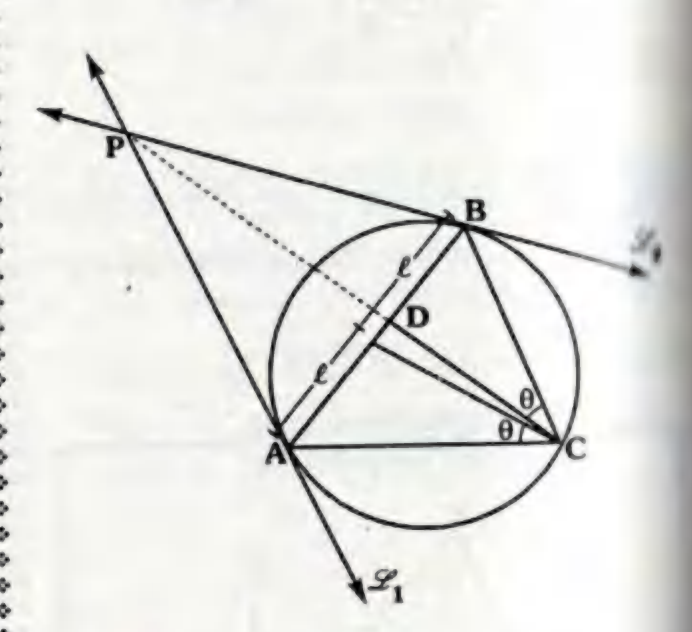
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$: Rectas tangentes a $\mathscr{C}$ en C, B y A respectivamente.

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$: Exsimedianas

**P, Q y T: Puntos exsimedianos**

## TEOREMA

Dos exsimedianas y la simediana trazada del tercer vértice son concurrentes en uno de los puntos exsimedianos.




En el gráfico:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: Exsimedianas

$\overline{CD}$ : Simediana

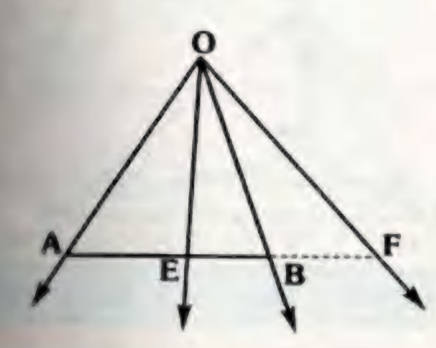
Se cumple:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overline{CD}$ son concurrentes

Demostración:

Para realizar esta demostración se requiere conocer algunos otros teoremas (conjugación armónica) que se estudiarán con más detalle en la publicación de proporcionalidad de segmentos y semejanza, la cual expondremos brevemente:

•



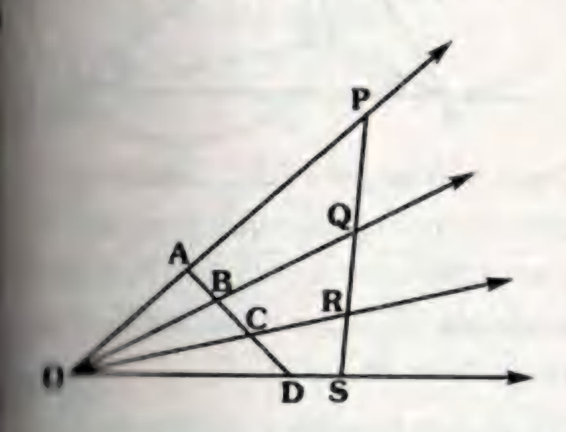

Si $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{BF}$ se dice E y F son conjugados armónicos de $\overline{AB}$.

$\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OE}$, $\overleftrightarrow{OB}$ y $\overleftrightarrow{OF}$: Haz armónico

O : Centro del haz

A, E, B y F: Cuaterna armónica.

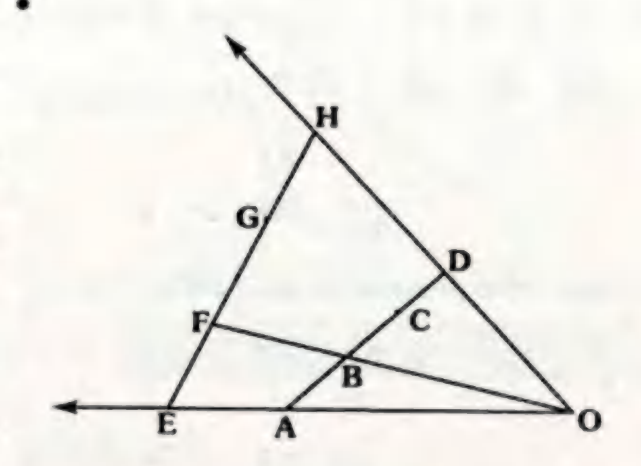
•




Si A, B, C y D forman una cuaterna armónica

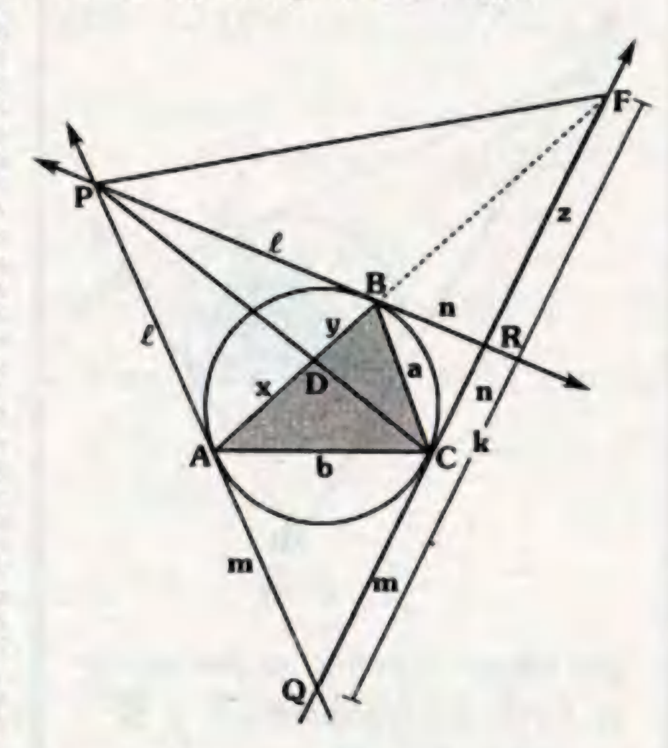
⇒ P, Q, R y S también forman cuaterna armónica.

•




Si A, B, C y D: Cuaterna armónica
E, F, G y H: Cuaterna armónica
⇒ O, C y G: Colineales

En el gráfico tracemos la tangente en C corta a la prolongación de $\overline{AB}$.




Se va a demostrar $\overline{CD}$ es simediana del $\Delta ABC$.

$\Delta QPR$ : Teorema de Menelao

$$m\ell z=\ell nk \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{k}{z}$$

$\Rightarrow$ Q, C, R y F : Cuaterna armónica

$\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PF}$: Haz armónico

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{AF}{BF}$$

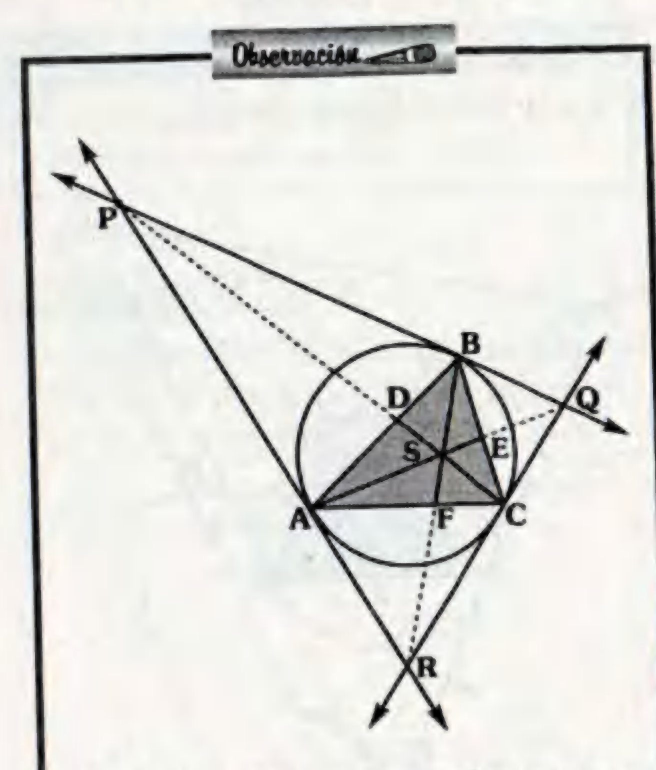
$\Delta ABC$ : Por propiedad de semejanza

$$\frac{AF}{BF} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{b^2}{a^2}$$

Por teorema: $\overline{CD}$ es simediana.

**Observación**




*Del último teorema, se demuestra en forma análoga para $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$.*

$\Rightarrow$ *$\overline{CD}$, $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ son medianas.*

*Del gráfico tenemos:*

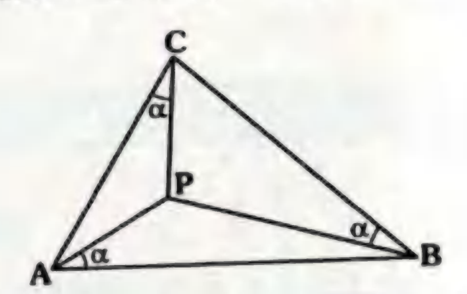
***S: Punto Simediano del $\Delta ABC$.***

***S: Punto de Gergonne del $\Delta PQR$.***

## PUNTOS DE BROCARD

Dado un triángulo ABC y un punto P, si $m\measuredangle PAB = m\measuredangle PBC = m\measuredangle PCA$, entonces P es el punto de Brocard del triángulo ABC.

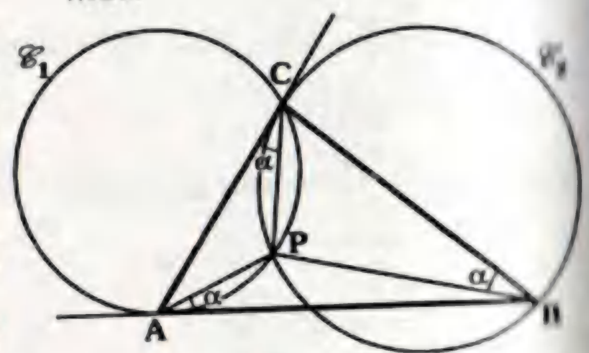
Si $m\measuredangle PAB = m\measuredangle PBC = m\measuredangle PCA$




**P: Punto de Brocard del $\Delta ABC$**

***Importante:***

- *Todo triángulo no equilátero tiene dos puntos de Brocard, veamos:*

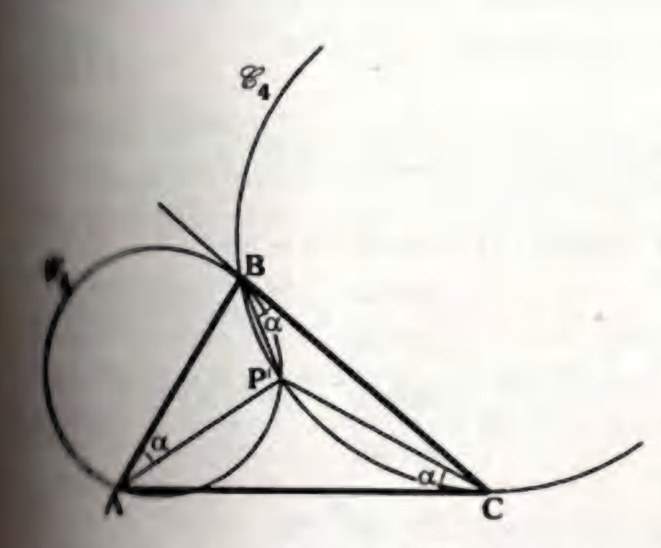



*Dado el triángulo ABC, trazamos la circunferencia $\mathscr{C}_1$, que pase por C y sea tangente a $\overline{AB}$ en A, luego trazamos $\mathscr{C}_2$, que pase por B y sea tangente a $\overline{AC}$ en C.*

*Por ángulo inscrito y semiinscrito en $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, tenemos:*

$\Rightarrow m\measuredangle PAB = m\measuredangle PBC = m\measuredangle PCA = \alpha$

$\therefore$ ***P: Primer punto de Brocard***




Análogamente, trazamos $\mathscr{C}_3$ que pase por A y sea tangente a $\overline{BC}$ en C, luego trazamos $\mathscr{C}_4$ que pase por C y sea tangente a $\overline{AB}$ en B.

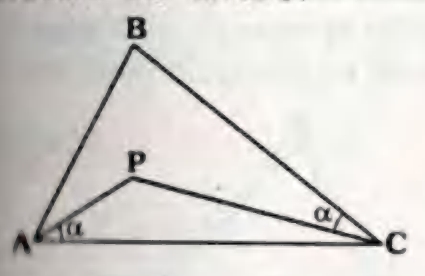
$\Rightarrow$ m∡P'AC=m∡P'BA=m∡P'CB=α

P' : **Segundo punto de Brocard.**

α : Medida del ángulo de Brocard.

***Cuidado:***

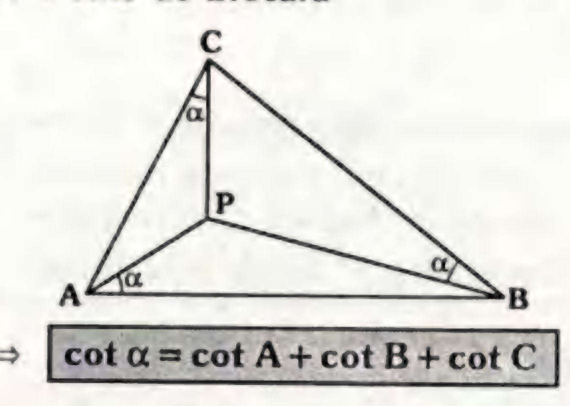
*P no necesariamente es punto de Brocard del* ΔABC.




**TEOREMA**

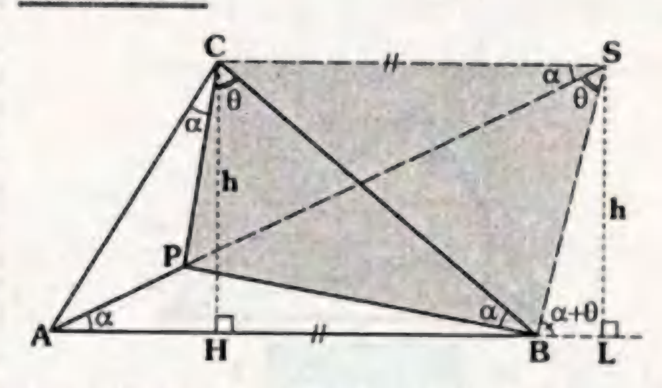
La cotangente de la medida del ángulo de Brocard es igual a la suma de las cotangentes de los ángulos interiores del triángulo.

Si P: Punto de Brocard




$\Rightarrow$ $\boxed{\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C}$

***Demostración:***




- Prolongamos $\overline{AP}$ hasta S, tal que:

  $\overline{CS} // \overline{AB} \Rightarrow$ m∡CSA=α

- ⌂PCSB: Inscriptible

  $\Rightarrow$ m∡PCB = m∡PSB = θ

- Trazamos $\overline{CH}$ y $\overline{SL}$ perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB} \Rightarrow CH = SL = h$ (CHSL: rectángulo).

- ⊿ASL : $\cot\alpha = \dfrac{AL}{h}$

- Pero : $AL = AH + HB + BL$

  $$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{AH + HB + BL}{h}$$

  $$= \frac{AH}{h} + \frac{HB}{h} + \frac{BL}{h}$$

  $$= \cot A + \cot B + \cot(\alpha + \theta)$$

- Se observa: $\alpha + \theta = C$

  $\therefore \quad \cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$

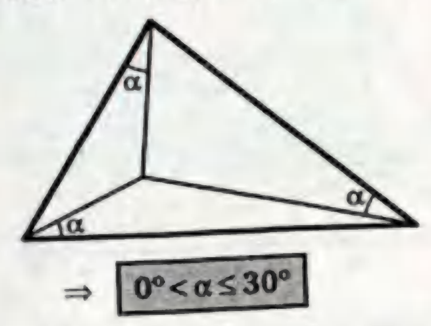
**Observación**

*De la siguiente expresión se concluye que los ángulos de Brocard respecto a P y P' son de igual medida.*

**TEOREMA**

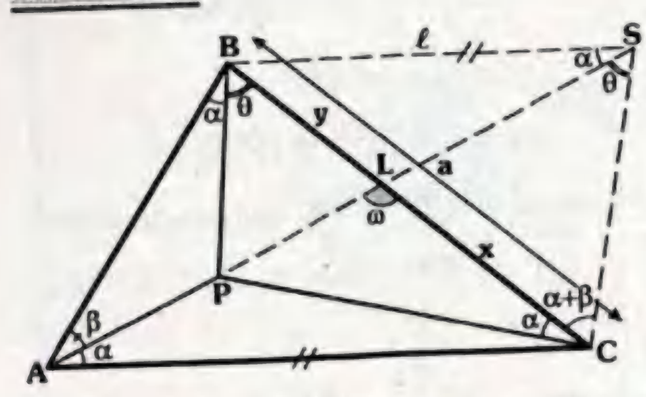
La medida del ángulo de Brocard es mayor que 0° y menor o igual que 30°.

$\alpha$ : medida del ángulo de Brocard




$\Rightarrow$ $0° < \alpha \leq 30°$

**Demostración:**




- Prolongamos $\overline{AP}$ hasta S, tal que $m\measuredangle ASB = \alpha$.
- $\Delta BLS \sim \Delta ALC$ (AAA)

  $\Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{b}{\ell}$ ... (I)

- $\Delta ABC \sim \Delta BSC$ (AAA)

  $\Rightarrow \dfrac{\ell}{a} = \dfrac{a}{b}$ ... (II)

- Se observa: $x + y = a$ ...(III)
- De (I), (II) y (III): $x = \dfrac{ab^2}{a^2 + b^2}$
- $\Delta ALC$ : Teorema de senos

  $\dfrac{\text{sen}\,\omega}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{b}{x}$

  $\Rightarrow \dfrac{\text{sen}\,\omega}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{a^2 + b^2}{ab}$

- Sabemos: $(a - b)^2 \geq 0$

  $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

  $\Rightarrow \dfrac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$

  $\Rightarrow \text{sen}\,\omega \geq 2\,\text{sen}\alpha$

- Además: $\text{sen}\,\omega \leq 1$

  $\Rightarrow 1 \geq \text{sen}\,\omega \geq 2\,\text{sen}\,\alpha$

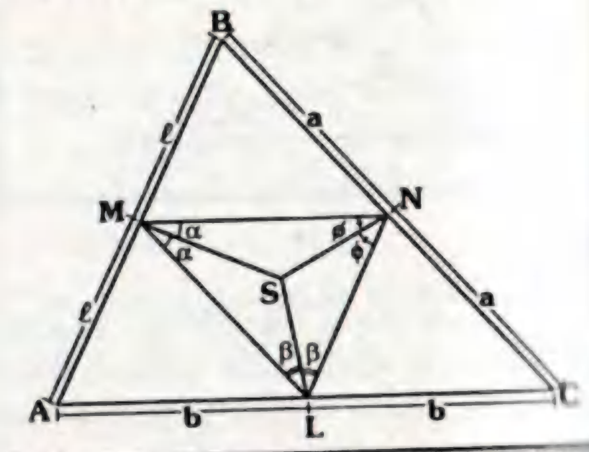
  $\Rightarrow 1 \geq 2\,\text{sen}\,\alpha$

  $\Rightarrow \text{sen}\,\alpha \leq \dfrac{1}{2}$

  $\therefore \quad 0° < \alpha \leq 30°$

**PUNTO DE SPIEKER**

El punto de Spieker de un triángulo es el incentro de su triángulo mediano.



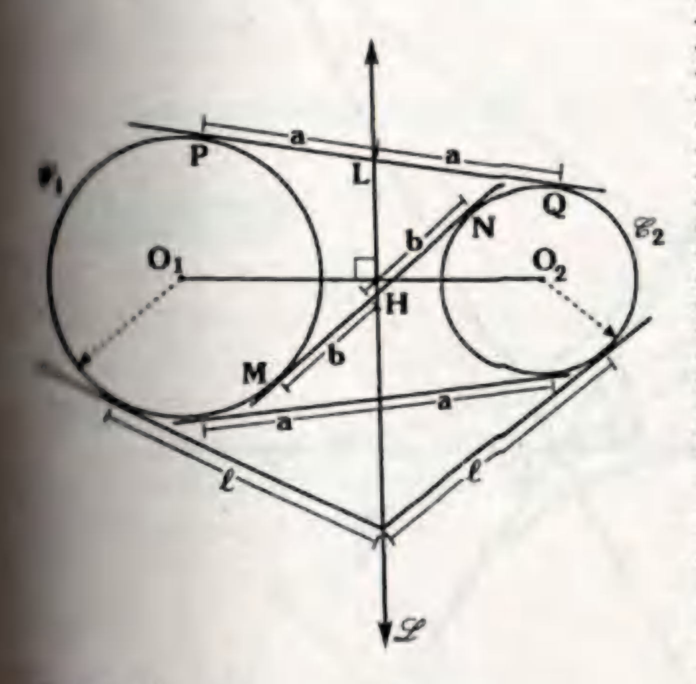

S: Punto de Spieker del $\Delta ABC$

**TEOREMA**

El punto de Spieker es el punto de concurrencia de los ejes radicales de las circunferencias exinscritas.

**Demostración:**

Antes de efectuar la demostración, mencionaremos algunas propiedades del eje radical.



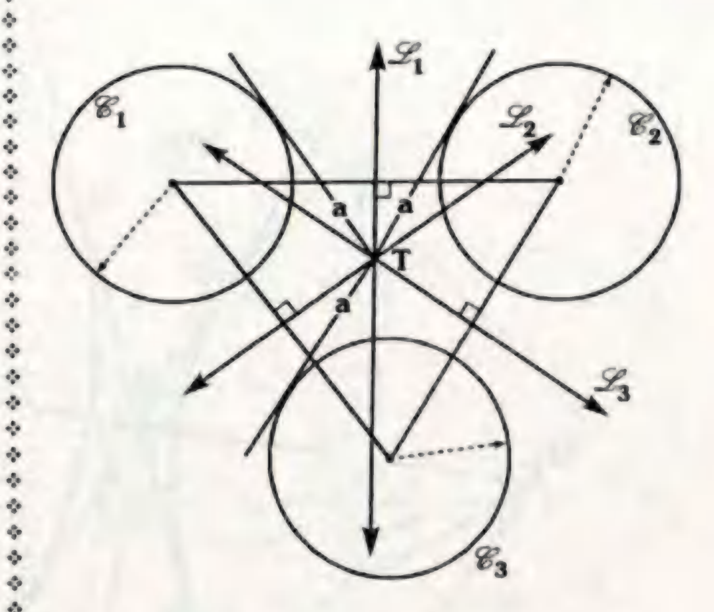

Del gráfico:

- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ : Eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$
- Se cumple :

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overline{O_1O_2}$$

$$PL=LQ \ , \ MH=HN$$

- El eje radical es perpendicular al segmento que une los centros.
- El eje radical biseca al segmento tangente común a ambas circunferencias.




$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ : Eje radical de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ : Eje radical de $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ : Eje radical de $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_1$

Se cumple: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ concurren en un punto (T), al cual se le llama centro radical.

**Nota**

*Se ha mencionado sobre el centro y eje radical para circunferencias exteriores, debido a que las circunferencias exinscritas lo son, ya en la publicación sobre eje radical se analizará para los demás casos.*

Del gráfico:

- S : Punto de Spieker del $\Delta ABC$.
- $\mathscr{C}_1$ $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ las circunferencias exinscritas del $\Delta ABC$.
- $\Delta MNL$ : Triángulo mediano del triángulo ABC

  $\Rightarrow$ LMNC y LMBN son paralelogramos
- Se observa $\Delta O_1O_2O_3$ es triángulo exincentral del $\Delta ABC$.

  H : Incentro del $\Delta ABC$ y H : Ortocentro del $\Delta O_1O_2O_3$ (Teorema 10.9)
- Luego: $\overline{MJ} // \overline{O_1C} \Rightarrow \overline{MJ} \perp \overline{O_3O_2}$

  $\overline{LI} // \overline{O_3B} \Rightarrow \overline{LI} \perp \overline{O_1O_2}$

- Por teorema de circunferencia:

$$TA = BQ \Rightarrow TM = MQ,$$

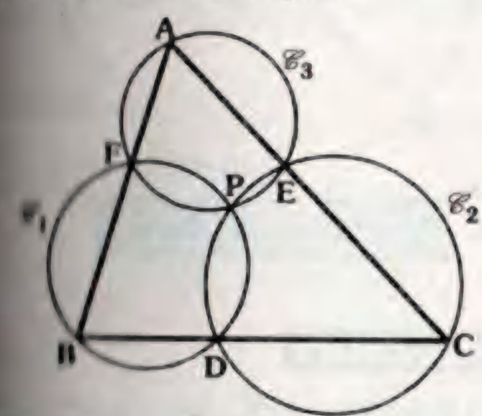
quiere decir que "M" está en el eje radical de $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ y debido a que $MJ \perp \overline{O_3O_2} \Rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ es eje radical de $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_2$.

- En forma análoga $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ es eje radical de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$.

$\therefore$ S es centro radical de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$

## PUNTO DE MIQUEL

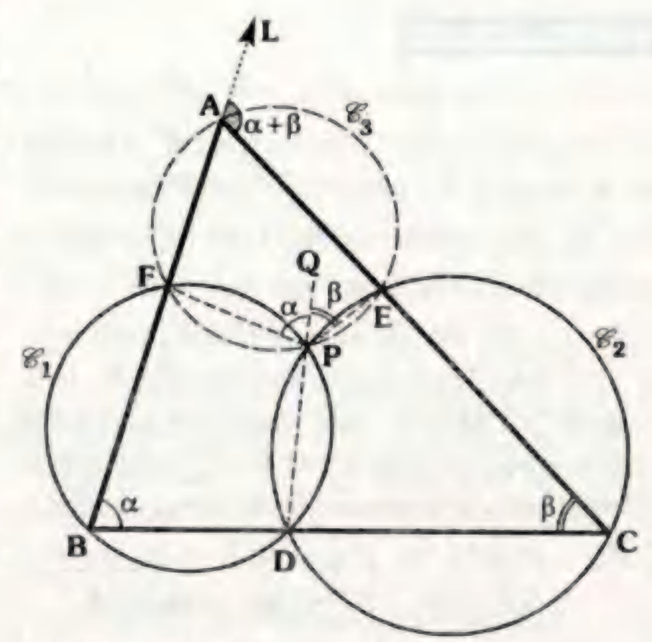
Si D, E y F son puntos de los lados BC, CA y AB respectivamente del triángulo ABC, entonces las circunferencias que pasan por las ternas de puntos B, D y F; C, E y D; A, F y E son concurrentes, a dicho punto de concurrencia se le conoce como punto de Miquel.




**Punto de Miquel del $\Delta ABC$**

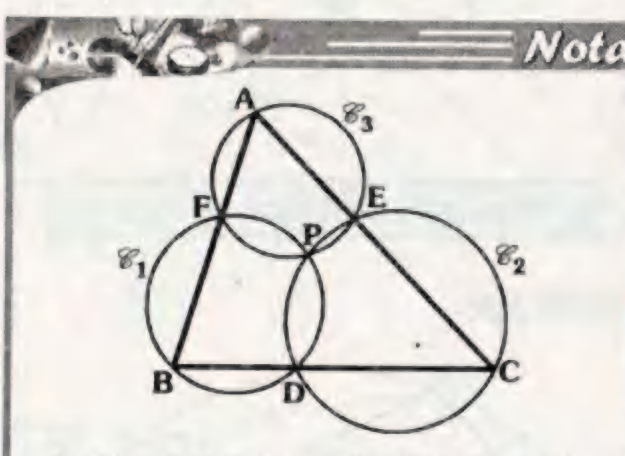
*Demostración:*

- Para demostrar la concurrencia tendríamos que demostrar que el $\triangle$AFPE es inscriptible.
- $\triangle$BFPD: Inscrito
  $\Rightarrow m\measuredangle FBD = m\measuredangle FPQ = \alpha$




- $\triangle$CEPD: Inscrito
  $\Rightarrow m\measuredangle ECD = m\measuredangle EPQ = \beta$
- Por ángulo exterior del $\Delta ABC$:
  $m\measuredangle LAC = \alpha + \beta$
- $\triangle$AEPF: Inscriptible
  $\therefore$ $\mathscr{C}_3$ pasa por P

**Nota**




P: *Punto de Miquel del triángulo* ABC *respecto a la terna* D, E, F.

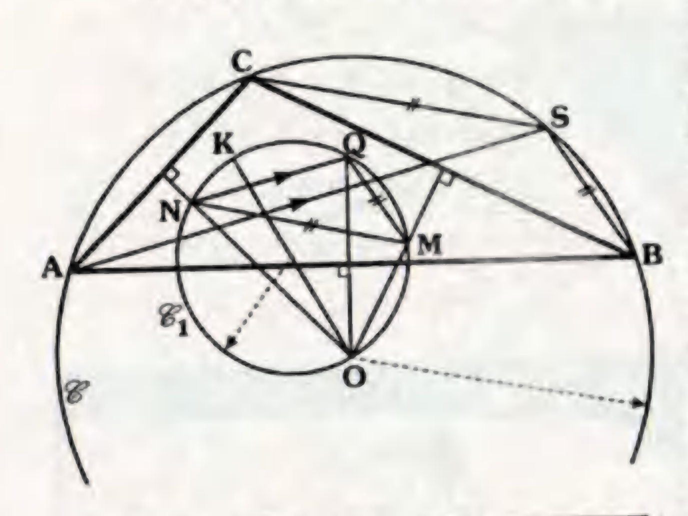
$\Delta DEF$: *Triángulo de Miquel del* ABC *respecto a* P.

$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$: *Circunferencias de Miquel de los puntos* D, E y F.

## PUNTO DE STEINER

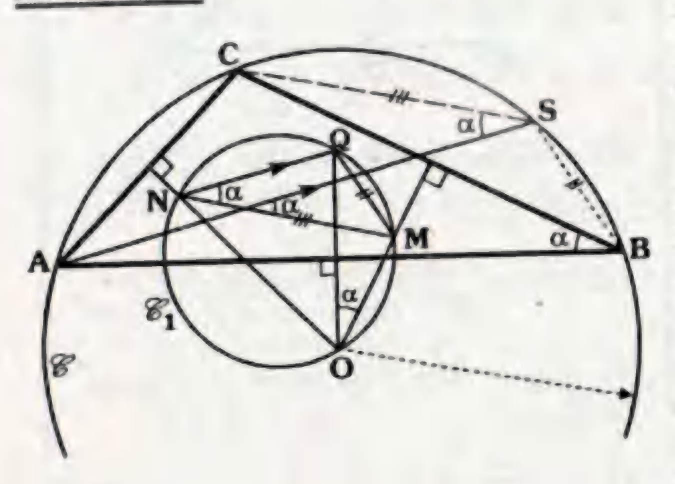
Dado un triángulo ABC; de circuncentro O, circunferencia circunscrita $\mathscr{C}$ y punto de Lemoine K, trazamos la circunferencia $\mathscr{C}_1$ de diámetro OK, los circunradios perpendiculares a los lados AB, BC y AC cortan a $\mathscr{C}_1$ en Q, M y N respectivamente, las paralelas trazadas desde A, B y C a $\overline{NQ}$, $\overline{MQ}$ y $\overline{MN}$ respectivamente concurren en un punto, al cual se le denomina de Steiner del triángulo ABC.

Si K: Punto de Lemoine del $\triangle ABC$,
$\overline{AS}//\overline{NQ}$, $\overline{BS}//\overline{QM}$ y $\overline{MN}//\overline{SC}$.




⇒ **S: Punto de Steiner del $\triangle ABC$**

**Demostración:**




- Sea $\overline{AS}//\overline{QN}$, vamos a demostrar que $\overline{SC}//\overline{MN}$ y $\overline{BS}//\overline{QM}$.
- Los ⌂s ACSB y NQMO son inscritos:

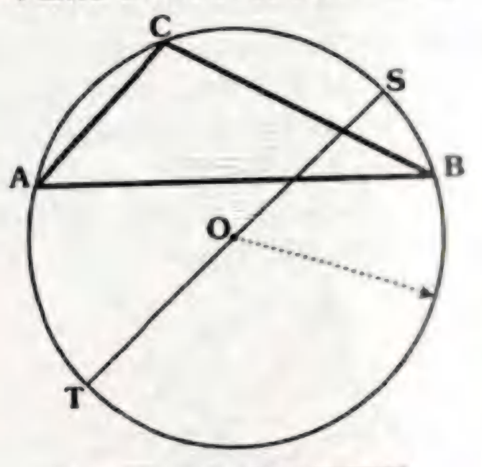
  $\Rightarrow m\measuredangle QNM=\alpha$ y $m\measuredangle CSA=\alpha$
- Por ángulos entre paralelas, tenemos

  $\therefore$ $\overline{SC}//\overline{MN}$ y $\overline{BS}//\overline{QN}$

## PUNTO DE TARRY

Dado un triángulo, el punto de Tarry es el simétrico del punto de Steiner con respecto al circuncentro.

Si S: Punto de Steiner del $\triangle ABC$.




⇒ **T: Punto de Tarry**

## PUNTOS DE JERABEK

Sea un triángulo ABC, se ubica P, Q y R en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ respectivamente, tal que AP=BQ=CR, si desde dichos puntos trazamos paralelas a $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ y $\overline{CB}$ ellas se intersecaran en A', B' y C' respectivamente entonces $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son concurrentes en un punto, al cual se le llama punto de Jerabek ($J_1$).

En el gráfico:

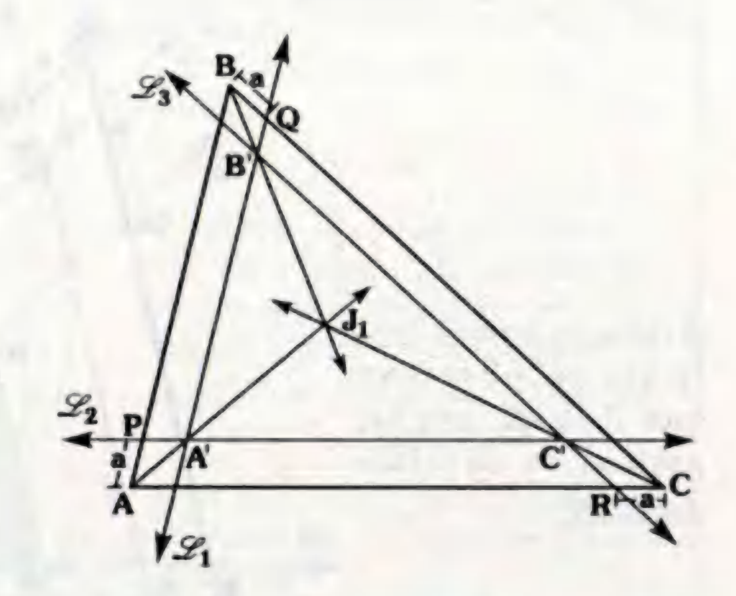
$AP = BQ = CR$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overline{AB}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overline{AC}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overline{BC}$

Se cumple:

$\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ y $\overrightarrow{CC'}$ son concurrentes

$J_1$: Punto de Jerabek




Ahora, si ubicamos $P_1$, $R_1$ y $Q_1$ en $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ y $\overline{BA}$ tal que $AP_1 = BQ_1 = CR_1$ y con un procedimiento similar encontraremos un segundo punto de Jerabek $(J_2)$.

En el gráfico:

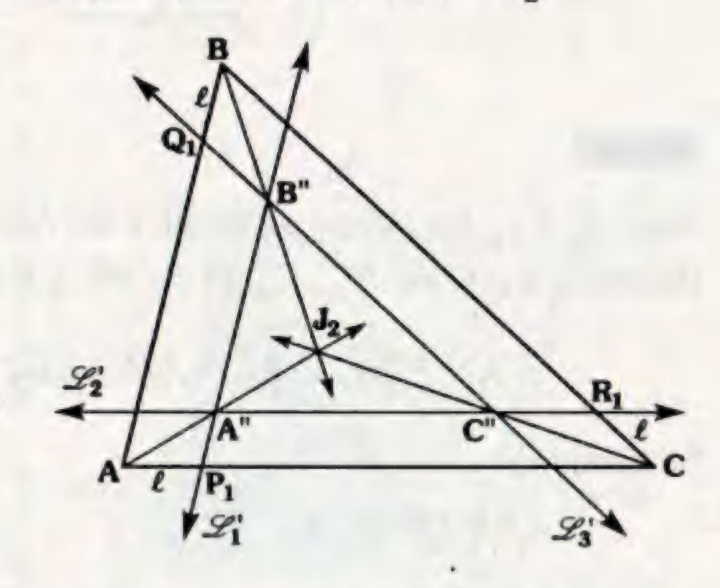
$AP_1 = BQ_1 = CR_1$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}'_1} // \overline{AB}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}'_2} // \overline{AC}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}'_3} // \overline{BC}$

También:

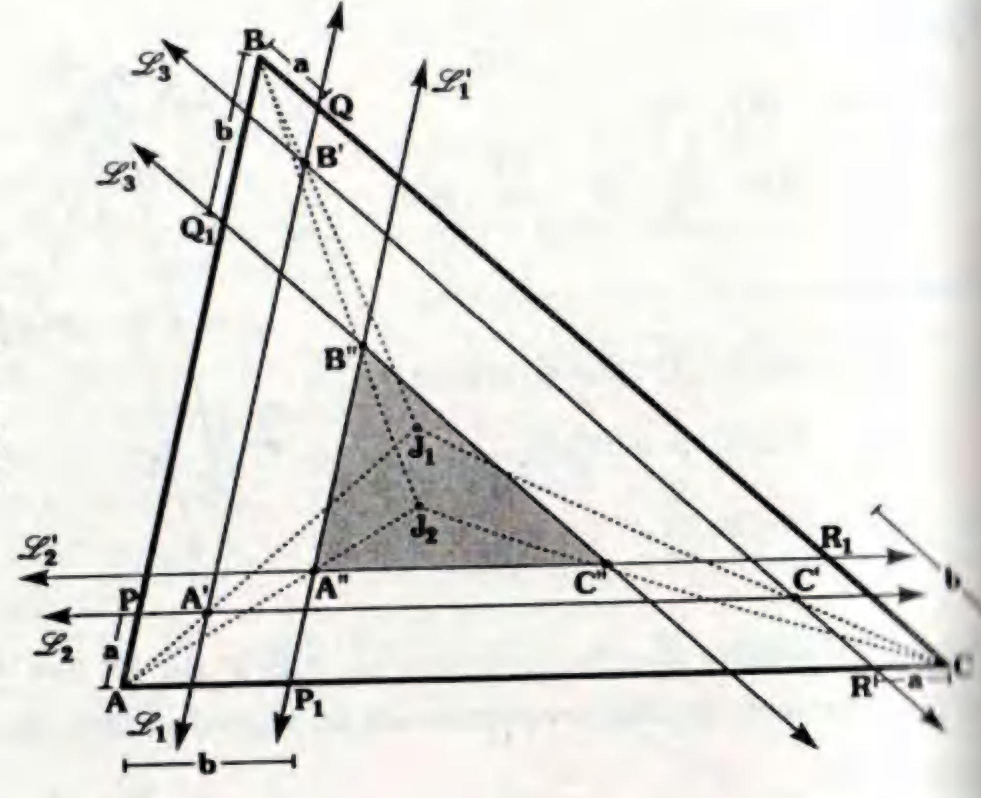
$\overrightarrow{AA''}$, $\overrightarrow{BB''}$ y $\overrightarrow{CC''}$ son concurrentes

$J_2$: Punto de Jerabek




**Observación**

- *En un triángulo se pueden ubicar dos puntos de Jerabek en la parte interna.*
- *La demostración de la concurrencia no es díficil, en virtud que $J_1$ ó $J_2$ son centros de homotecia del triángulo determinado con las paralelas y el triángulo inicial (Ver homotecia).*



Juntando ambos gráficos, se observan que $J_1$ y $J_2$ son los puntos de Jerabek del $\triangle ABC$.

**TEOREMA**

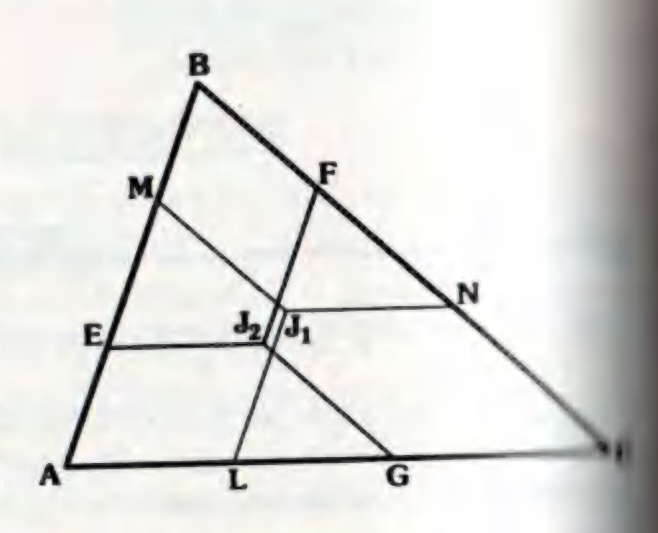
Sean $J_1$ y $J_2$ los puntos de Jerabek del ABC (considerando los gráficos anteriores) si ubicamos L y G en $\overline{AC}$, E y M en $\overline{AB}$ y F y N en $\overline{BC}$ tal que:

$$\overline{J_1N} \parallel \overline{EJ_2} \parallel \overline{AC}, \quad \overline{J_1M} \parallel \overline{GJ_2} \parallel \overline{CB} \quad y \quad \overline{J_1L} \parallel \overline{FJ_2} \parallel \overline{BA}$$

Se cumple:

$$J_1L = J_1M = J_1N \quad y$$

$$J_2E = J_2F = J_2G$$

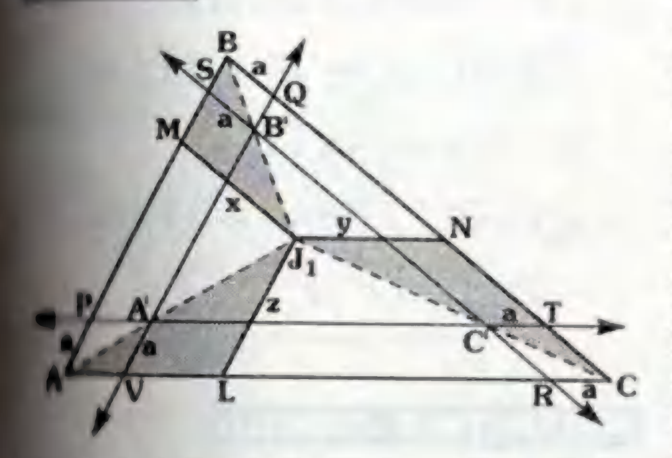


En el gráfico:

Sean: $J_1$ y $J_2$ los puntos de Jerabek

($J_1$ obtenido al ubicar los puntos P, Q y R en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ tal que AP=BQ=CR, del primer gráfico y $J_2$ del segundo gráfico).

*Demostración:*




Del gráfico $J_1$ es punto de Jerabek, se ha trazado $\overline{J_1L} // \overline{AB}$, $\overline{J_1M} // \overline{BC}$ y $\overline{J_1N} // \overline{AC}$, vamos a demostrar: x=y=z

$$\Delta ALJ_1 \sim \Delta AVA' \Rightarrow \frac{z}{a} = \frac{AJ_1}{AA'}$$

$$\Delta CNJ_1 \sim \Delta CTC' \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{CJ_1}{CC'}$$

$$\Delta BMJ_1 \sim \Delta BSB' \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{BJ_1}{BB'}$$

$\Delta AJ_1B$, por Teorema de Tales:

$$\frac{AJ_1}{AA'} = \frac{BJ_1}{BB'}$$

En forma análoga en el $\Delta BJ_1C$:

$$\frac{BJ_1}{BB'} = \frac{CJ_1}{CC'}$$

Se concluye:

$$\frac{z}{a} = \frac{y}{a} = \frac{x}{a}$$

$$\therefore \; x=y=z$$

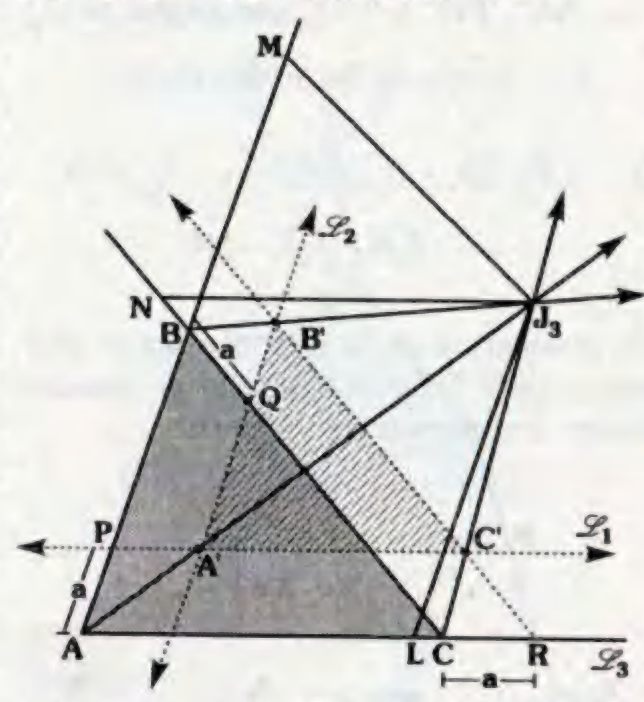
**Nota**

- *De la misma forma se procede para $J_2$:*

$$J_2E = J_2F = J_2G$$

- *Si alguno de los puntos ubicados sobre los lados (P, Q o R considerados al comienzo) se ubica en alguna de las prolongaciones se obtendrán dos puntos exteriores de Jerabek respecto a cada lado.*
- *Resulta un total de ocho puntos de Jerabek : dos interiores y seis exteriores.*

**Analizando el caso externo:**




Del gráfico: AP=BQ=CR

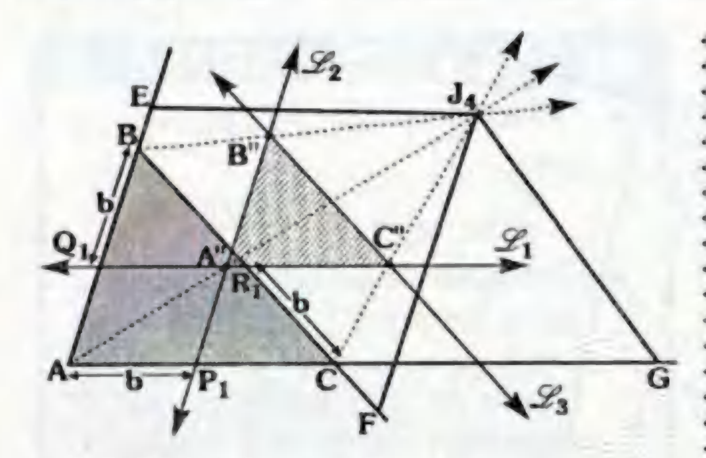
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overline{AC}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overline{AB}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overline{BC}$

$\Rightarrow \overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ concurren en $J_3$.

$J_3$: Punto de Jerabek exterior.

Si : $\overline{J_3N} // \overline{J_3L} // \overline{AB}$ y $\overline{JM} // \overline{CB}$

$\Rightarrow J_3N = J_3L = JM$




En el gráfico:

$BQ_1 = AP_1 = CR_1$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overline{AC}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overline{AB}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} // \overline{BC}$

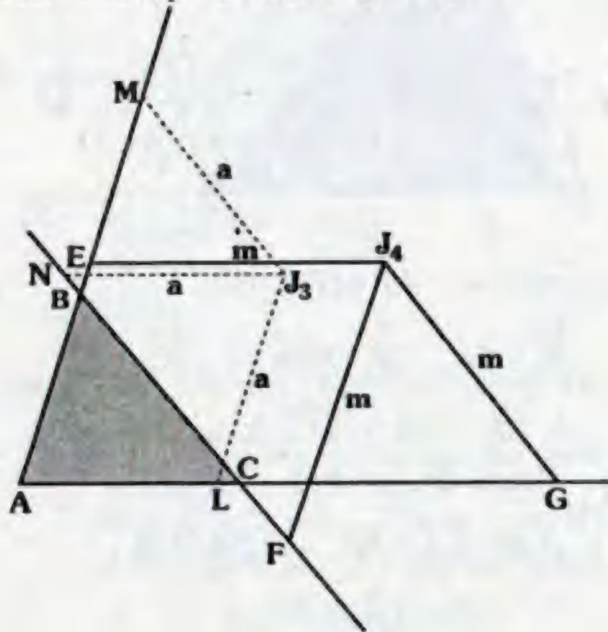
$\Rightarrow \overrightarrow{AA''}$, $\overrightarrow{BB''}$ y $\overrightarrow{CC''}$ concurren en $J_4$

$J_4$: Punto de Jerabak exterior

Si $\overline{J_4F} // \overline{BA}$, $\overline{J_4E} // \overline{CA}$ y $\overline{J_4G} // \overline{BC}$

$\Rightarrow J_4E = J_4F = J_4G$

De lo anterior, en la región exterior relativa a cada lado vemos que se pueden ubicar dos puntos de Jerabek.




$J_3$ y $J_4$: Puntos de Jerabek

$\overline{J_3N} // \overline{AC}$, $\overline{J_3M} // \overline{BC}$ y $\overline{J_3L} // \overline{BA}$

$\Rightarrow J_3N = J_3M = J_3L$

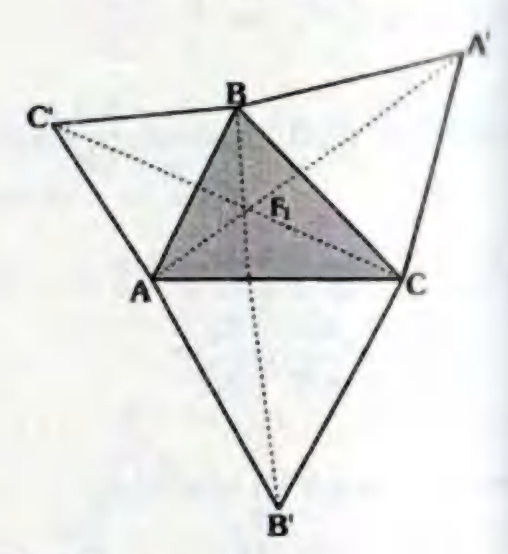
$J_4E // \overline{AC}$, $\overline{J_4G} // \overline{BC}$ y $\overline{J_4F} // \overline{BA}$

$\Rightarrow J_4E = J_4F = J_4G$

## PUNTO DE FERMAT - TORRICELLI

Dado un triángulo ABC, si sobre los lados se trazan exteriormente los triángulos equiláteros ACB', BCA' y ABC', se cumple $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son concurrentes, a dicho punto se le denomina punto de Fermat además se cumple :

$AA' = BB' = CC'$




En el gráfico:

$\Delta ACB'$, $\Delta BCA'$ y $\Delta ABC'$ equiláteros

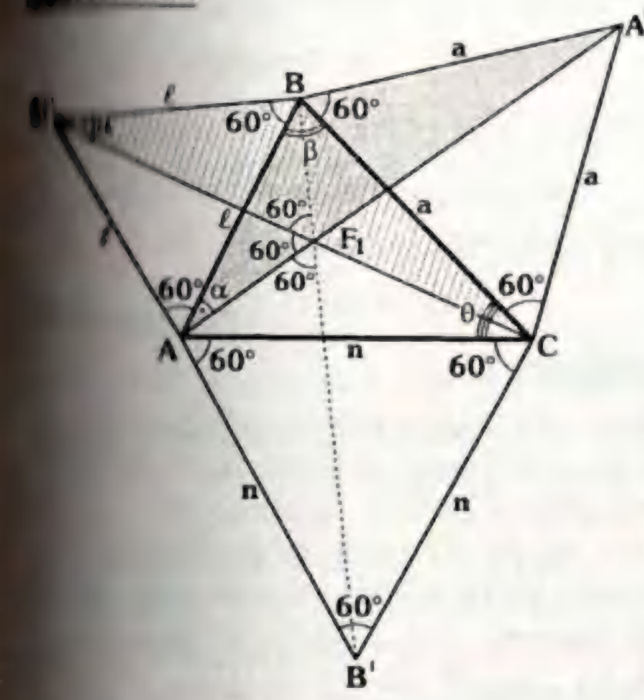
$\Rightarrow \overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son concurrentes

$F_1$: Punto de Fermat

Además :

$$AA' = BB' = CC'$$

*Demostración:*




- En el gráfico se trazan inicialmente los triángulos equiláteros ABC', BCA' y ACB', luego al trazar $\overline{CC'}$ y $\overline{AA'}$ se cortan en $F_1$ vamos a demostrar B, $F_1$ y B' son colineales.
- $\Delta CBC' \cong \Delta ABA'$ (LAL)

  $\Rightarrow m\measuredangle BC'C = m\measuredangle BAA' = \alpha$

  $CC' = AA'$
- $\square AF_1BC'$: Inscriptible

  $\Rightarrow m\measuredangle AF_1C' = 60°$

  $\Rightarrow m\measuredangle C'F_1B = m\measuredangle C'AB = 60°$
- $\square AF_1CB'$ resulta ser inscriptible debido a que:

  $m\measuredangle AB'C = m\measuredangle AF_1C' = 60°$

  $\Rightarrow m\measuredangle AF_1B' = m\measuredangle ACB' = 60°$
- Finalmente:

  $m\measuredangle AF_1B' + m\measuredangle AF_1C' + m\measuredangle C'F_1B = 180°$

  B', $F_1$ y B son colineales.

- Debido a que B', $F_1$ y B son colíneales, se tendrá entonces:

  $\Delta B'CB \cong \Delta ACA'$ (LAL)

  $\Rightarrow BB' = AA'$

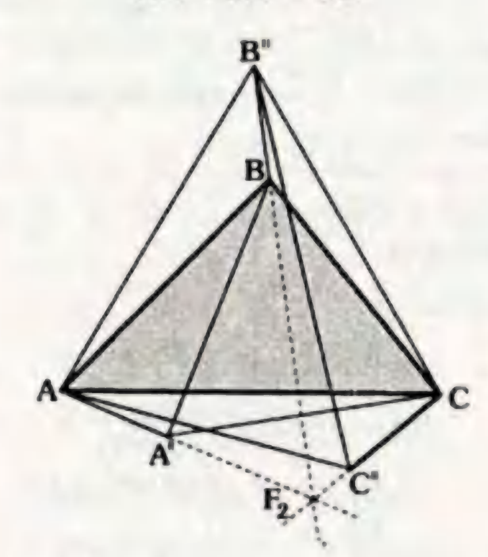
  $\therefore BB' = AA' = CC'$

## SEGUNDO PUNTO DE FERMAT

Dado un triángulo ABC, si ahora trazamos interiormente los triángulos equiláteros ABC", BCA" y ACB", cumple $\overline{AA"}$, $\overline{BB"}$ y $\overline{CC"}$ son concurrentes, a dicho punto de concurrencia se le llama segundo punto de Fermat.

Además se cumple:

$$AA" = BB" = CC"$$




En el gráfico:

$\Delta ACB"$ , $\Delta BCA"$ y $\Delta ABC"$ son equiláteros

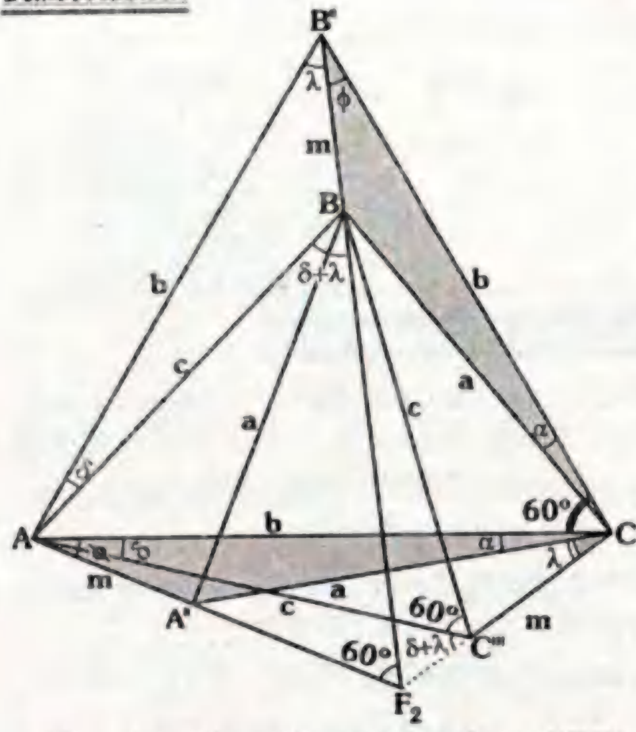
$\Rightarrow$ $\overline{AA"}$, $\overline{BB"}$ y $\overline{CC"}$ con concurrentes

$F_2$ : Segundo punto de Fermat

Además:

$$\boxed{AA" = BB" = CC"}$$

**Demostración:**



- En el gráfico los triángulos ACB", BCA" y ABC" son equiláteros se ha prolongado $\overline{B''B}$ y $\overline{AA''}$ las cuales se cortan en $F_2$.
- Vamos a demostrar C, C" y $F_2$ son colineales.
- Se observa:

$$m\measuredangle ACA'' = m\measuredangle BCB'' = \alpha$$

$$m\measuredangle C''AC = m\measuredangle BAB'' = \delta$$

$$\Delta ACA'' \cong \Delta CB''B \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle CAA'' = m\measuredangle CB''B = \phi$$

$$AA'' = BB'' = m \quad \text{... (I)}$$

$$\Delta C''AC \cong \Delta BAB'' \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle C''AC = m\measuredangle AB''B = \lambda$$

$$CC'' = BB'' = m \quad \text{... (II)}$$

- En $\underset{F_2}{\overset{B''}{A \!\!-\!\! C}}$ : $60° + \phi = \phi + m\measuredangle AF_2B''$

$$\Rightarrow m\measuredangle AF_2B'' = 60°$$

- Luego el $\square F_2ABC''$ es inscriptible:

$$\Rightarrow m\measuredangle AC''F_2 = \delta + \lambda$$

- En el $\Delta ACC''$: $\delta + \lambda = m\measuredangle AC''F_2$

$$\Rightarrow \text{C, C'' y } F_2 \text{ son colineales}$$

- De (I) y (II) se deduce:

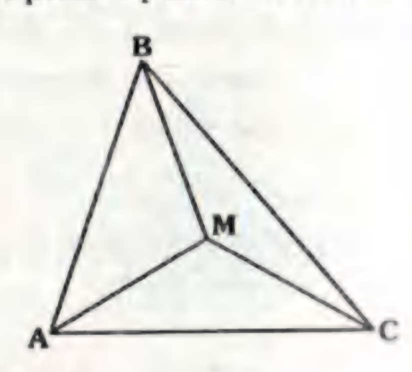
$$AA'' = BB'' = CC''$$

**TEOREMA**

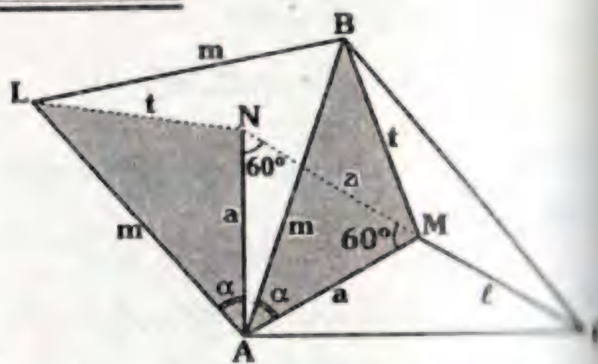
Si se ubica un punto en el plano de un triángulo cuyos ángulos interiores son menores 120°, si la suma de distancias hacia los vértices es mínima entonces dicho punto es el primer punto de Fermat.

En el gráfico:

Si MA+MB+MC es mínimo ⇒ M es el primer punto de Fermat.



**Demostración:**



- Lo que vamos a buscar es MA+MB+MC, para cualquier punto del plano, considerando que el ΔABC es fijo.

- Se trazan los triángulos equiláteros:

  AMN y ABL $\Rightarrow$ $m\measuredangle LAN = m\measuredangle BAM = \alpha$

- Luego:

  $\Delta NAL \cong \Delta MAB$ (L.A.L)

  $\Rightarrow$ $NL = MB$

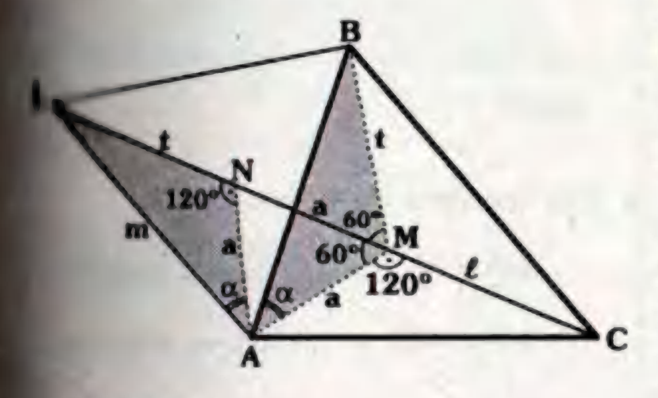
- Se observa:

  $MA + MB + MC = CM + MN + NL$

  Pero debido a que el triángulo ABC es fijo $\Rightarrow$ L también es fijo.

- Lo que se busca es MA+MB+MC mínimo, que será lo mismo que CM+MN+NL mínimo, lo cual se dará cuando C, M, N y L sean colineales y más aún como C y L son fijos $\Rightarrow$ M y N en $\overleftrightarrow{CL}$.

- Así tenemos:




- De lo anterior se deduce M es el primer punto de Fermat, debido a que se encuentra $\overline{CL}$ y $m\measuredangle AML = 60°$.

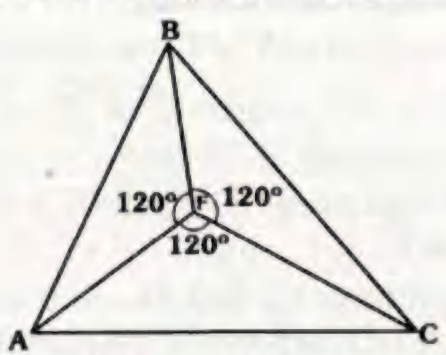
- También se nota:

  $m\measuredangle AMC = m\measuredangle AMB = m\measuredangle BMC = 120°$

**Nota**

- *Sea F el primer punto de Fermat del $\Delta$ABC cuyas medidas de sus ángulos interiores menores a 120°. Se cumplirá:*

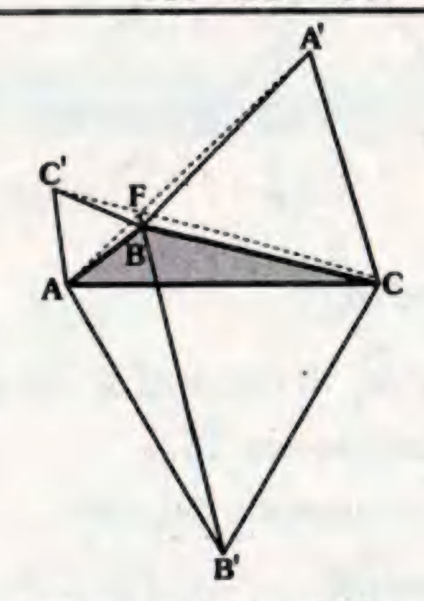
  $m\measuredangle AFB = m\measuredangle BFC = m\measuredangle CFA = 120°$




*F es punto de Fermat*

- *Si el triángulo ABC tiene un ángulo interior cuya medida es mayor a 120°, el punto de Fermat (F) es externo, seguirá cumpliendo :*

  $AA' = BB' = CC'$




En el gráfico: $m\measuredangle ABC > 120°$

$\Delta ABC'$, $\Delta BCA'$ y $\Delta ACB'$ son equiláteros.

Se cumple: $\overline{B'B}$, $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$ concurren en F.

Además: $AA' = BB' = CC'$

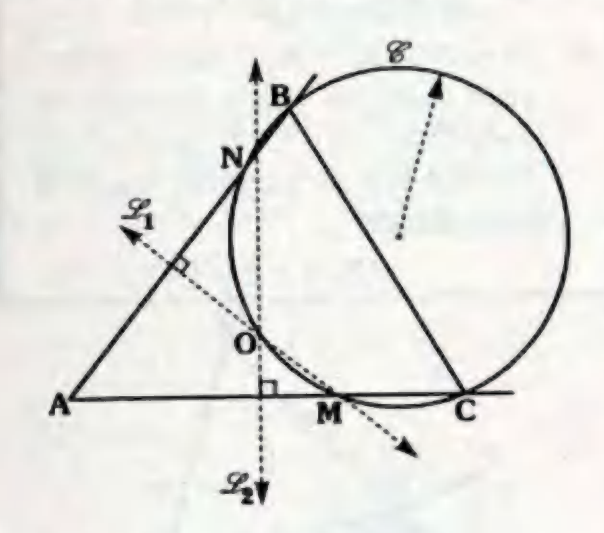
## 14. CIRCUNFERENCIAS NOTABLES

En esta sección estuidiaremos aquellas circunferencias que pasan por puntos determinados por alguna característica respecto a un triángulo. A dichas circunferencias llamaremos circunferencias notables.

### CIRCUNFERENCIA DE MANNHEIM

Dado un triángulo ABC, las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ intersecan a $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ respectivamente en M y N. Se cumple que el circuncentro, M, C, B y N son concíclicos.

La circunferencia que las contiene se denomina circunferencia de Mannheim.



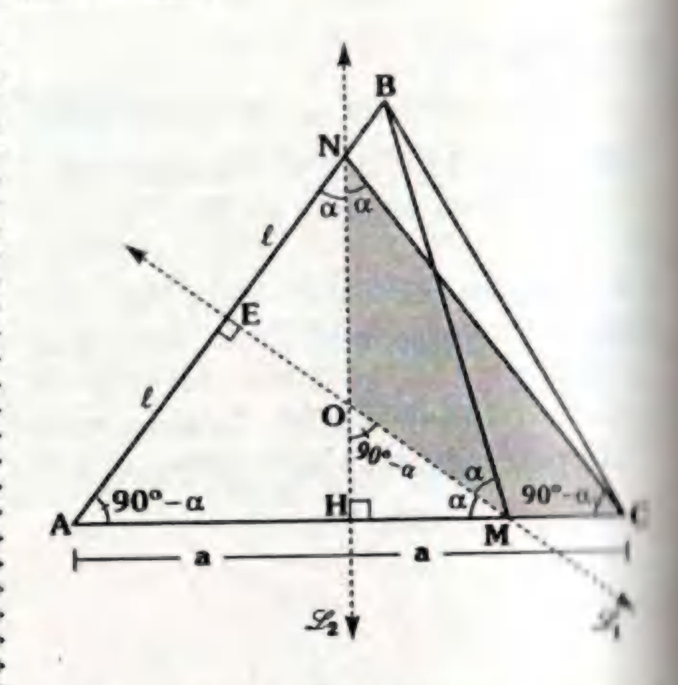

En el gráfico:

- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ es mediatriz de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.
- O es circuncentro del $\Delta ABC$.
- Se cumple:

**O, M, C, B y N: Concíclicos**

$\mathscr{C}$: Circunferencia de Mannheim

**Demostración:**




- En el gráfico O es circuncentro del $\Delta ABC$.
- Por teorema de la mediatriz.

  $NA = NC \Rightarrow \Delta ANC$ es isósceles

  $MA = MB \Rightarrow \Delta AMB$ es isósceles

- Debido a $m\measuredangle HOM = m\measuredangle MCN = 90° - \alpha$

  $\Rightarrow$ ⏢NOMC: Inscriptible

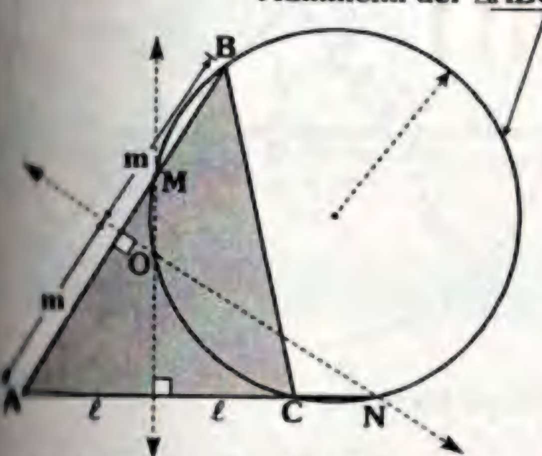
  $m\measuredangle OMA = m\measuredangle ONA = \alpha$

  $\Rightarrow$ ⏢MONB: Inscriptible

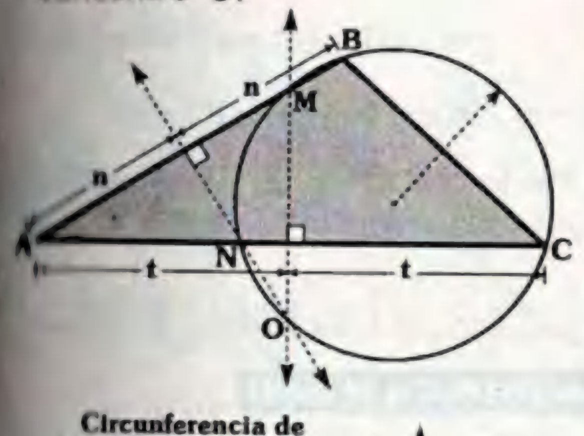
$\therefore$ O, M, C, B y N son concíclicos

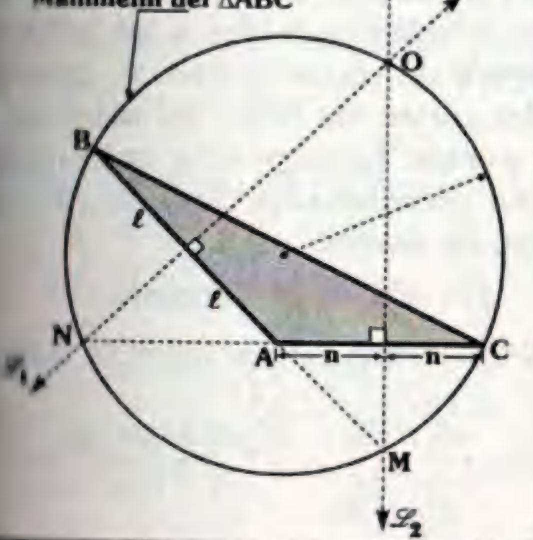
**Observación**

- *Para las siguientes posibilidades de la circunferencia, la demostración es análoga (O es circunferencia del* $\Delta ABC$ *).*



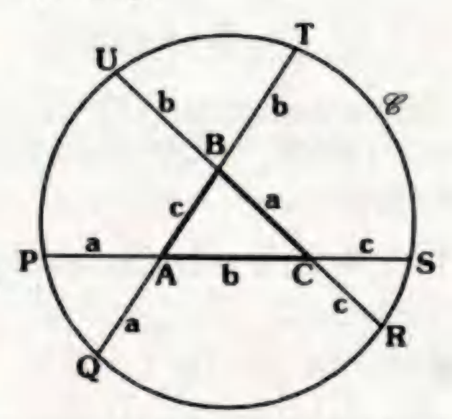

- *Si el* $\Delta ABC$ *es obtusángulo de circuncentro O:*




## CIRCUNFERENCIA DE CONWAY

Si las longitudes de las prolongaciones de los lados de un triángulo son iguales a la longitud del lado opuesto al vértice desde el cual se ha trazado las prolongaciones, entonces los extremos de las prolongaciones se encuentran en una misma circunferencia, llamada circunferencia de Conway.



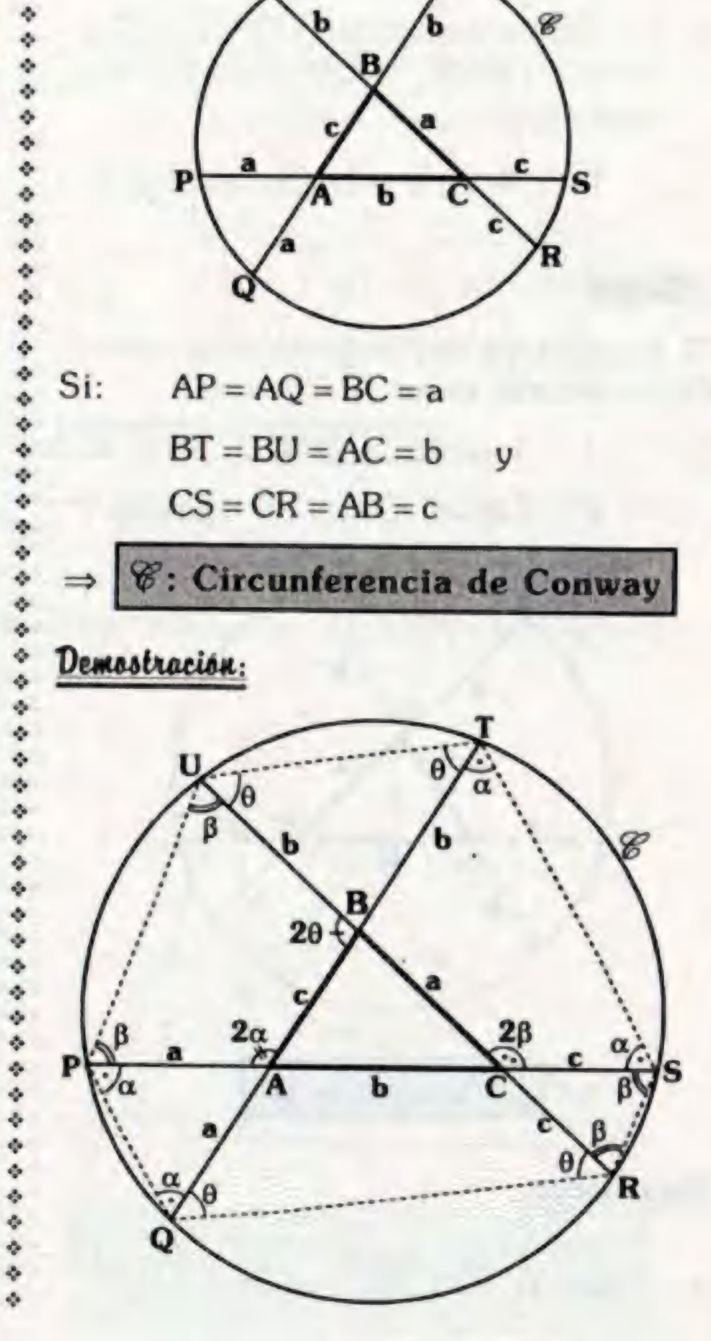

Si: $AP = AQ = BC = a$

$BT = BU = AC = b$ y

$CS = CR = AB = c$

$\Rightarrow$ **$\mathscr{C}$: Circunferencia de Conway**

**Demostración:**



- Los triángulos APQ y ATS son isósceles.

$\Rightarrow$ m∡APQ=m∡AQP

m∡ATB = m∡ABT = $\alpha$

- Análogamente:

m∡UPC = m∡PUC = m∡CSR = m∡CRS = $\beta$

m∡BUT = m∡BTU = m∡BQR = m∡BRQ = $\theta$

- $\Delta ABC$ : $2\alpha + 2\beta + 2\theta = 360°$

$\Rightarrow \quad \alpha + \beta + \theta = 180°$

- Por ello los cuadriláteros QPUT, PUTS, UTSR, TSRQ, SRQP y RQPU son inscriptibles.

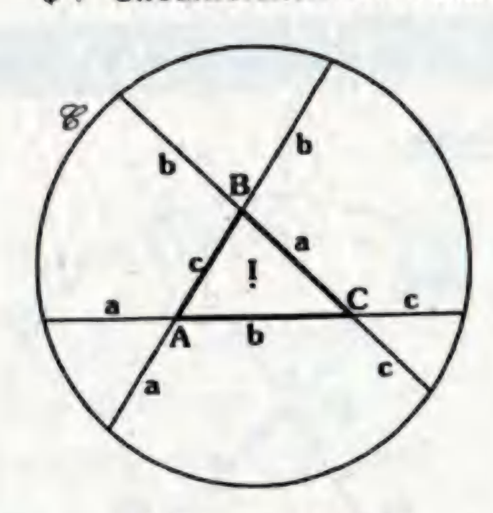
$\therefore$ P, Q, R, S, T y U son concíclicos

**TEOREMA**

El incentro de un triángulo es el centro de su circunferencia de Conway.

Si: I : Incentro de ABC y

$\mathscr{C}$ : Circunferencia de Conway.



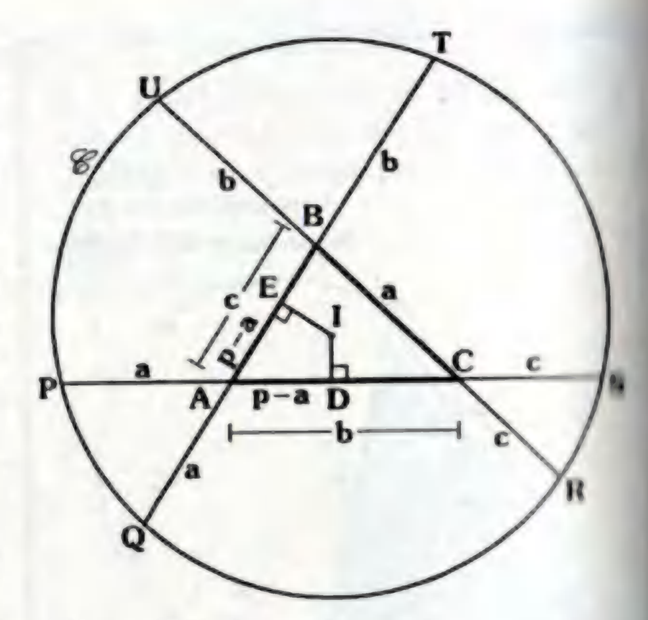




$\Rightarrow$ **I: Centro de $\mathscr{C}$**

**Demostración:**

- Trazamos $\overline{ID} \perp \overline{AC}$ e $\overline{IE} \perp \overline{AB}$




- Por el teorema 8.1:

$$AD = AE = p - a$$

- Se observa que:

$$PS = QT = UR = a + b + c = 2p$$

$$\Rightarrow PD = DS = QE = ET = p$$

- Por lo cual $\overleftrightarrow{DI}$ y $\overleftrightarrow{EI}$ son mediatrices de $\overline{PS}$ y $\overline{QT}$.

$\therefore$ I : Centro de $\mathscr{C}$

## CIRCUNFERENCIA DE ADAMS

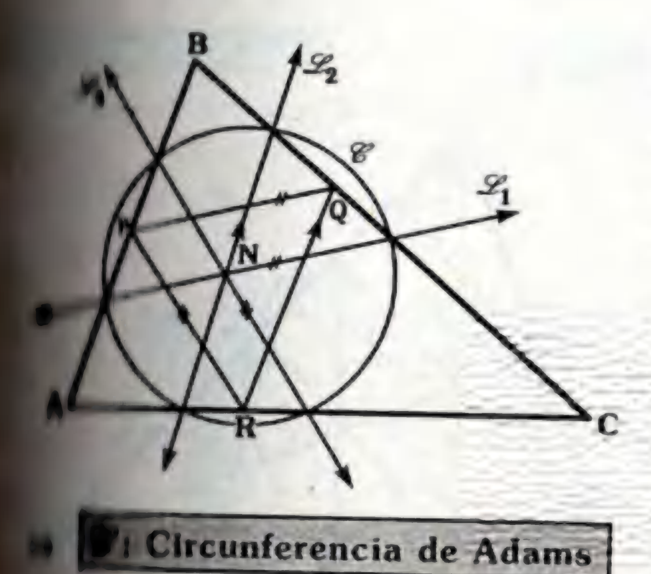
Si por el punto de Georgonne de un triángulo se trazan paralelas a los lados del triángulo de contacto interior, estas paralelas cortan los lados del triángulo en seis puntos. Estos puntos están en una misma circunferencia, llamada circunferencia de Adams.

Si: N : Punto de Georgonne

$\Delta PQR$ : Triángulo de contacto interior

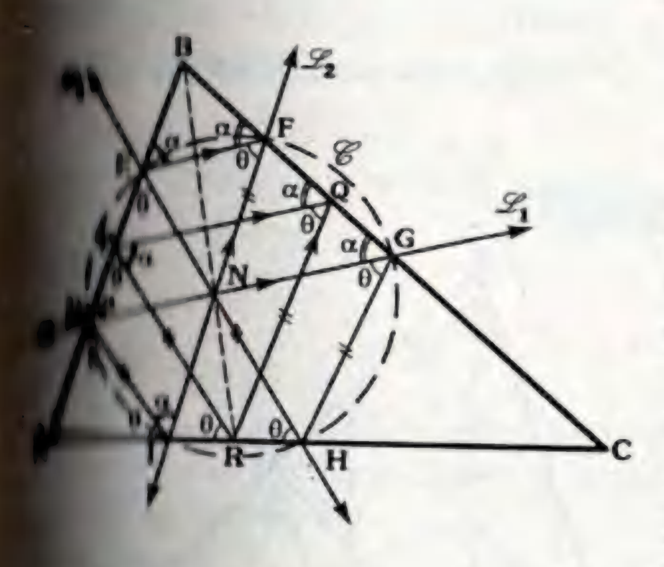
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overline{PQ}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \parallel \overline{QR}$ y

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \parallel \overline{PR}$




⇒ **$\mathscr{C}$: Circunferencia de Adams**

**Explicación:**




- △PQR : △ de contacto interior ⇒ PB=BQ

  AP = AR y CR = CQ ...(I)

- △PBR : Teorema de Tales

  $\dfrac{PB}{PE}=\dfrac{BR}{NR}$ ...(II)

- △BQR : Teorema de Tales

  $\dfrac{PQ}{FQ}=\dfrac{BR}{NR}$ ...(III)

- De (I), (II) y (III) : PE=FQ
- DEFG: Trapecio isósceles

  ⇒ G, F, E y D: Concíclicos
- Se sabe: $m\measuredangle ARP = m\measuredangle PQR = \theta$
- Análogamente:

  EHID: Trapecio isósceles

  ⇒ F, E, D y I: Concíclicos

  E, D, I y H: Concíclicos
- IFGH: Trapecio isósceles

  ⇒ $m\measuredangle FGH = \alpha+\theta$

  ⇒ D, I, H y G: Concíclicos

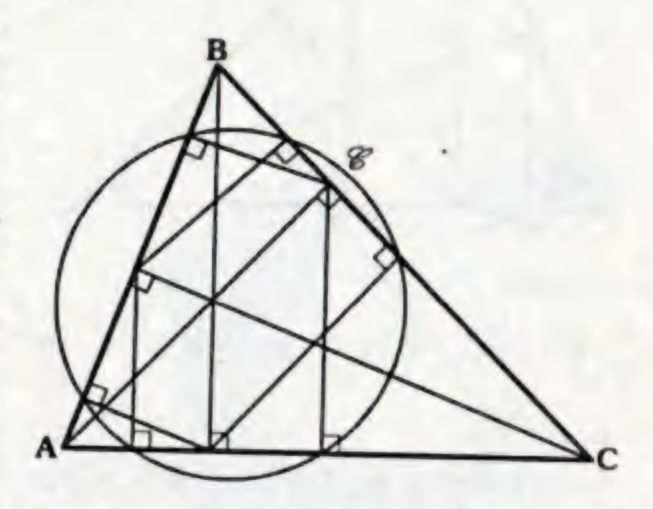
  I, H, G y F: Concíclicos

  H, G, F y E: Concíclicos

  ∴ G, F, E, D, I, H: Concíclicos

## CIRCUNFERENCIA DE TAYLOR

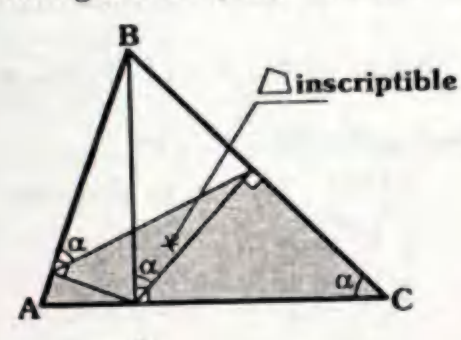
Las proyecciones de los pies de las alturas de un triángulo sobre los lados se ubican en una misma circunferencia, conocida como la circunferencia de Taylor.

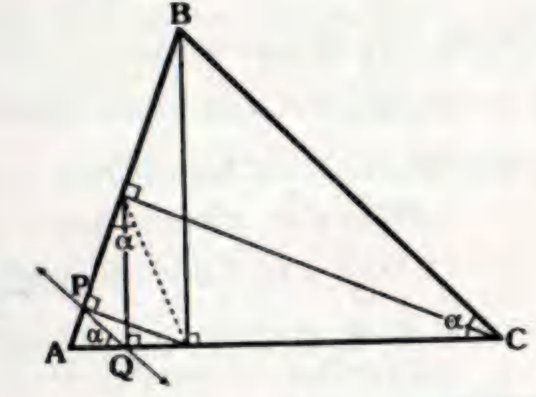



**$\mathscr{C}$: Circunferencia de Taylor del △ABC.**

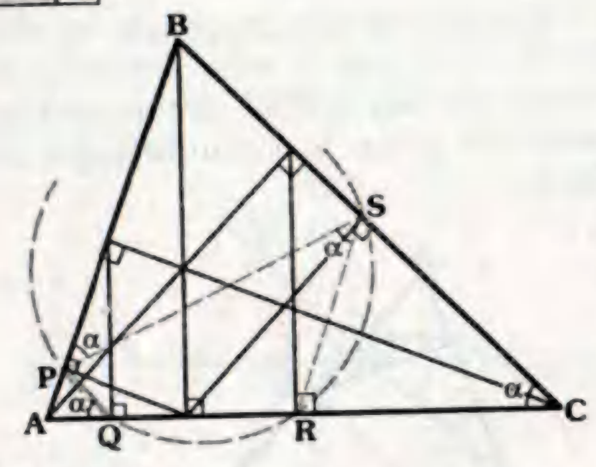
***Demostración:***

- Para la demostración tener en cuenta, las siguientes propiedades.




**Paso 1**




- Como:

  $\overline{PQ} // \overline{BC} \Rightarrow m\measuredangle PQA = m\measuredangle BCA = \alpha$

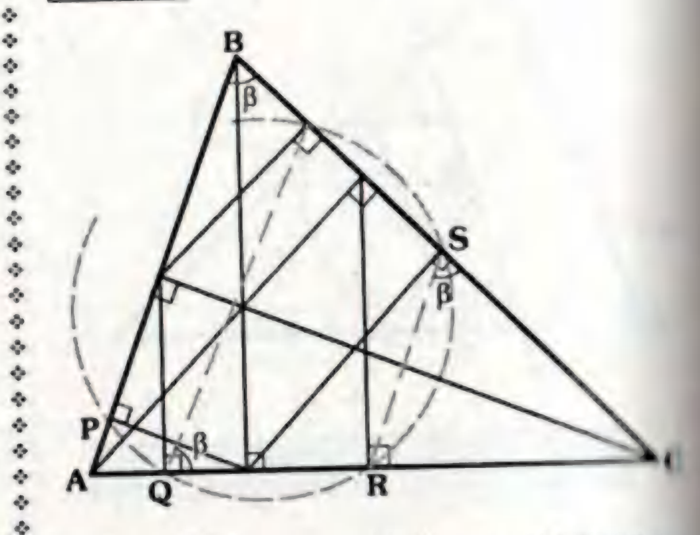
- ⌂APSC:

  Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle BPS = m\measuredangle BCA = \alpha$

- Se sabe : $\overline{SR} // \overline{AB} \Rightarrow m\measuredangle PSR = \alpha$

  $\therefore$ P, Q, R y S son concíclicos

**Paso 2**

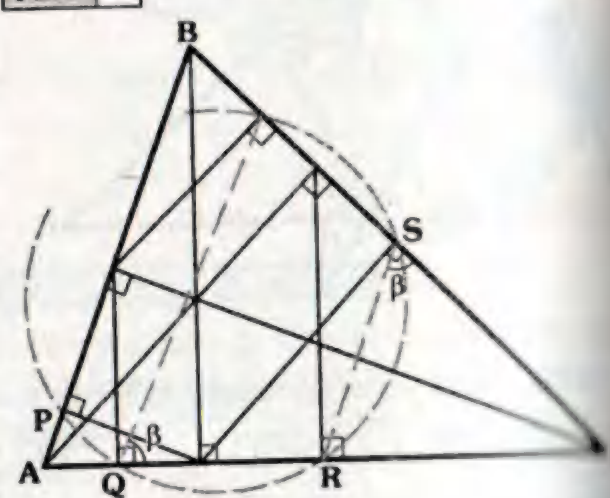



- $\overline{RS} // \overline{AB} \Rightarrow m\measuredangle ABC = m\measuredangle RSC = \beta$
- ⌂ABTQ:

  Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle TQC = \beta$

  $\therefore$ Q, R, S y T son concíclicos

**Paso 3**




- Análogamente:

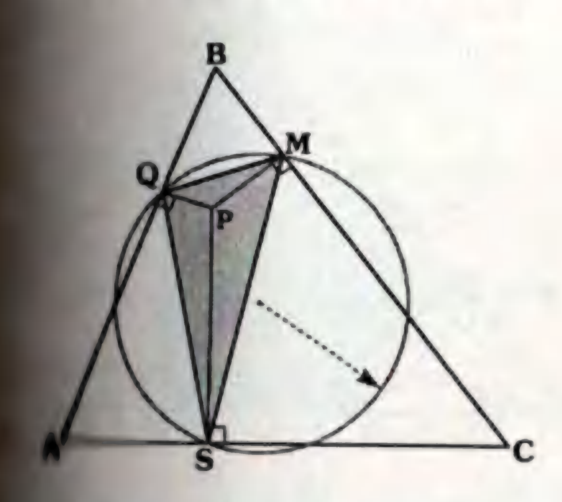
  R, S, T y U son concíclicos.
  S, T, U y P son concíclicos.
  T, U, P y Q son concíclicos.
  U, P, Q y R son concíclicos.

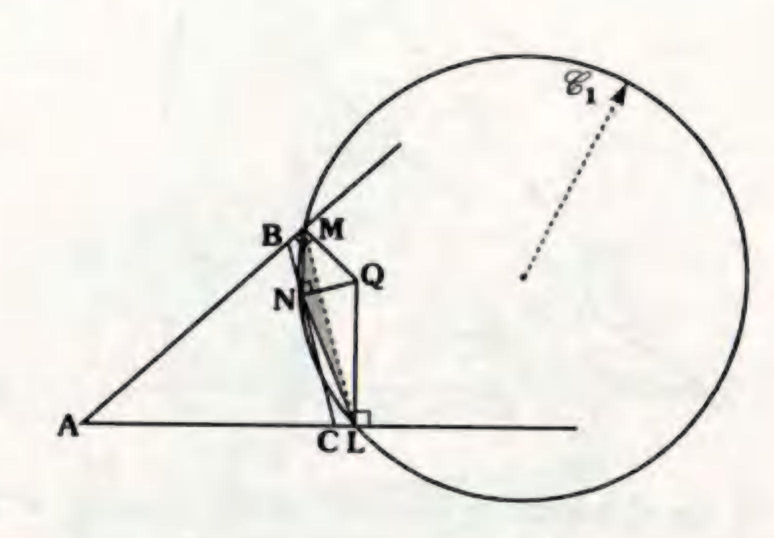
- Por teorema de configuración:

  $\therefore$ P, Q, R, S, T y U son concíclicos

## CIRCUNFERENCIA PEDAL

Es la circunferencia circunscrita al triángulo pedal.




En el gráfico:

$\Delta QMS$ : Triángulo pedal del $\Delta ABS$, respecto de P.

$\mathscr{C}$ : Circunferencia Pedal respecto de P.

$\Delta MNL$ : Triángulo pedal del $\Delta ABS$ respecto de Q.

$\mathscr{C}_1$ : Circunferencia pedal respecto de Q.

### TEOREMA

La circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo pedal (circunferencia pedal) interseca a los lados del triángulo dado en otros tres puntos los cuales son vértices de otro triángulo pedal.

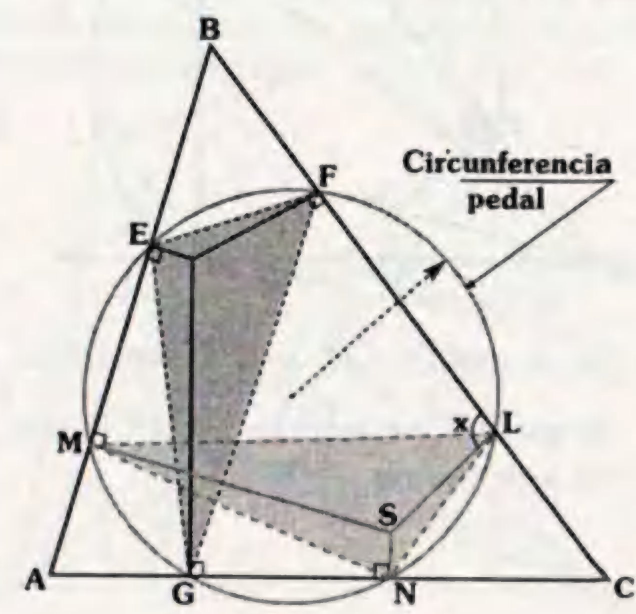
En el gráfico:

$\Delta EFG$ : Triángulo pedal del $\Delta ABC$ respecto de P.

Si trazamos las perpendiculares en M y L a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, se encuentra S, se cumple:

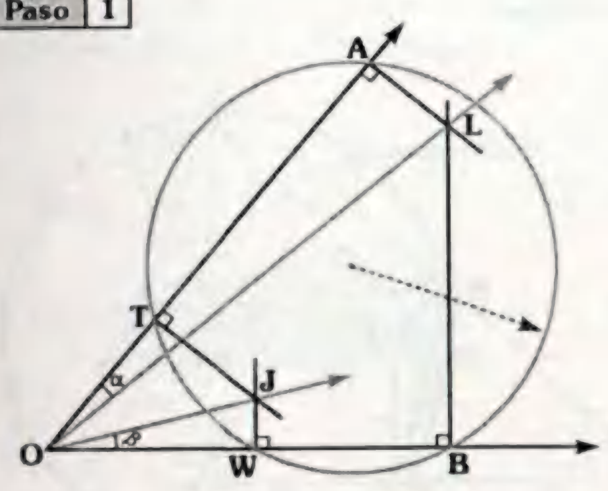
$$m\measuredangle SLB = 90°$$

⇒ $\Delta MNL$ : Triángulo Pedal del $\Delta ABC$.



**Demostración:**

**Paso 1**

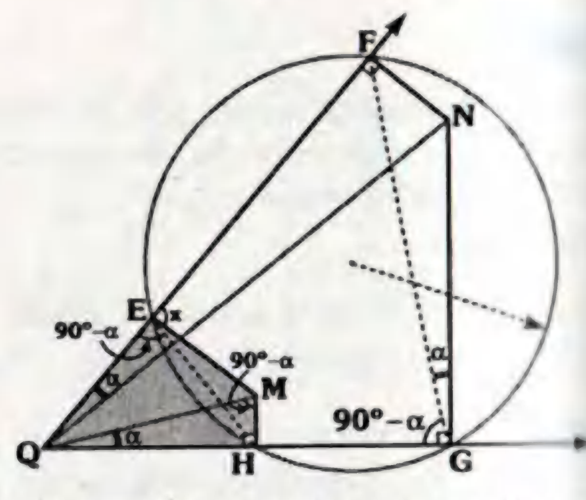


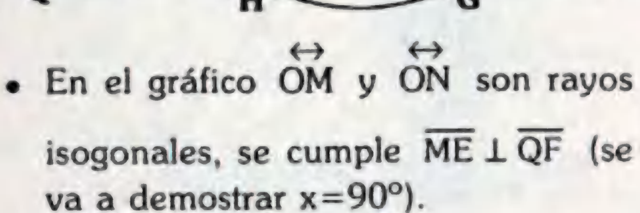

- En el gráfico se cumple: $\alpha = \beta$
- Es decir:

  $\overleftrightarrow{OL}$ y $\overleftrightarrow{OJ}$ son rayos isogonales del $\measuredangle AOB$.

- $\triangle$OTJW y $\triangle$OALB: Inscriptibles
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle WTJ = \beta$ y $m\measuredangle LBA = \alpha$
- $\triangle$WTAB: Inscrito
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle OTW = m\measuredangle OBA$
  $90° - \beta = 90° - \alpha$
  $\therefore$ $\beta = \alpha$

**Paso 2** ***(recíproco)***

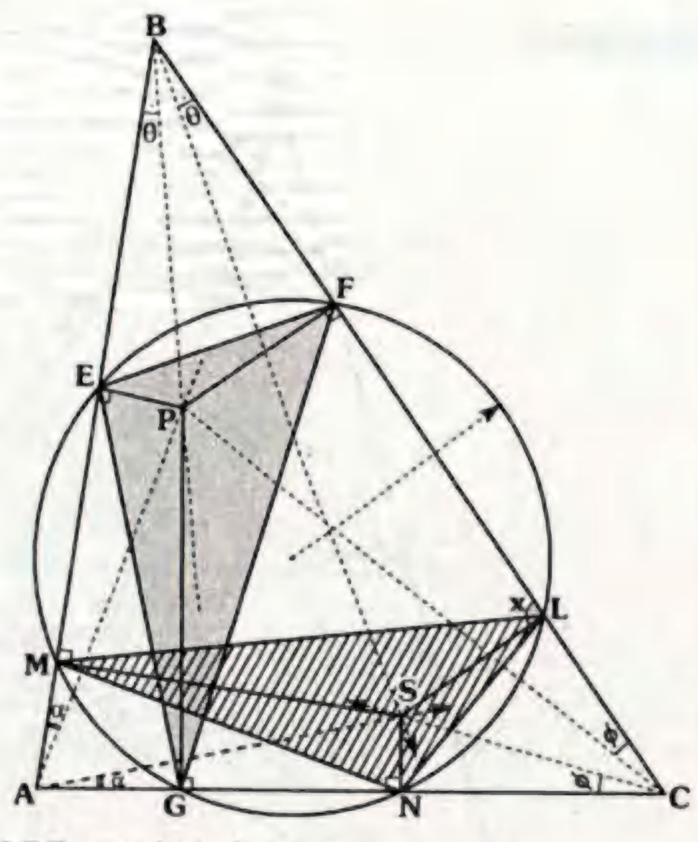


- En el gráfico $\overleftrightarrow{OM}$ y $\overleftrightarrow{ON}$ son rayos isogonales, se cumple $\overline{ME} \perp \overline{QF}$ (se va a demostrar x=90°).

- $\triangle$QFNG: Inscriptible $\Rightarrow$ $m\measuredangle FGN = \alpha$
- $\triangle$EFGH:Inscrito $\Rightarrow$ $m\measuredangle HEG = 90° - \alpha$
- Debido a que:
  $m\measuredangle QEH = m\measuredangle QMH = 90° - \alpha$
  $\Rightarrow$ $\triangle$QEMH: Inscriptible
  $\therefore$ $m\measuredangle MEF = 90°$

Paso 3




- Por el primer paso:

  m∡SAC = m∡PAE = α

  m∡EBP = m∡SBC = θ

- Por teorema de los puntos conjugados isogonales (P y S en el gráfico) se tiene:

  m∡SCN = m∡PCF = θ

- Por el segundo paso:

  Para el ángulo ACB, se tiene:

  $\overline{SN} \perp \overline{AC}$, $\overline{PG} \perp \overline{AC}$, $\overline{PF} \perp \overline{BC}$ y

  m∡SCN = m∡PCF = ϕ

  $\Rightarrow$ x = 90°

- Con lo cual se concluye que si ΔEFG es triángulo pedal entonces el ΔMNL también lo será:

## CIRCUNFERENCIA DE LOS CINCO PUNTOS O DE LOS MOMENTOS IGUALES

### TEOREMA

Si los lados de un triángulo dado son las bases de los triángulos isósceles trazados interiormente, cuyas áreas de las tres regiones son iguales a la tercera parte del área de la región inicial, entonces los tres vértices de dichos triángulos isósceles, el circuncentro y baricentro del triángulo inicial son concíclicos. La circunferencia que contiene a estos puntos se denomina circunferencia de los cincos puntos.

En el gráfico:

O y G: Circuncentro y baricentro del ΔABS respectivamente.

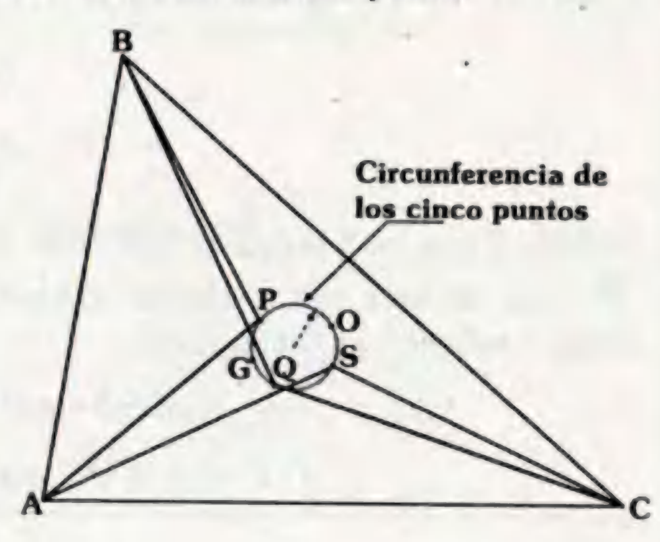
ΔABS , ΔBQS y ΔASC :

Isósceles de bases $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.

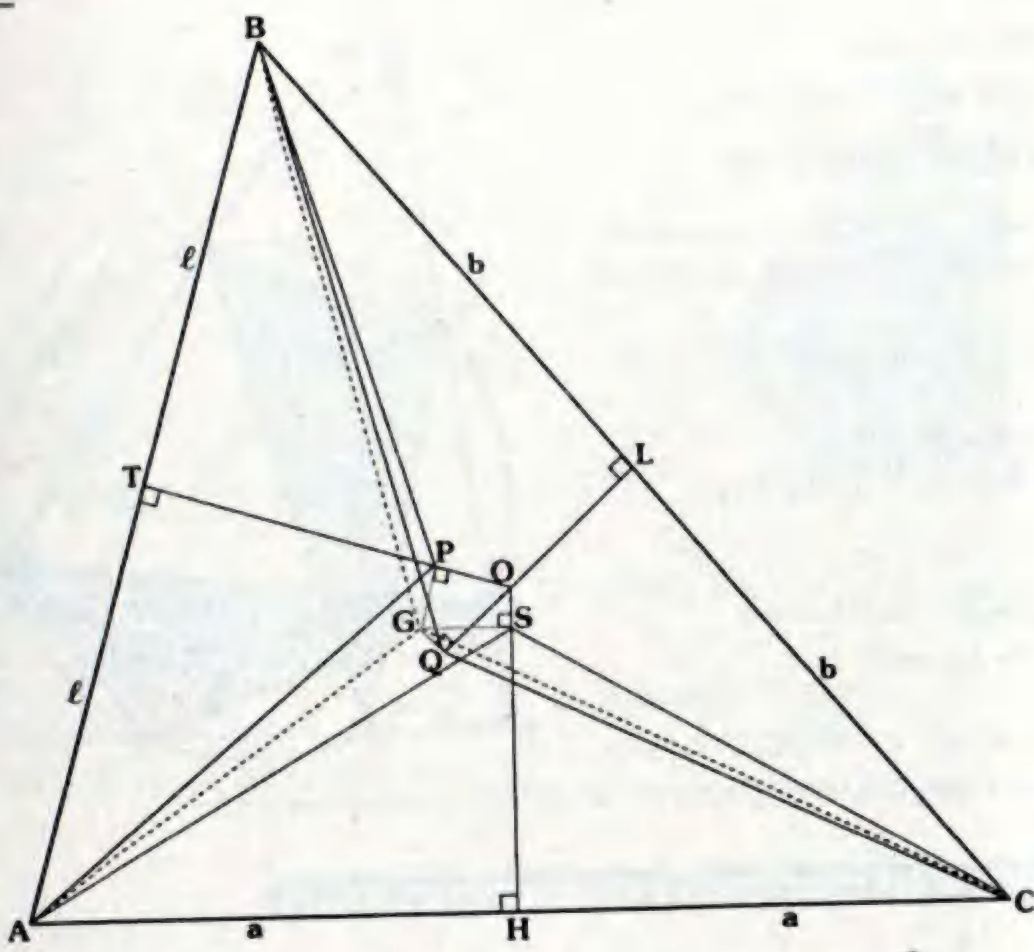
$$S_{\Delta ABP} = S_{\Delta ASC} = S_{\Delta BQC} = \frac{S_{\Delta ABC}}{3}$$

Se cumple :

**O, G, P, Q y S son concíclicos**



*Demostración:*




- Por teorema: Si G es baricentro $\Rightarrow S_{\Delta AGC} = S_{\Delta AGB} = S_{\Delta CGB} = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{3}$
- Luego por condición inicial: $S_{\Delta ABP} = S_{\Delta ASC} = S_{\Delta BQC} = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{3}$
- Acomodando las expresiones: $S_{\Delta AGC} = S_{\Delta ASC} \Rightarrow \overline{GS} // \overline{AC}$

$S_{\Delta AGC} = S_{\Delta APB} \Rightarrow \overline{GP} // \overline{AB}$

$S_{\Delta CGB} = S_{\Delta BQC} \Rightarrow \overline{GQ} // \overline{BC}$

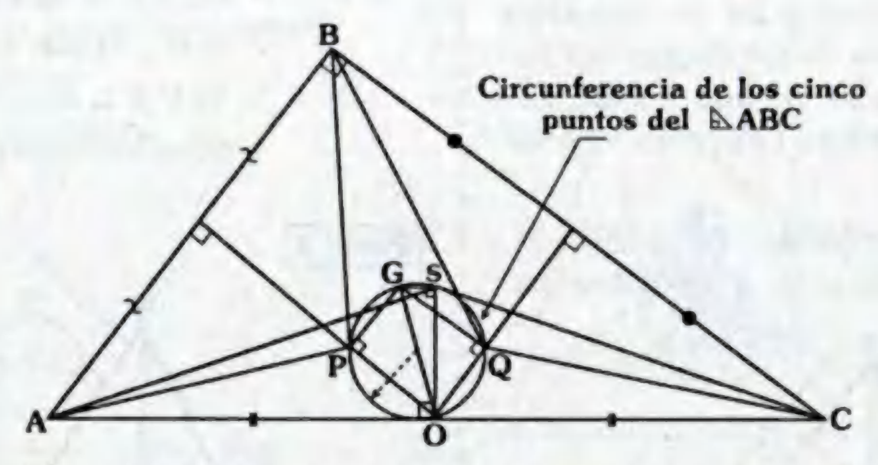
- Debido a que los triángulos ABP, BQC y ASC son isósceles, las alturas $\overline{SH}$, $\overline{QL}$ y $\overline{PT}$ que también son medianas son parte de las mediatrices de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$, luego contienen al circuncentro.

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle GSO = m\measuredangle GPO = m\measuredangle GQO = 90°$$

$\therefore$ G, P, O, S y Q son concíclicos de diámetro $\overline{OG}$.

*Observación*

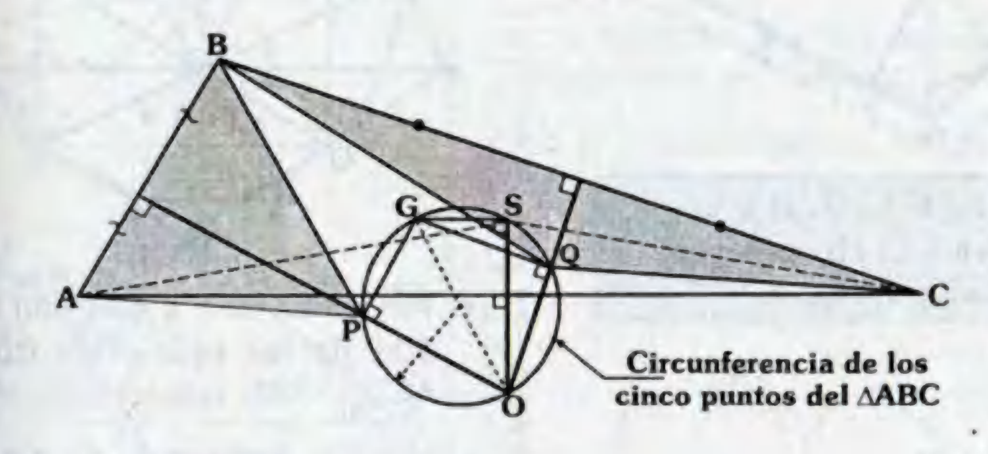
- *Si el triángulo ABC es rectángulo (recto en B).*




*Si :* O *y* G *son circuncentro y baricentro del* $\Delta ABC$.

$$S_{\Delta APB} = S_{\Delta ASC} = S_{\Delta BQC} = \frac{S_{\Delta ABC}}{3}$$

- *Si el triángulo es obtusángulo:*




*Sea:*

$\Delta ABC$ : *Obtusángulo*

O *y* G: *Circuncentro y baricentro de* $\Delta ABC$.

$\Delta APB$, $\Delta BQC$ *y* $\Delta ASC$:

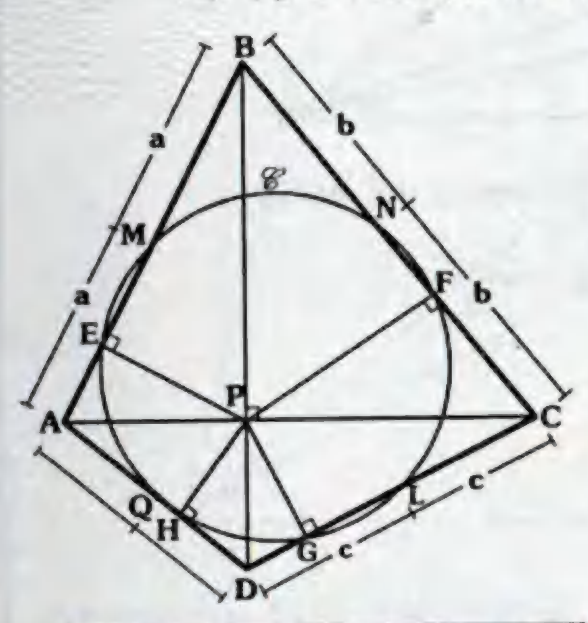
*Isósceles de bases* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *y* $\overline{AC}$ *respectivamente y:*

$$S_{\Delta APB} = S_{\Delta BQC} = S_{\Delta ASC} = \frac{S_{\Delta ABC}}{3}$$

## CIRCUNFERENCIA DE LOS OCHO PUNTOS

Dado un cuadrilátero inscriptible de diagonales perpendiculares, los puntos medios de los lados y las proyecciones del punto de corte de las diagonales hacia los lados están en una misma circunferencia, llamada circunferencia de los ocho puntos.

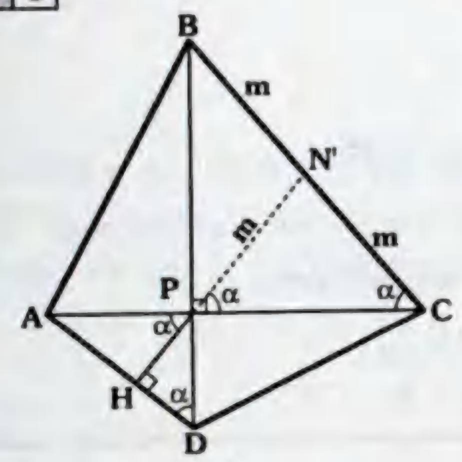
Si ABCD : Inscriptible, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, M, N, L, y D : Puntos medios.




⇒ **E, M, N, F, L, G, H y Q pertenecen a la circunferencia de ocho puntos.**

**Demostración:**

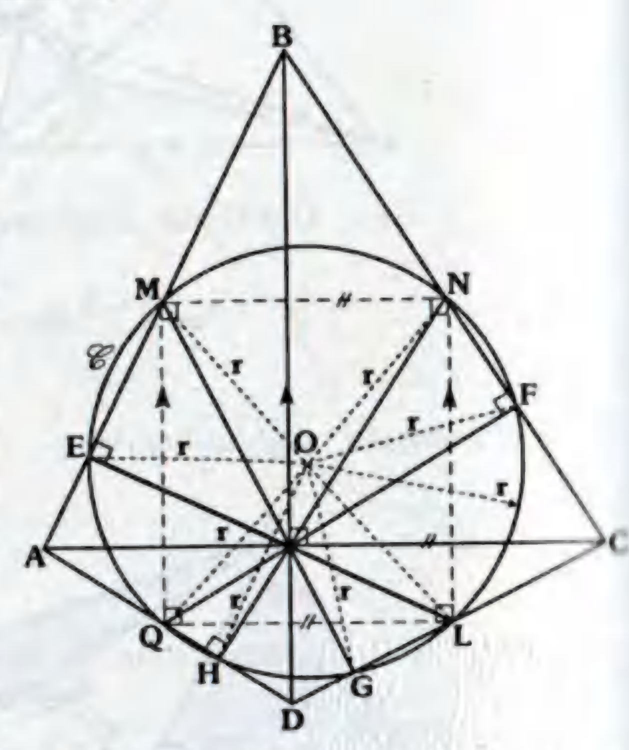
**Paso 1**




- ⊾BPC: Teorema BN' = N'C = m

  ⇒ H, P y N son colineales
  G, P y M son colineales
  F, P y Q son colineales
  E, P y L son colineales
  (*Gráfico anterior*)

**Paso 2**




- $\overline{MN}$, $\overline{NL}$, $\overline{LQ}$ y $\overline{QM}$ son bases medias de los triángulos ABC, BCD, ACD y ABD respectivamente.
- MNLQ: Rectángulo de centro O.

  ⇒ OM=OL=ON=OQ=r
- Por el teorema de la mediana relativa a la hipotenusa en los triángulos QHN, MEL, QFN: OH=r, OE=r y OF=r
- Luego con centro O y radio "r" trazamos $\mathscr{C}$.

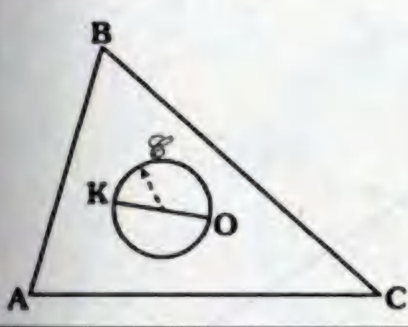
  ∴ H, Q, E, M, N, F, L y G son concíclicos.

## CIRCUNFERENCIA DE BROCARD

Es aquella circunferencia cuyo diámetro es el segmento cuyos extremos son el circuncentro y su punto simediano.

Si O : Circuncentro

K : Punto simediano

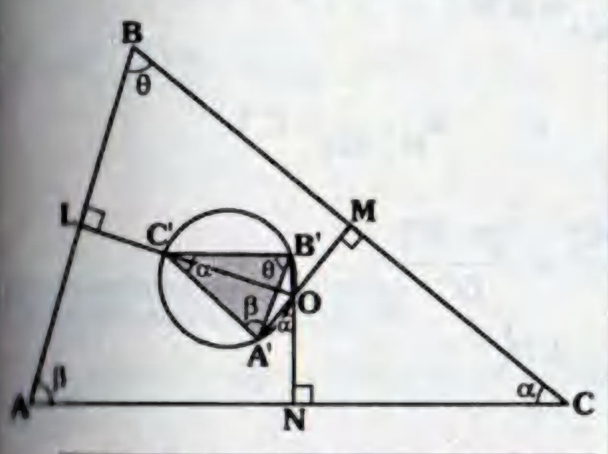



**ℭ : Circunferencia de Brocard**

### Nota

*Si O: Circuncentro y*

*ℭ : Circunferencia de Brocard*



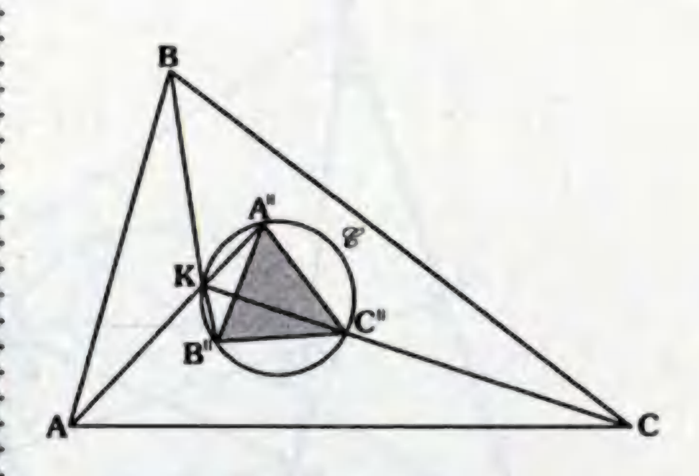

⇒ **ΔA'B'C: *Primer triángulo de Brocard***

- ⏢OMCN : Inscriptible
  ⇒ m∡A'ON=m∡MCN=α
- ⏢ OA'C'B' : Inscrito
  ⇒ m∡A'C'B'=α

∴ ΔA'B'C' ~ ΔABC

Si K : Punto simediano y

ℭ : Circunferencia de Brocard

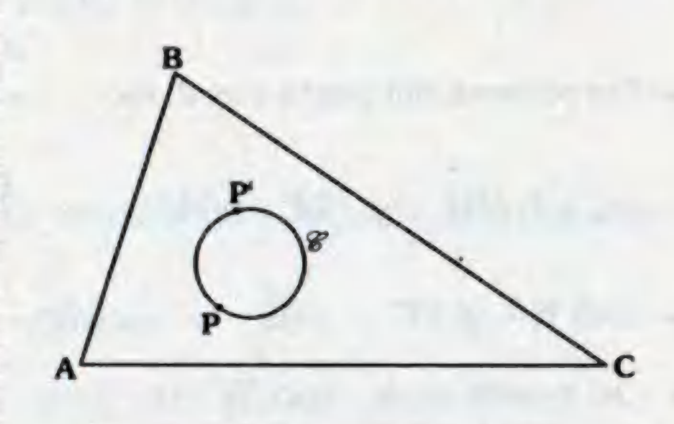



⇒ **ΔA"B"C" : Segundo triángulo de Brocard**

### TEOREMA

Los puntos de Brocard pertenece a la circunferencia de Brocard.

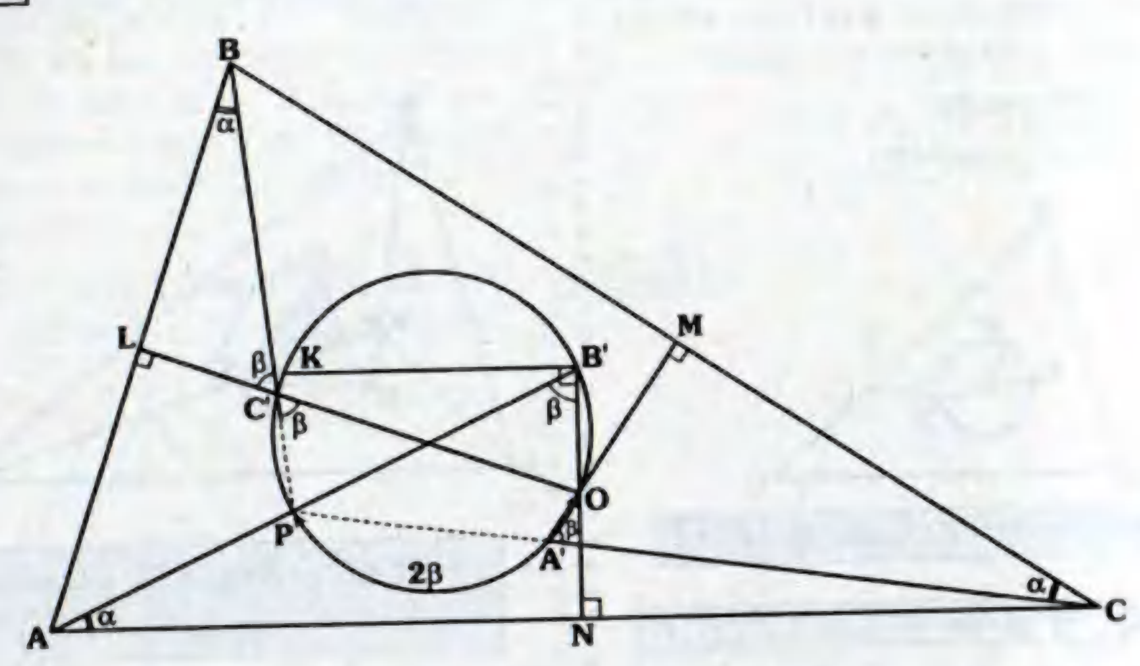
Si ℭ : Circunferencia de Brocard




⇒ **Los puntos de Brocard: P y P' pertenecen a ℭ.**

**Demostración:**

**Paso 1**




- $\overline{OK}$ : Diámetro $\Rightarrow$ $m\measuredangle KB'O = 90°$, con lo cual las distancias de K y B' hacia $\overline{AC}$ son iguales:

$$d_{(K\,,\,\overline{AC})} = B'N$$

- Análogamente: $d_{(K\,,\,\overline{AC})} = A'M$ y $d_{(K\,,\,\overline{AB})} = C'L$

- Por teorema del punto simediano: $\dfrac{d_{(K\,,\,\overline{AC})}}{AC} = \dfrac{d_{(K\,,\,\overline{BC})}}{BC}$

- $AC = 2(AN)$ y $BC = 2(MC)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{B'N}{AN} = \dfrac{A'M}{MC}$

- $\Delta AB'N \sim \Delta A'MC$ : LAL $\Rightarrow$ $m\measuredangle B'AN = m\measuredangle A'CM = \alpha$

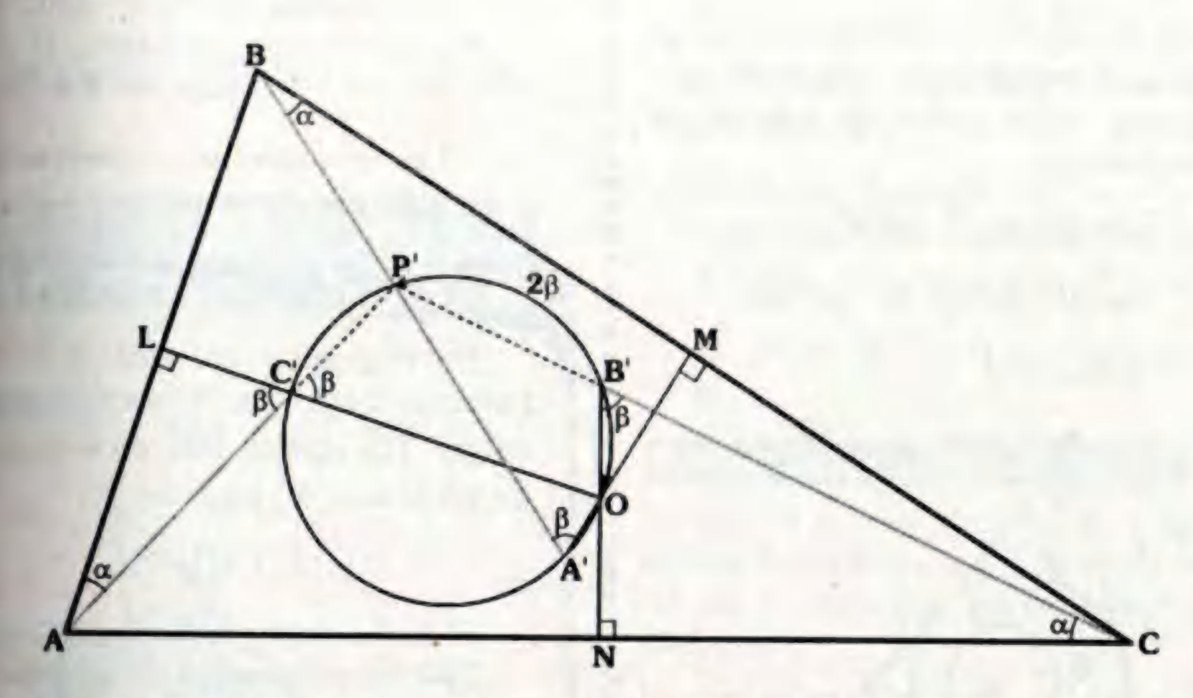
- Del mismo modo: $m\measuredangle LBC' = \alpha$

- Se observa :

  $\alpha + \beta = 90°$ y $m\widehat{OP} = 2\beta$ , entonces las prolongaciones de $\overline{BC'}$ y $\overline{CA'}$ llegan a P (por ángulo inscrito y exinscrito).

$\therefore$ P : primer punto de Brocard

Paso 2




- Análogamente los triángulos AC'L , BA'M y B'NC son semejantes:

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BAM = m\measuredangle NB'C = m\measuredangle AC'L = \beta$$

- $\overline{AC'}$ y $\overline{CB'}$ llegan a P'.

$$\therefore \quad P': \text{ Segundo punto de Brocard.}$$

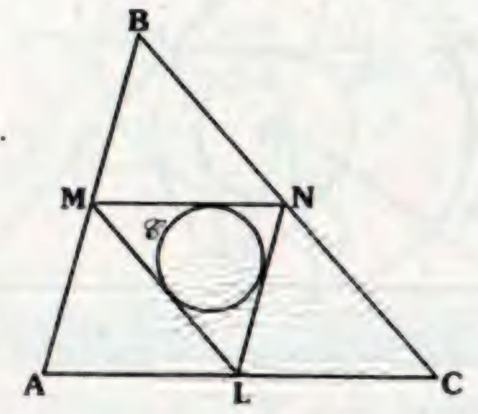
## CIRCUNFERENCIA DE SPIEKER

Es la circunferencia inscrita en el triángulo mediano con respecto a un triángulo dado.

ΔMNL : Triángulo mediano y

$\mathscr{C}$ : Circunferencia inscrita en el ΔMNL .



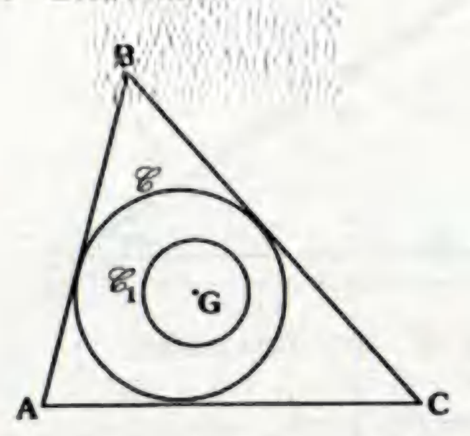
**TEOREMA**

En todo triángulo la circunferencia de Spieker es homotética a la circunferencia inscrita, cuyo centro de homotecia es el baricentro.

Si $\mathscr{C}$ : Inscrita en el $\Delta ABC$.

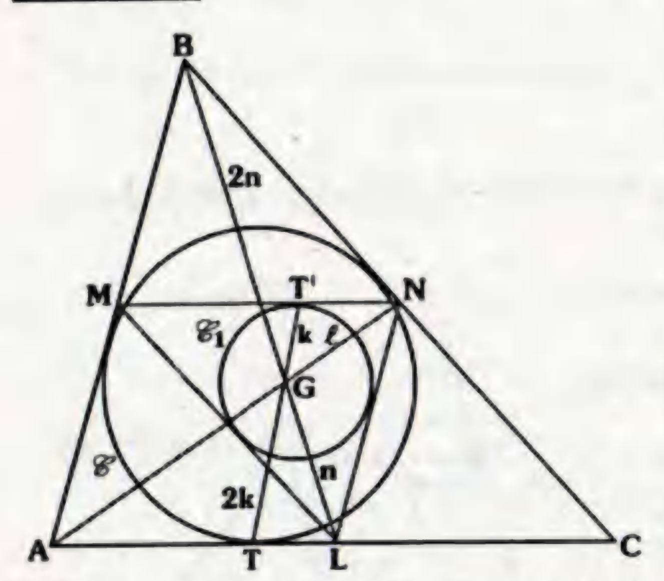
$\mathscr{C}_1$ : Circunferencia de Spieker.

G : Baricentro.




⇒ **$\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}_1$ son homotéticas con centro en G.**

**Demostración:**




- Al trazar el triángulo mediano MNL sabemos que $\mathscr{C}_1$ esta inscrita.

- G : Baricentro ⇒ se observa que los triángulos MNL y ABC son homotéticos con centro G y razón de homotecia de 1 a 2.

∴ Las circunferencias inscritas también son homotéticas.

**Nota**

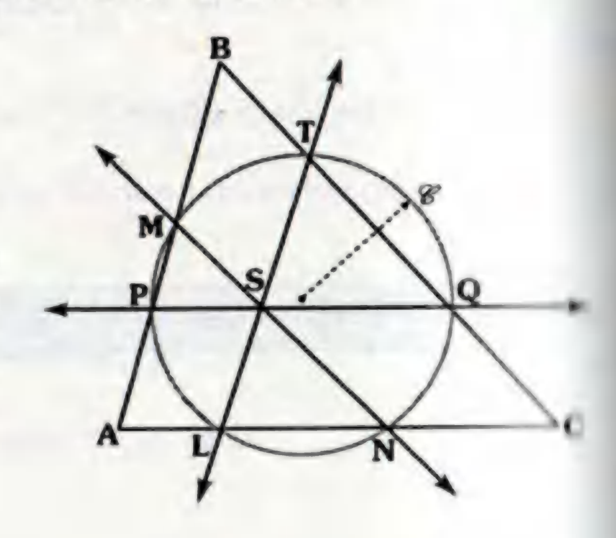
*En el gráfico anterior, si T es punto de tangencia, entonces al prolongar $\overline{TG}$ corta a $\overline{MN}$ en el punto de tangencia T', además:*

$$TG = 2(T'G) = 2K$$

∴ *El radio de la circunferencia de Spieker es la mitad de la circunferencia inscrita propiedades aparentemente parecidas a la circunferencia de los nueve puntos.*

**PRIMERA CIRCUNFERENCIA DE LEMOINE**

Si por el punto simediano trazamos rectas paralelas a los lados, los seis puntos de intersección con los lados del triángulo son concíclicos. La circunferencia que las contiene se denomina primera circunferencia de Lemoine.



En el gráfico:

S : Punto simediano

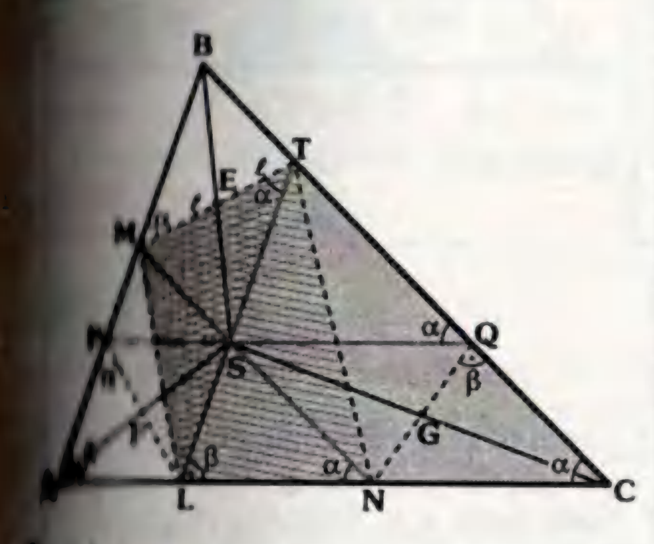
$\overline{PQ} // \overline{AC}$, $\overline{MN} // \overline{BC}$ y $\overline{LT} // \overline{AB}$

Se cumple:

**L, N, M, T, Q y N: Concíclicos**

𝒞 : Primera circunferencia de Lemoine.

**Demostración:**




Se observa:

- APSL, MBTS y SQCN son paralelogramos y F, E y G son puntos medios de sus diagonales.
- Debido a que ME = ET ⇒ $\overline{MT}$ y $\overline{AC}$ son antiparalelas con respecto al:
  ∡ABC ⇒ m∡ACB = m∡BMT = α
  *(Teorema del punto simediano pag. 104)*
- $\overline{PQ} // \overline{AC}$ ⇒ m∡PQB = m∡ABB = α
  ⇒ ⌂PMTQ es inscriptible
- En forma análoga:
  ⌂MPLN y ⌂LNQT también son inscriptibles
- Debido a que ⌂MPLN: Inscriptible
  ⇒ m∡APL = m∡ANM = α
  y $\overline{PM} // \overline{LT}$ ⇒ ⌂LPMT es un trapecio isósceles.
- En forma análoga:
  ⌂PLNQ y ⌂NQTM son trapecios isósceles, con lo cual se demuestra:

L, N, M, T, Q y N son concíclicos

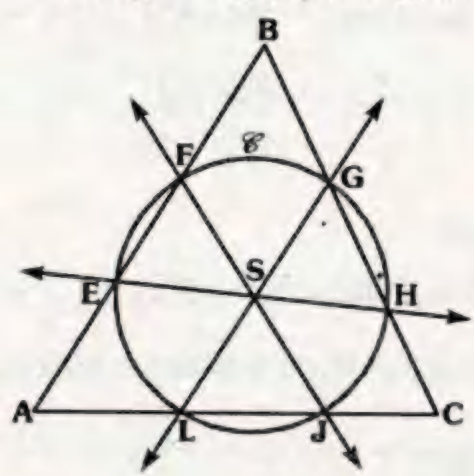
## SEGUNDA CIRCUNFERENCIA DE LEMOINE

Si por el punto simediano trazamos antiparalelos a los lados, los seis puntos de intersección con los lados son concíclicos.

La circunferencia que contiene a dichos puntos se denomina segunda circunferencia de Lemoine.

En el gráfico:

S : Punto simediano del ABC y $\overline{EH}$ y $\overline{AC}$, $\overline{FJ}$ y $\overline{BC}$, $\overline{LG}$ y $\overline{AB}$ son antiparalelas a los ángulos ABC, BAC y ACB respectivamente.

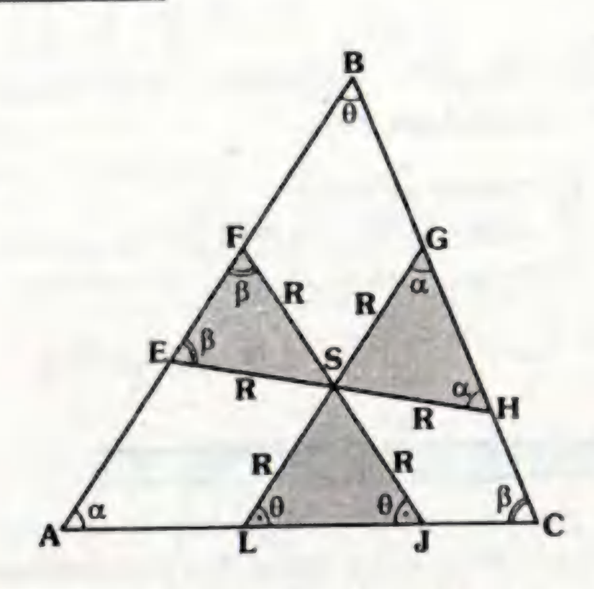



Se cumple:

**E, L, J, H, G y F son concíclicos**

𝒞: Segunda circunferencia de Lemoine

**Demostración:**




- Del dato de las antiparalelas se tiene:

$m\measuredangle ABC = m\measuredangle GLC = m\measuredangle FJA = \theta$

$m\measuredangle BAC = m\measuredangle EHB = m\measuredangle LGC = \alpha$

$m\measuredangle ACB = m\measuredangle BEH = m\measuredangle EFJ = \beta$

- $\Rightarrow$ $\Delta LSJ$ , $\Delta ESF$ , $\Delta GSH$ : Isósceles

- Por teorema: $ES = SH$

  $FS = SJ$

  $LS = SG$

- Luego:

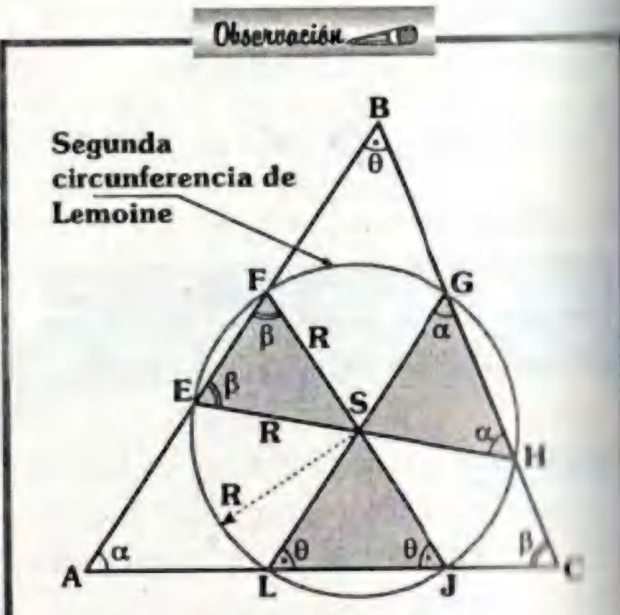
  S equidista de E, F, G, H, J y L

$\therefore$ E, L, J, H, G y F son concíclicos.

**También:**

El punto simediano es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos mencionados.

**Observación**




*Se cumple:* $EF = 2R\cos\beta$

$LJ = 2R\cos\theta$

$HG = 2R\cos\alpha$

$$\Rightarrow \frac{EF}{\cos\beta} = \frac{LJ}{\cos\theta} = \frac{LJ}{\cos\alpha} = 2R$$

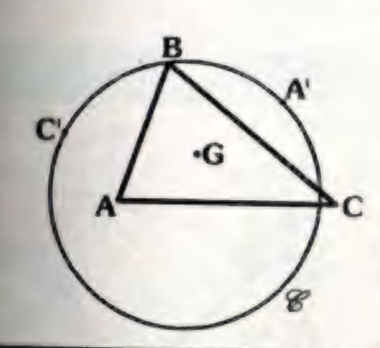
*De la última expresión, se concluye que las cuerdas que determina cada lado a la segunda circunferencia de Lemoine son proporcionales a los cósenos de los ángulos opuestos, es por ello que a esta circunferencia también se le llama* ***Circunferencia Coseno****.*

## CIRCUNFERENCIA DE STEINER

La circunferencia que pasa por el vértice de un triángulo y por los simétricos de los otros vértices con respecto al baricentro, se le conoce como circunferencia de Steiner.

Si G: Baricentro de $\Delta ABC$.

A' y C' : Simétricos de A y C, respectivamente, con respecto a G.



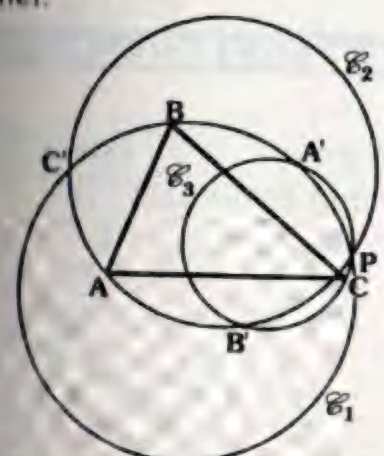

**B, A' y C' pertenecen a la circunferencia de Steiner $\mathscr{C}$.**

**Nota**

*El triángulo tiene tres circunferencias de Steiner, las otras dos (siendo B' el simétrico de B con respecto a G) contienen a las ternas AB'C' y CA'B'.*

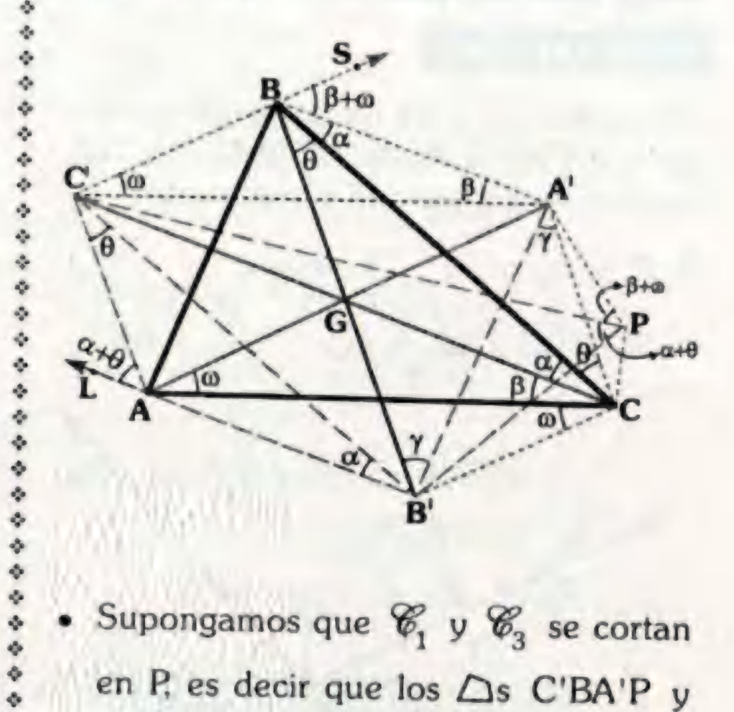
Las tres circunferencias de Steiner de un triángulo son concurrentes. Dicho punto de concurrencia es el Punto de Steiner (pág. 114).

Si $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son las circunferencias de Steiner.




**$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ concurren en el punto P.**

***Demostración:***




- Supongamos que $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_3$ se cortan en P, es decir que los ⏢s C'BA'P y A'B'CP son inscriptibles.

- Se observa:

$$\Delta A'BC' \cong \Delta AGC \text{ , } \Delta BGC \cong \Delta CAB$$

$$m\measuredangle SBA' = m\measuredangle A'C' = \beta + \omega$$

- ⏢A'PCB':

$$m\measuredangle A'PB' = m\measuredangle A'CB' = \beta + \omega + \alpha + \theta$$

- Se nota:

$$m\measuredangle C'PB' = m\measuredangle C'AL = \alpha + \theta$$

$\Rightarrow$ ⏢C'PB'A : Inscriptible

$\therefore$ La circunferencia que pasa por A, B' y C' también pasa por P.

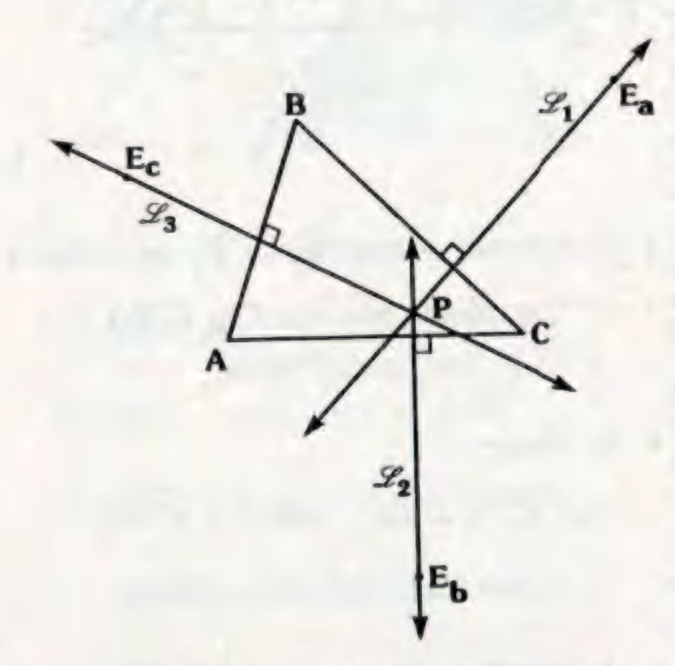
# 15. TEMAS SELECTOS (DEMOSTRADOS)

## TEOREMA DE LORIGA

En un triángulo, las rectas perpendiculares a los lados trazadas desde sus respectivos excentros son concurrentes.

Si $E_a$, $E_b$ y $E_c$ : Excentros,

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \perp \overline{BC}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \perp \overline{AC}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \perp \overline{AB}$



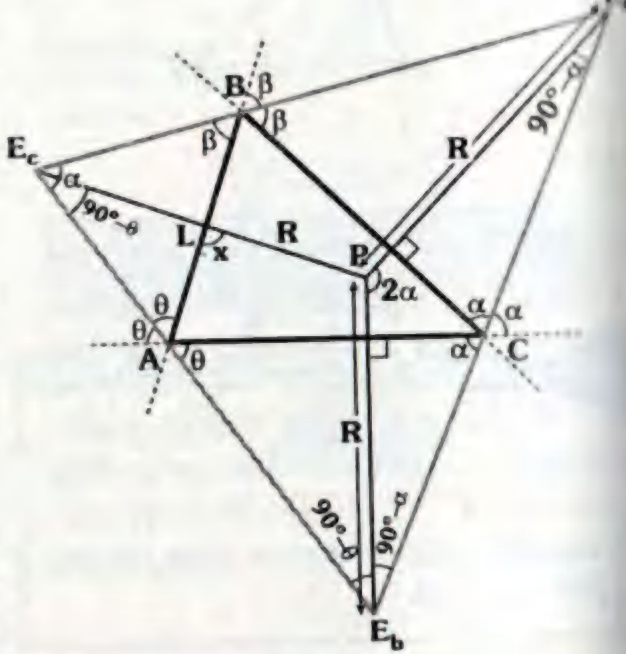

$\Rightarrow$ **$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ concurren en P : punto de Lóriga**

***Demostración:***

- Sean $\overline{E_aP} \perp \overline{BC}$, $\overline{E_bP} \perp \overline{AC}$
- $\Delta PE_aE_b$ : Isósceles

  $\Rightarrow E_aP = E_bP = R$ y $m\measuredangle E_aPE_b = 2\alpha$
- $\Delta ABC$ : $2\alpha + 2\beta + 2\theta = 360^{\circ}$

  $\Rightarrow \alpha + \beta + \theta = 180^{\circ}$
- $\Delta ABE_c$ : $m\measuredangle AE_cB = \alpha$




- Por el teorema 7.13:

  P : Circuncentro de $E_aE_bE_c$

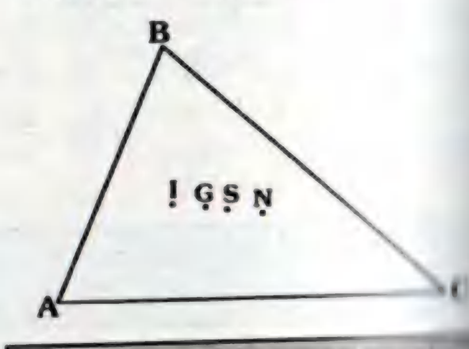
  $\Rightarrow E_cP = R$
- $\Delta AE_cL$ : Por ángulo exterior: $x = 90^{\circ}$

  $\therefore \overline{E_cP} \perp \overline{AB}$

## DEMOSTRACIÓN DE LA RECTA DE HOUSSEL

Sean:

I : Incentro, G : Baricentro,
S : Punto de Spieker y
N : Punto de Nagel

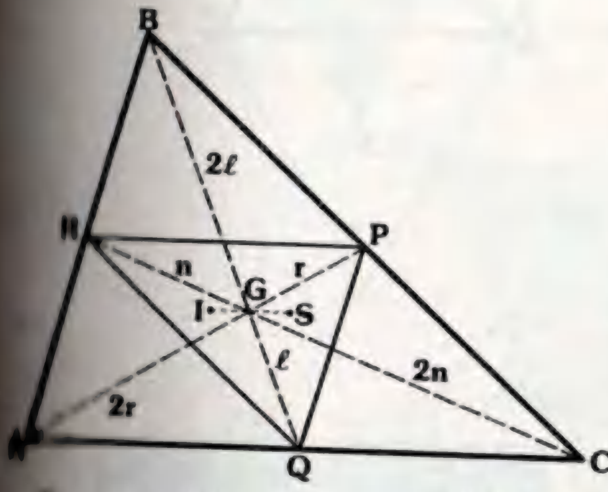



$\Rightarrow$ **I, G, S y N son colineales**

- Primero vamos a demostrar que I, G y S son colineales.
- Luego que I, G y N son colineales.

**Demostración:**

**Paso 1**



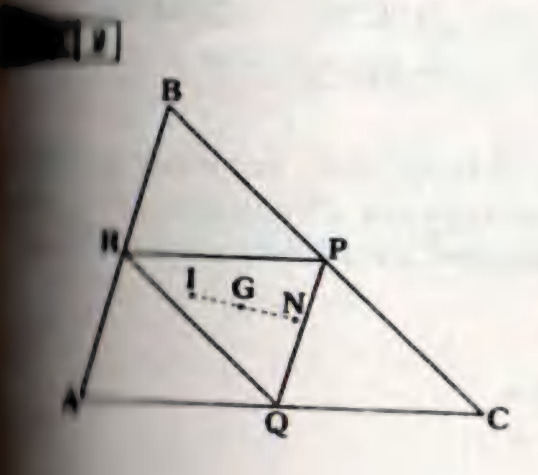

- Trazamos las medianas AP, BQ y CR, se observa que los triángulos ABC y PQR son homotéticos respecto de G y de razón 2.
- Puesto que I : Incentro de ABC y
  S : Incentro de PQR.

  ∴ I, G y S : Colineales

Además : IG=2(GS)

*(Ver homotecia pág. 170)*

**Paso 2**




- I : Incentro del ΔABC ⇒ I: Punto de Nagel del ΔPQR (Teorema Pág. 97-98).
- G : Centro de homotecia

  ∴ G, S y N : colineales

Además: GN=2(GI)

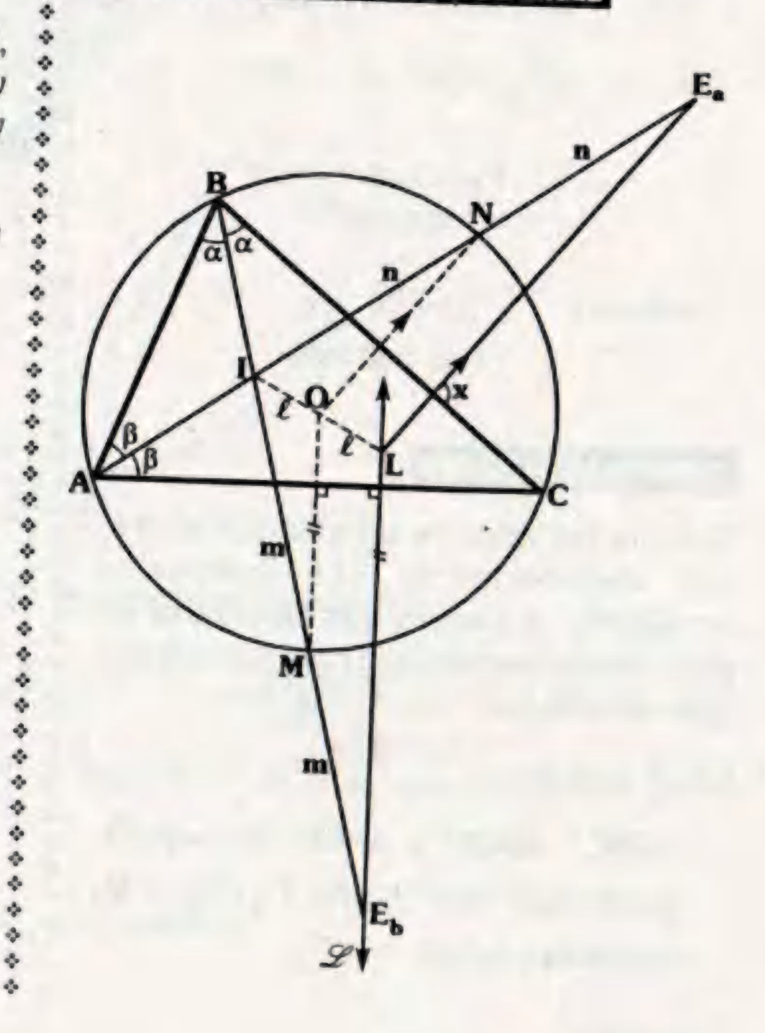
En conclusión: I, G, S y N son colineales:

$$GN = 2(IG) = 4(GS) \text{ y}$$

$$(IG)(SN) = (GS)(IN)$$

*(ver homotecia pág. 170)*

## DEMOSTRACIÓN DE LA RECTA DE NAGEL



- Sea I : Incentro,

  O : Circuncentro,

  $E_a$ y $E_b$ : Excentro

- Trazamos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overline{AC}$ que corte a la prolongación de $\overline{IO}$ en L.

- Por teorema:

  $IM = ME_b = m$ , $IM = ME_a = n$ ,

  $\overline{OM} \perp \overline{AC}$ y $\overline{ON} \perp \overline{BC}$

- $\overline{OM}$ : Base media del $\Delta ILE_b$

  $\Rightarrow IO = OL = \ell$

- $\overline{ON}$ : Base media del $\Delta IE_aL$

  $\Rightarrow \overline{LE_a} // \overline{OM} \Rightarrow x=90°$

  $\therefore$ L : Punto de Loriga
  (*ver pag.* 140)

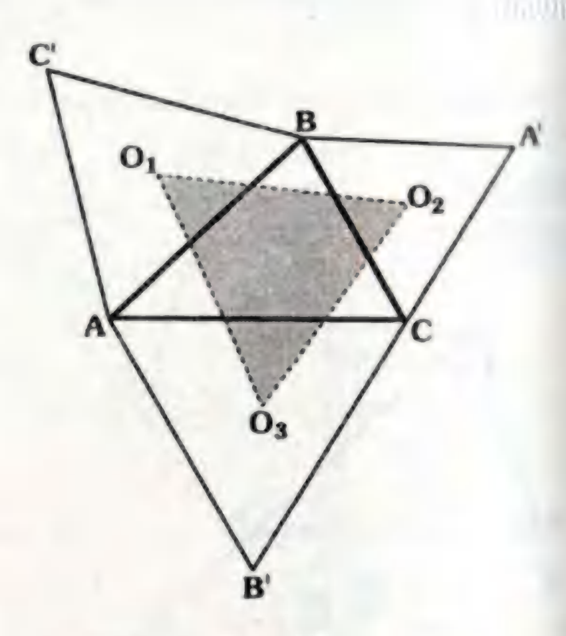
Además : $IO = OL = \ell$
(ver pag. 85)

## TEOREMA DE NAPOLEÓN

Si sobre los lados de un triángulo se trazan exteriormente los triángulos equiláteros se cumple que los centros de estos triángulos son vértices de otro triángulo equilátero.

En el gráfico:

$\Delta ABC'$, $\Delta BCA'$ y $\Delta ACB'$ son equiláteros cuyos centros son $O_1$, $O_2$ y $O_3$ respectivamente.




Se cumple:

**$\Delta O_1O_2O_3$ es equilátero**

**Demostración:**

- Por teoremas vistos en el punto de Fermat se cumple $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ concurren en F.

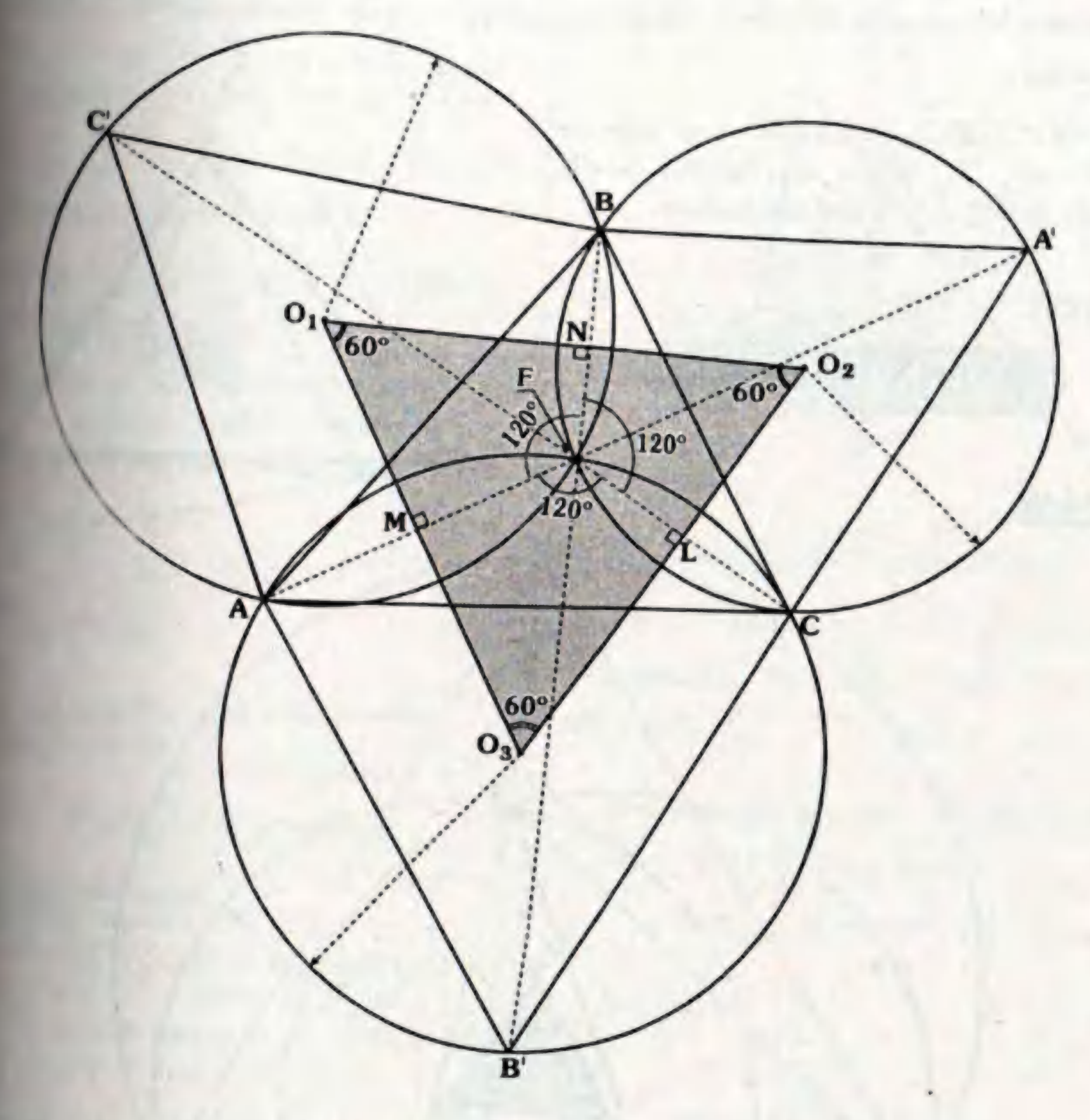
  Además :

  $m\measuredangle AFB = m\measuredangle BFC = m\measuredangle AFC = 120°$

  $\Rightarrow$ ⏢AC'BF, ⏢BA'CF y ⏢AB'CF

  Son inscriptibles, entonces las circunferencias circunscritas a los triángulos equiláteros concurren en F.

- Así tenemos:




- Para las circunferencias $\overline{AF}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CF}$ son cuerdas comunes:

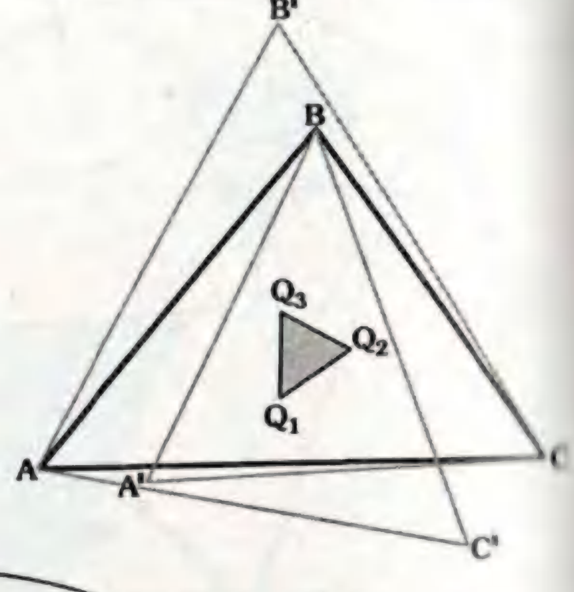
$$\Rightarrow \overline{O_1O_2} \perp \overline{BF}, \quad \overline{O_1O_3} \perp \overline{AF} \quad y \quad \overline{O_2O_3} \perp \overline{FC}$$

- En los cuadriláteros $O_1MFN$, $O_2LFN$ y $O_3LFM$ se deduce que los ángulos del $\Delta O_1O_2O_3$ miden 60°.

$$\therefore \quad \Delta O_1O_2O_3 \text{ es equilátero.}$$

## SEGUNDO TEOREMA DE NAPOLEÓN

Si sobre los lados de un triángulo se trazan interiormente triángulos equiláteros, se cumple que los centros de estos triángulos son vértices de otro triángulo equilátero.



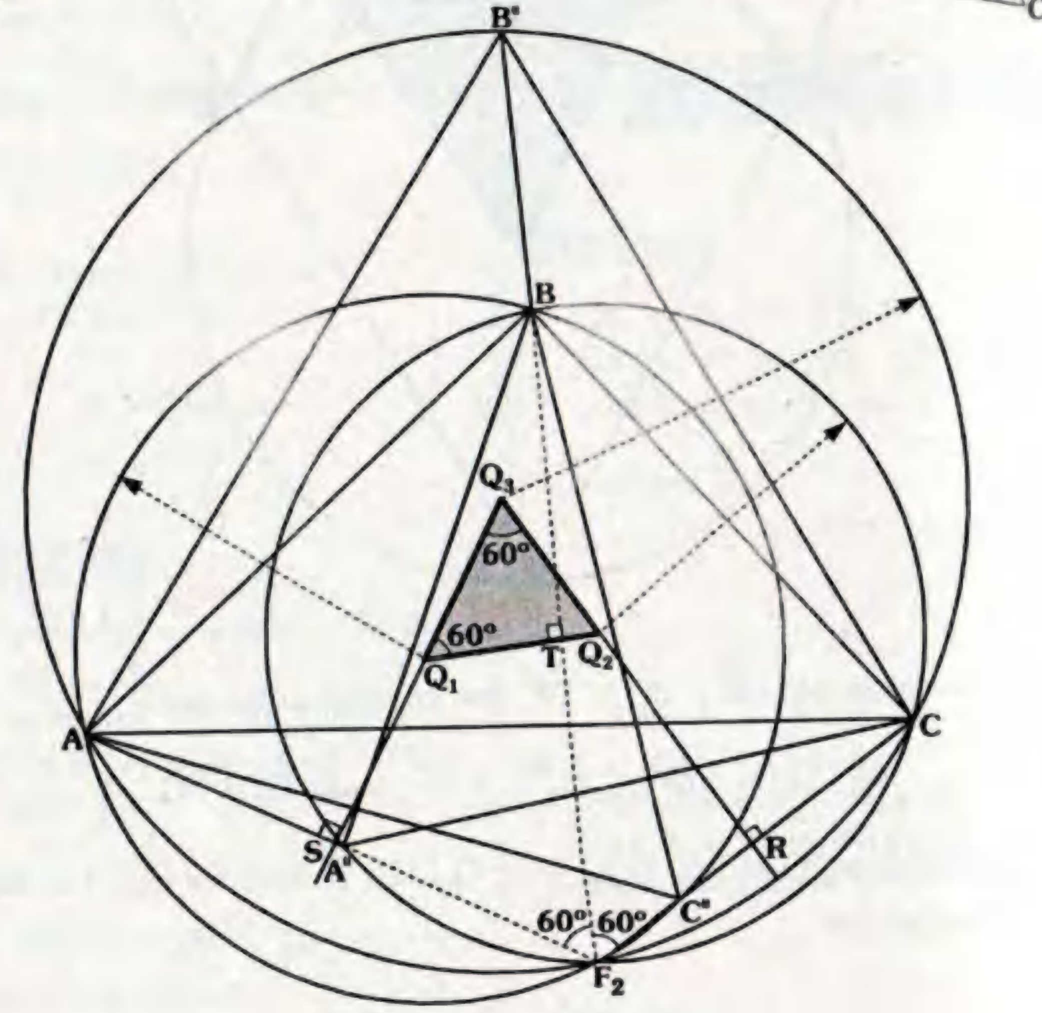

En el gráfico:

ΔABC", ΔBCA" y ΔACB" son equiláteros $Q_1$, $Q_2$ y $Q_3$ son centros de dichos triángulos respectivamente.

Se cumple:

**$\Delta Q_1Q_2Q_3$ es equilátero**

**Demostración:**



- En forma análoga a la demostración anterior, usaremos lo que hemos visto en el teorema de Fermat.
- $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ y $\overline{CC''}$ concurren en el denominado segundo Punto de Fermat.
- Del gráfico: $m\measuredangle AF_2B = m\measuredangle BF_2C = 60°$ (Por ser punto de Fermat 2).
- $\triangle ABC''F_2$, $\triangle AB''CF_2$ y $\triangle CBA''F_2$ son inscriptibles.
  - ⇒ Las circunferencias circunscritas a los triángulos equiláteros son concurrentes en $F_2$.
- Por teorema:

$\overline{Q_3Q_1} \perp \overline{AF_2}$ , $\overline{Q_3Q_2} \perp \overline{F_2C}$ y $\overline{Q_1Q_2} \perp \overline{BF_2}$

⇒ $\triangle SQ_3RF_2$ : $m\measuredangle SQ_3R = 60°$

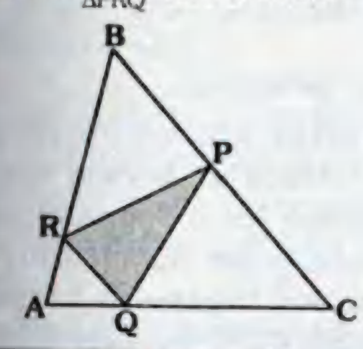
$\triangle TQ_1SF_2$ : $m\measuredangle Q_3Q_1Q_2 = 60°$

∴ $\Delta Q_1Q_2Q_3$ es equilátero.

## TEOREMA DE FAGNANO

Dado un triángulo, si el perímetro de la región triangular inscrita es mínimo entonces la región triangular le corresponde al triángulo órtico y visceversa.

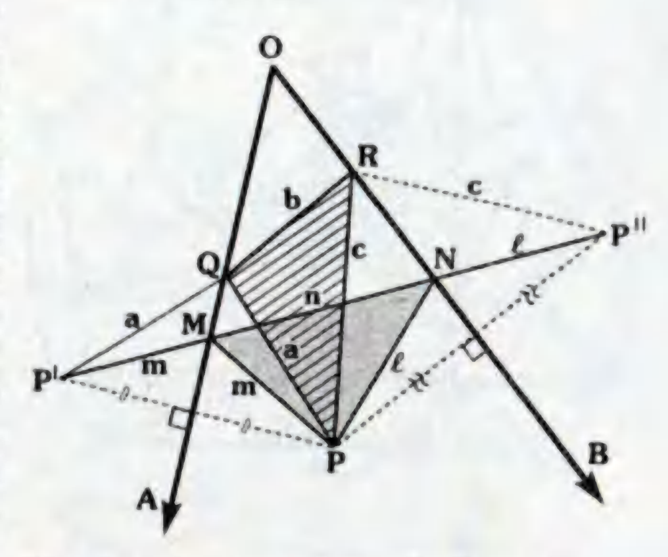
Si Perímetro$_{\Delta PRQ}$ es mínimo




⇒ **ΔPQR : Triángulo órtico**

***Demostración:***

Nociones Previas:



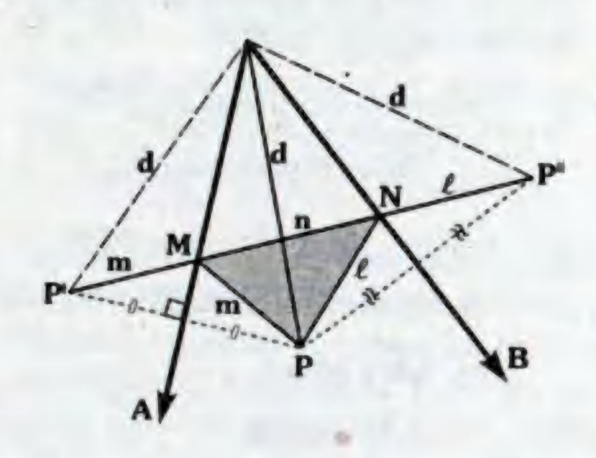

Dado el ángulo AOB y el punto P.

¿Cuál es el menor recorrido partiendo de P tocando a $\overleftrightarrow{OA}$ , $\overleftrightarrow{OB}$ y llegando al mismo punto P?

- Tenemos por menor recorrido de P' a P'' : $m+n+\ell < a+b+c$

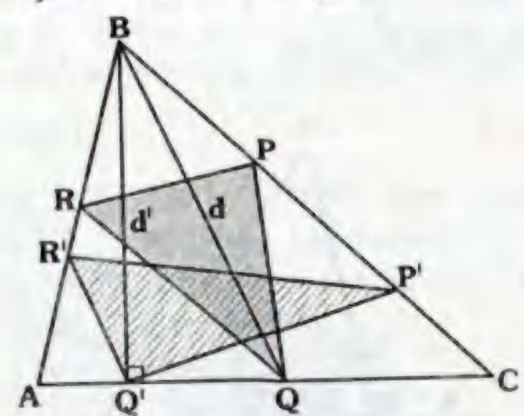
∴ PMN es el menor recorrido.

Además:



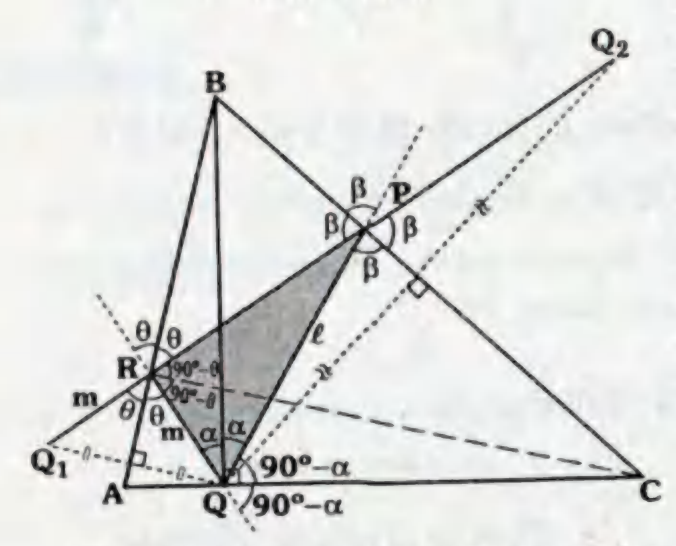

- $\Delta P'OP''$ : $2d > m+n+\ell$

Trabajando en el triángulo:




Se nota que "d" debe ser mínimo:

$\Rightarrow$ $\overline{BQ}$: Altura




- El vértice Q ya es fijo, entonces debemos ubicar los otros vértices P y R, para lo cual procedemos ubicando los simétricos de Q respecto a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.
- B : Excentro del triángulo PQR.

  $\Rightarrow$ $\overrightarrow{QB}$: Bisectriz interior
- C : Excentro del triángulo PQR.

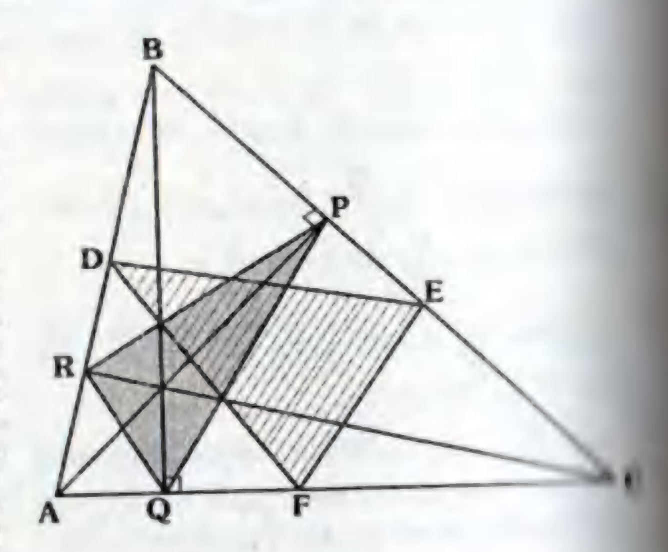
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle PRC = m\measuredangle QRC = 90° - \theta$

  $\Rightarrow$ $\overline{CR}$: altura

  $\overline{AP}$: Altura

$\therefore$ $\Delta PQR$ es órtico del $\Delta ABC$.

***Demostración del recíproco:***




- Se observa que: $FB > BQ$
- De lo anterior se obtiene:

$$\text{Perím.}_{\Delta PQR} < \text{Perím.}_{\Delta DEF}$$

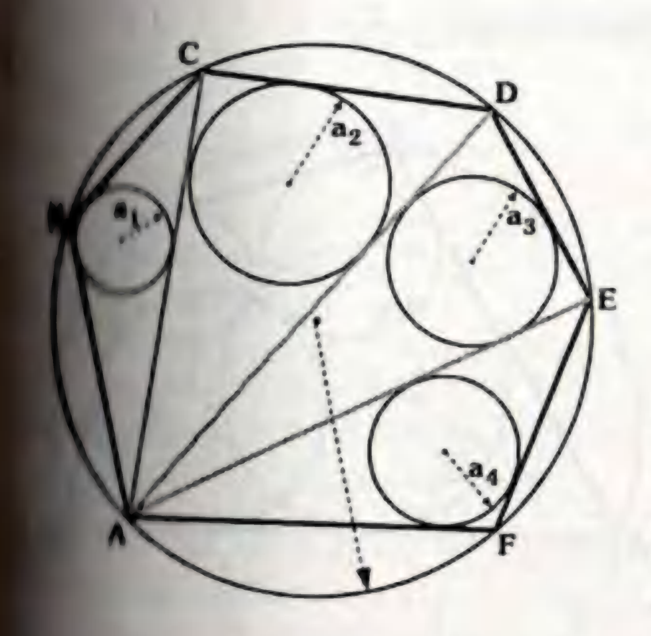
$\therefore$ $\Delta PQR$ es el de menor perímetro

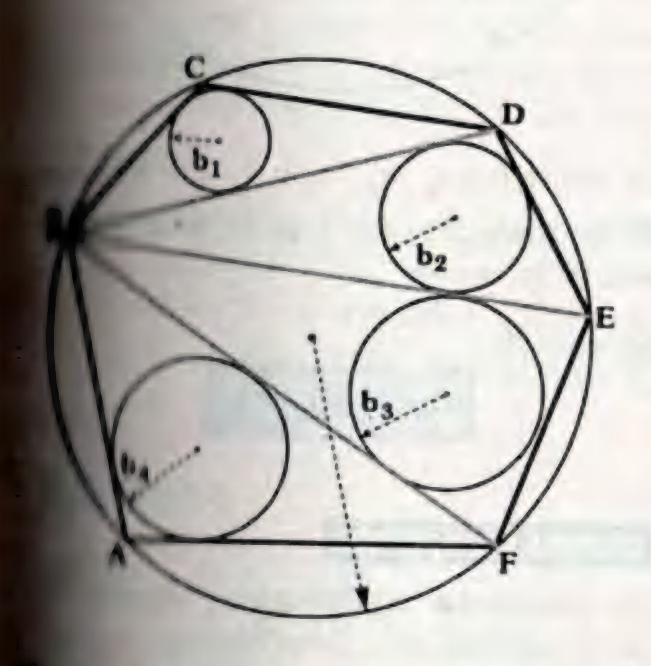
## PRIMER TEOREMA DE MIKAMI Y KOVAYASHI

También se le conoce como primer teorema japonés, al teorema aquí mostrado se le denomina **"Problema Sangaku"**, problemas que colgaban los japoneses bajo las terrazas de los templos y santuarios (aproximadamente 1 603 - 1 867).

El teorema establece:

Si en una circunferencia inscribimos un polígono y desde un vértice cualquiera trazamos todas las diagonales, la suma de radios de todas las circunferencias inscritas en los triángulos formados es una constante que es independiente del vértice que se elija para la triangulación.



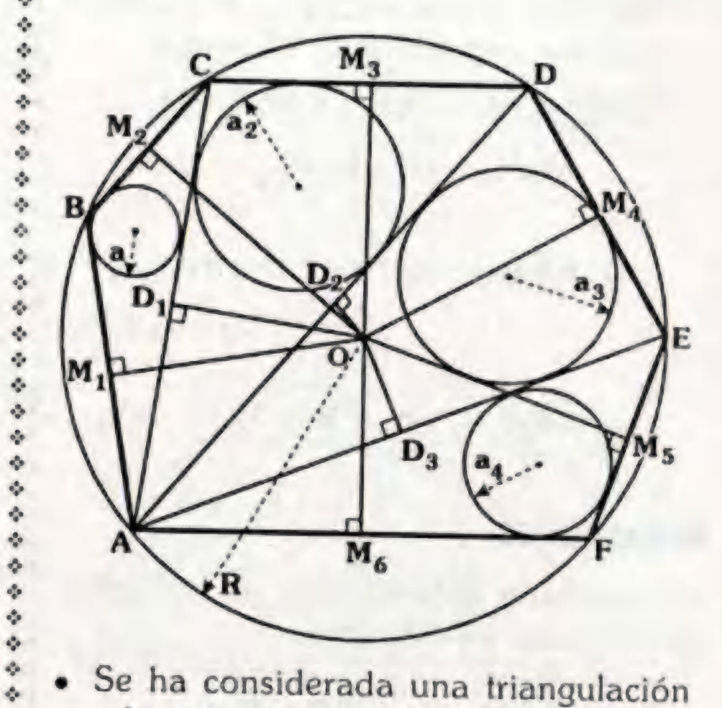




...considerado en el gráfico un hexá-...inscrito, pero puede ser cualquier ...polígono inscrito.

...han considerado las triángulaciones ...de A y B por separado para el mis-... polígono (puede ser cualquier vér-...) el teorema expresa la siguiente ...aldad :

$$... a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

***Demostración:***




- Se ha considerada una triangulación arbitrario, de igual forma la ubicación de O.
- Se trazan las perpendiculares de O hacia cada lado y diagonal del polígono.
- Por teorema de Carnot. (Pág. 53)

$\Delta ABC$: $OM_1 + OM_2 - OD_1 = R + a_1$

$\Delta ACD$: $OD_1 + OM_3 - OD_2 = R + a_2$

$\Delta ADE$: $OD_2 + OM_4 + OD_3 = R + a_3$

$\Delta AEF$: $OM_5 - OD_3 + OM_6 = R + a_4$

- Sumando las expresiónes anteriores:

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 + OM_4 + OM_5 + + OM_6 = 4R + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

- Este resultado nos indica que la suma de distancias del centro de la circunferencia (cuando el centro es interior al polígono) hacia cada lado, en general para un polígono de "n" lados sería: (n – 2)R más la suma de inradios para cualquier triangulación.

- Para el caso particular del hexágono ABCDEF, ahora escogemos la triangulación del vértice B, se tendrá:

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 + OM_4 + OM_5 + \\ + OM_6 = 4R + b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

$$\Rightarrow \quad 4R + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4R + b_1 + \\ + b_2 + b_3 + b_4$$

$$\therefore \; a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

**GENERALIZANDO:**

La expresión general para un polígono de "n" lados inscrito será:

$$\sum_{i=1}^{n} OM_i = (n-2)R + \sum_{i=1}^{n-2} r_i$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n-2} r_i = \sum_{i=1}^{n} OM_i - (n-2)R$$

Donde:

$OM_i$ : Distancia del centro o de la circunferencia hacia cada lado del polígono.

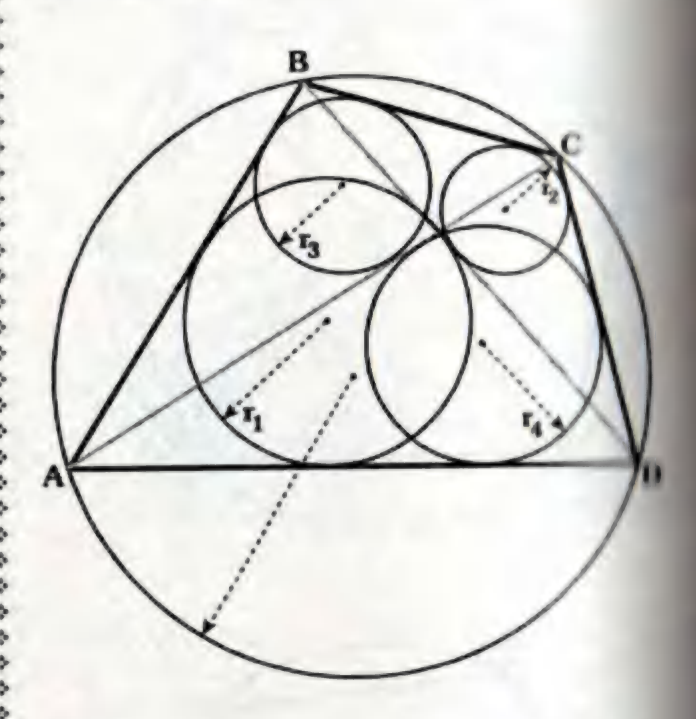
$\sum_{i=1}^{n-2} r_i$ :Suma de inradios para una triangulación dada.

Podemos observar entonces que la suma de inradios en una triangulación dada es constante.

**Observación**

*Recordar que si un triángulo es obtusángulo la distancia hacia el lado mayor "se puede considerar" como si fuera negativa.*

**Caso Particular (n=4)**




En el gráfico $r_1$, $r_2$, $r_3$ y $r_4$ son inradios de los triángulos ABD, BCD, BCD y ACD respectivamente.

Se cumple:

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4$$

## LUGARES GEOMÉTRICOS

En esta parte, analizaremos algunos lugares geométricos, descritos por los puntos notables.

① Dada una semicircunferencia de diámetro AB y un punto P de la semicircunferencia, el lugar geométrico del incentro y baricentro del triángulo APB es un cuadrante y una semicircunferencia, respectivamente.

② En una circunferencia se ubican los puntos fijos A y B y el punto móvil P, el lugar geométrico del incentro,

baricentro y ortocentro del triángulo ABP es un arco de circunferencia, circunferencia y una circunferencia congruente a la espectivamente.

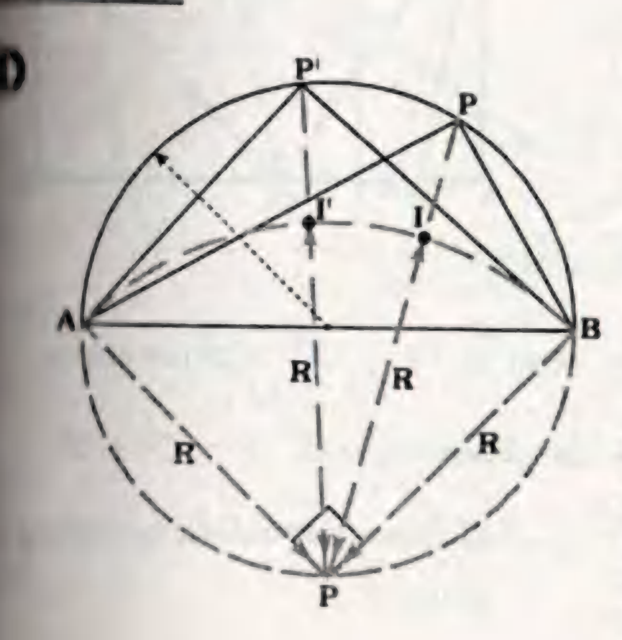
(7) Se tiene un cuadrado ABCD, en el cual se ubican los puntos fijos M y N y el punto móvil L, el lugar geométrico del circuncentro y baricentro del triángulo MNL es parte de la mediatriz de $\overline{MN}$ y un cuadrado, respectivamente.

(8) El lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas de Simson de un triángulo con respecto a dos puntos diametralmente opuestos es la circunferencia de los nueve puntos del triángulo mencionado.

(9) El lugar geométrico, del ortocentro del triángulo ABC, teniendo a B y C fijos y A se desplaza sobre una recta paralela a $\overline{BC}$, es una parábola.

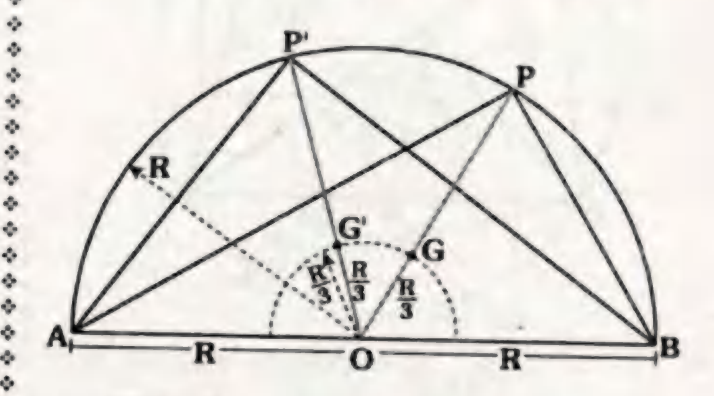
**Demostraciones:**

①




- Sean I e I' incentros de los triángulos.
- Por teorema: IP = PB = AP = R
  y I'P = PA = PB = R
- Además: m∠APB = 90°

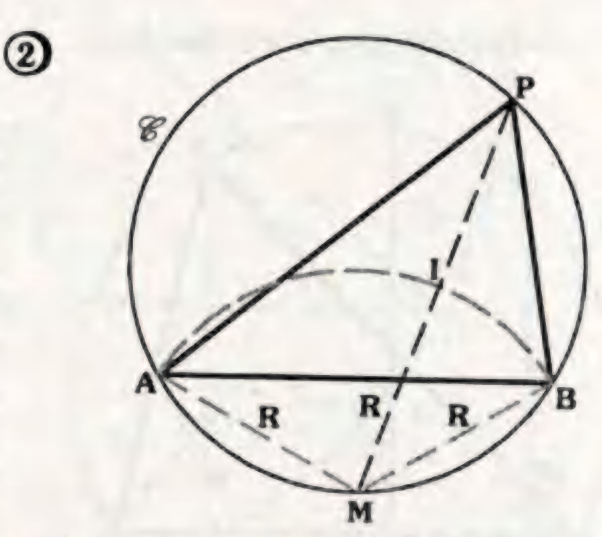
  ∴ I describe el cuadrante AB.




- AO = OB = PO = PO' = P
- Por teorema: $OG = OG' = \dfrac{R}{3}$

  ∴ G describe una circunferencia de centro O y radio R/3.

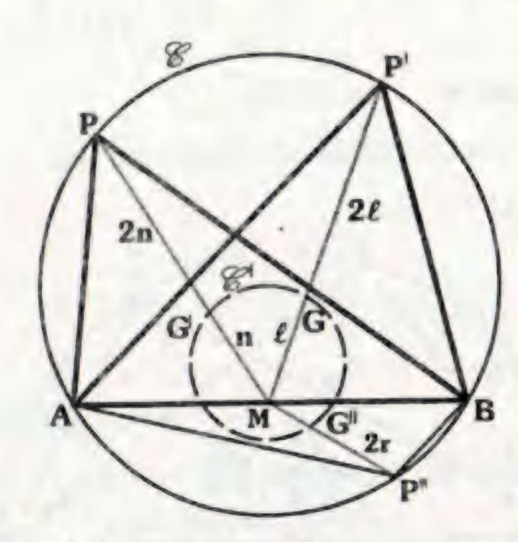
②




- I : Incentro del △APB.
- Como 𝒞 y AB son fijos, entonces AM=MB=R (R: constante).

- Por teorema: MI=R

  $\therefore$ I describe un arco de circunferencia de centro M y radio R.

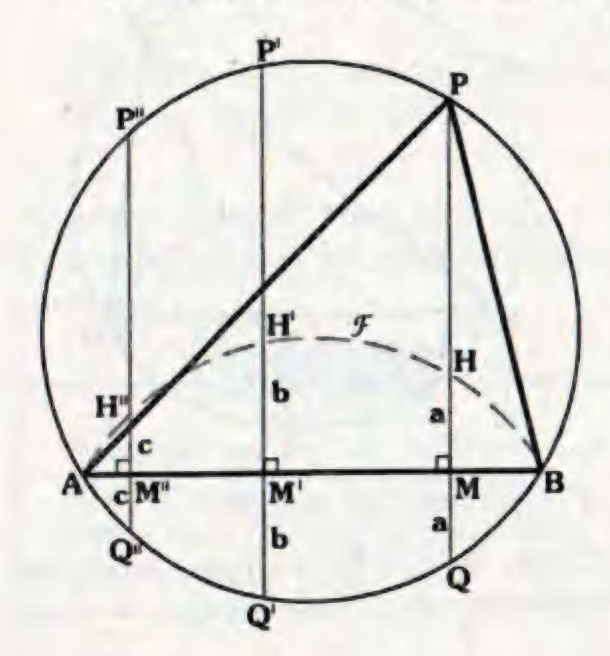



- G, G' y G" son baricentros de los triángulos APB, AP'B y AP"B respectivamente.

- Se sabe : $\dfrac{MG}{MP}=\dfrac{MG'}{MP'}=\dfrac{MG"}{MP"}=\dfrac{1}{3}$

- $\mathscr{C}'$ es homotético de $\mathscr{C}$, con respecto a M.

  $\therefore$ G describe una circunferencia.




- Sean H, H' y H": Ortocentros

- Por teorema:

  HM = MQ = a , H'M' = M'Q' = b y

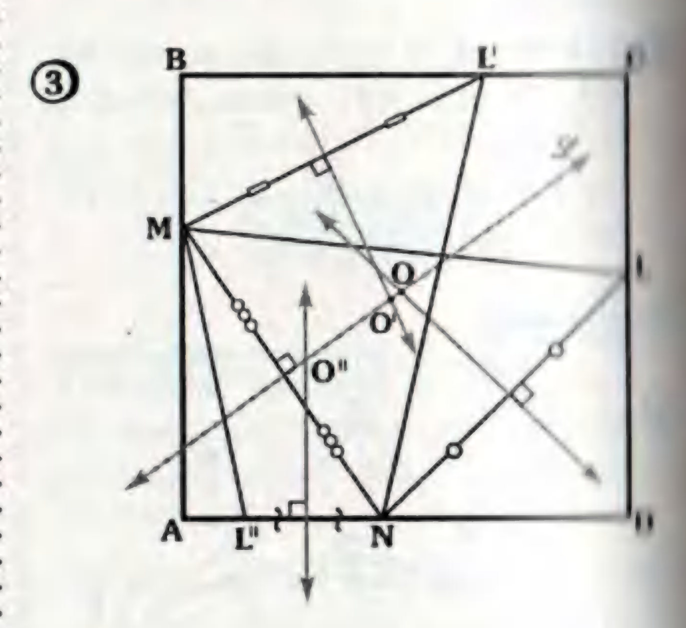
  H"M" = M"Q" = c

  $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ es simétrico del arco AB con respecto a $\overline{AB}$ .

- Si el punto P se encuentra en el otro arco AB, los ortocentros describen un arco simétrico.

  $\therefore$ El ortocentro describe una circunferencia congruente a la inicial.

③




- Sean O, O' y O": Circuncentros

- Se observa que O, O' y O" ∈ $\mathscr{L}$

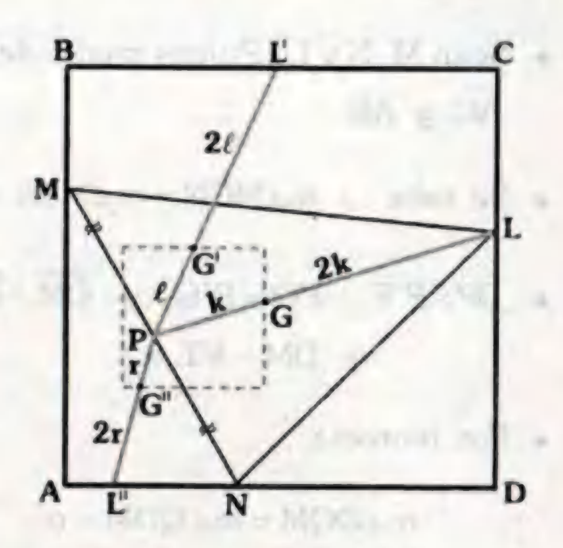
  $\therefore$ El circuncentro describe una parte de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ .

- Sean G, G' y G": Baricentros.

- $\dfrac{PG}{PL}=\dfrac{PG'}{PL'}=\dfrac{PG''}{PL''}=\dfrac{1}{3}$

- Como L describe el cuadrado ABCD, por homotecia:

∴ El baricentro describe un cuadrado.



- Sean M, N y L : Puntos medio de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

- Se sabe : $m\measuredangle MCN = m\measuredangle MLN = \omega$

- $\overline{DP} // \overline{P'E}$, $PO = P'O$ y $\overline{OM} // \overline{P'E}$

$$\Rightarrow DM = ME = \ell$$

- Por teorema:

$$m\measuredangle DQM = m\measuredangle QDM = \alpha$$

- Análogamente:

$$m\measuredangle QFC = m\measuredangle FQN = \theta$$

- Por ángulo entre rectas de Simson:

$$m\measuredangle DQF = 90°$$

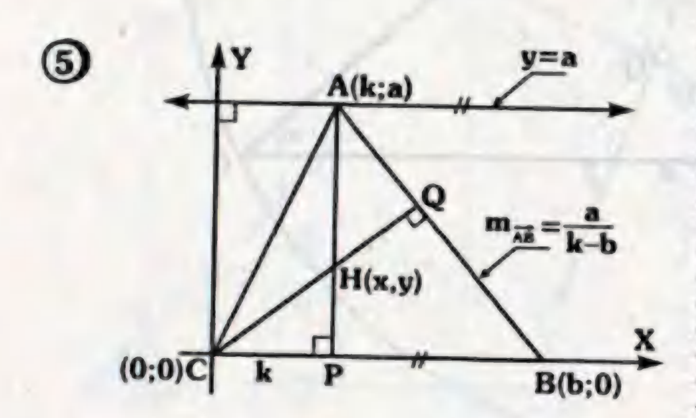
- $\measuredangle DCFQ$ : $\omega + \alpha + \theta = 90°$

$$\Rightarrow \triangle LMQN: \text{ Inscriptible}$$

- Como $\mathscr{C}$ pasa por M, N y L, es la circunferencia de los nueve puntos, en la cual se encuentra Q.

∴ Q describe la circunferencia de los nueve puntos.

⑤




- Sea H : Ortocentro

- Trazamos el plano cartesiano con

- $\overleftrightarrow{AP}$ : $x = k$ ... (I)

- $m_{\overleftrightarrow{CQ}} = \dfrac{b-k}{a}$

- $\left(m_{\overleftrightarrow{CQ}}\right)\left(m_{\overleftrightarrow{AB}}\right) = -1$

- $\overleftrightarrow{CQ}$ : $(b-k)x = ya$ ... (II)

- $\overleftrightarrow{AP} \cap \overleftrightarrow{CQ} = \{H\}$

⇒ De (I) y (II) :

$$(b-x)x = ya \Rightarrow -ya = x(x-b)$$

$$-ay = x^2 - xb + \frac{b^2}{4} - ay = x^2 - xb + \frac{b^2}{4}$$

$$\mathscr{P}: \; -a\left(y - \frac{b^2}{4a}\right) = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

- Puesto que "a" y "b" son constantes, la ecuación obtenida corresponde a una parábola de vértice:

$$\left(\frac{b}{2}; \frac{b^2}{4a}\right)$$

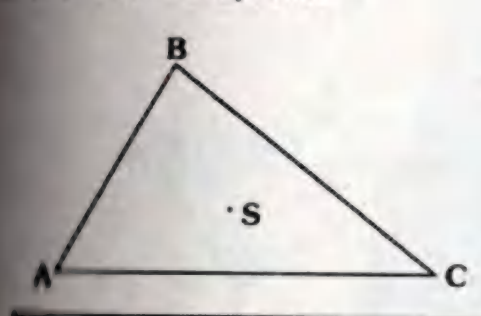
y parámetro $-\dfrac{a}{4}$; es decir la parábola es cóncava hacia abajo.

∴ El ortocentro describe una parábola.

## …O DE GRAVEDAD DE UN TRIÁNGULO

…entro de gravedad de un triángulo es …punto de Spieker.

… : Punto de Spieker

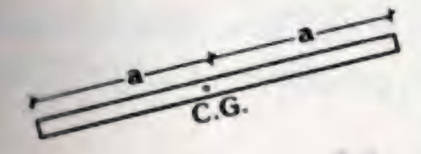



… : Centro de gravedad del triángulo ABC.

### … PRELIMINARES

- El centro de gravedad de una barra homogénea esta en su punto medio.
- El centro de gravedad, del sistema formado por dos masas puntuales de igual peso, es el punto medio del segmento cuyos extremos son las masas puntuales.
- El centro de gravedad, del sistema formado por dos masas puntuales de pesos diferentes, es un punto del segmento que tiene por extremos dichas masas cuya distancia hacia las masas es inversamente proporcional a su peso.

**Barra homogénea**




**Sistema de masas puntuales (igual masa)**

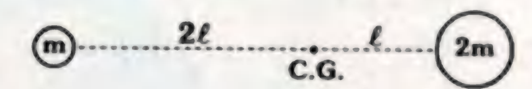



**Sistema de masas puntuales (masas distintas)**

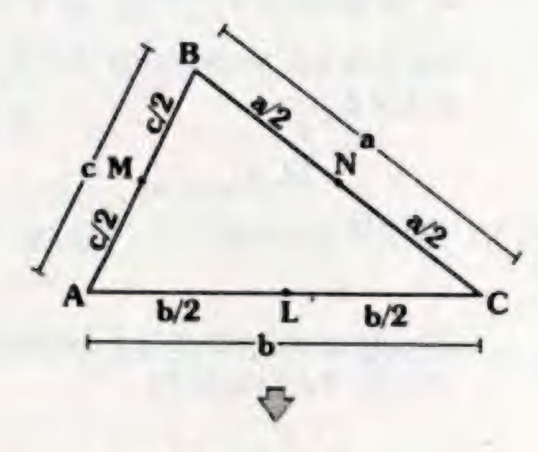


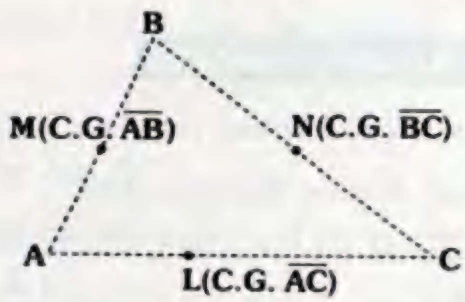
$$\ell_1 M = \ell_2 m$$

*Ejemplo:*




Considerando los lados AB, BC y AC como "barras homogéneas", entonces los puntos medios M, N y L son sus centros de gravedad.



Debido a la homogeniedad de las barras las masas son proporcionales a las longitudes.

- Como:

$$\frac{MC.G_{(M\ y\ N)}}{NC.G_{(M\ y\ N)}}=\frac{a}{c}=\frac{ML}{LN}$$

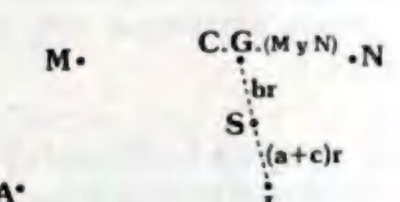
$\Rightarrow$ $\overline{LC.G}_{(M\ y\ N)}$

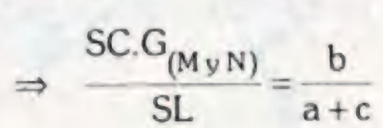
Bisectriz del $\Delta MNL$

- Con lo cual el centro de gravedad del triángulo se encontrara en $\overline{LC.G}_{(M\ y\ N)}$.

Hallando el centro de gravedad de L y $C.G_{(M\ y\ N)}$.

- Como L representa al segmento de longitud b y $C.G_{(M\ y\ N)}$ representa a los segmentos de longitudes a y c.



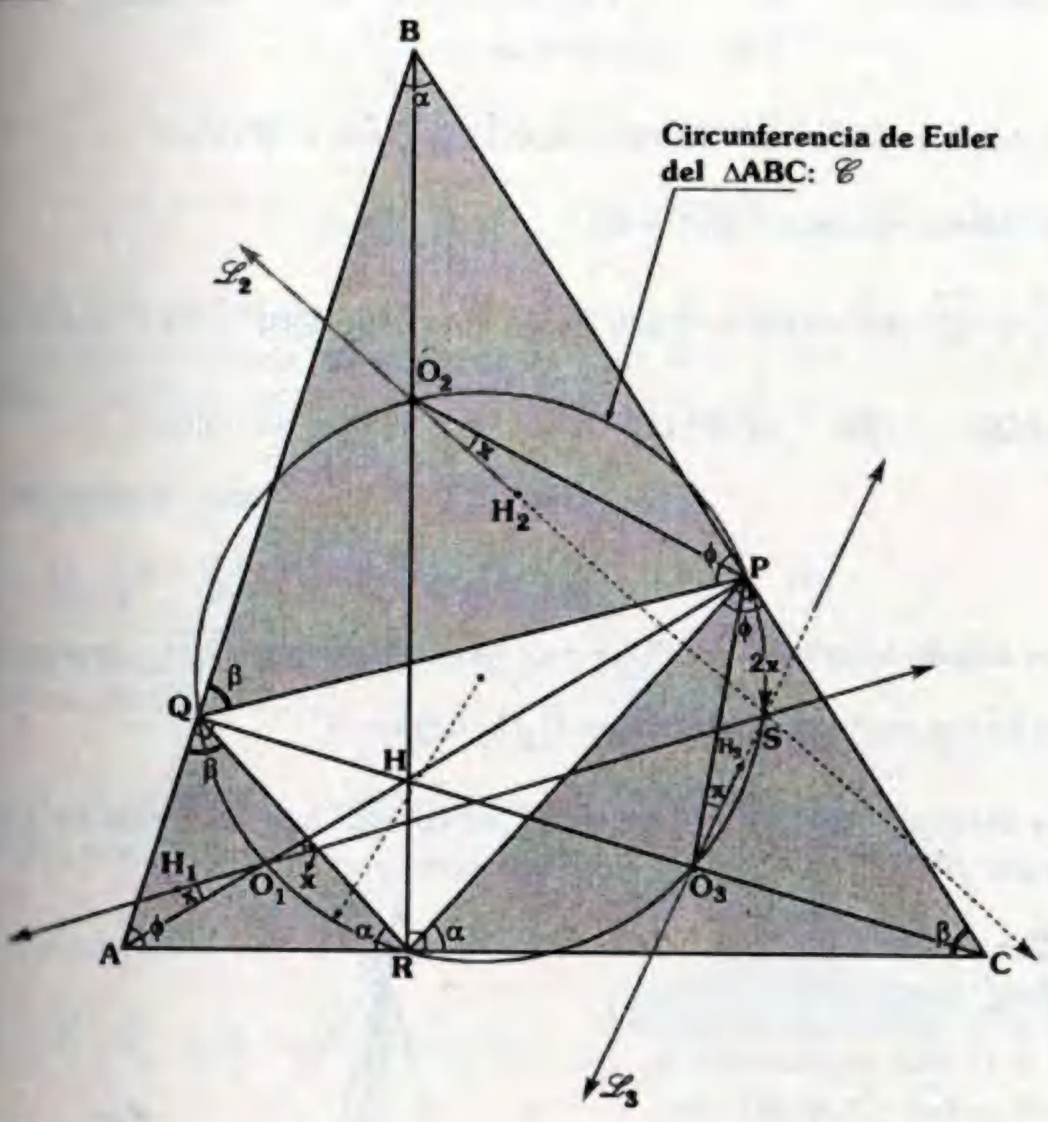
$$\Rightarrow \frac{SC.G_{(M\ y\ N)}}{SL}=\frac{b}{a+c}$$

$\therefore$ El centro de gravedad del triángulo ABC (S) es el incentro del triángulo MNL (Punto de Spieker).

**DEMOSTRACIONES PENDIENTES**

- En el tema sobre recta de Euler se enuncia el siguiente teorema (sin demostración), sea un triángulo ABC y sus alturas $\overline{AP}$, $\overline{BR}$ y $\overline{CQ}$ se cumple que las rectas de Euler de los triángulos AQR, BQR y CPR son concurrentes en un punto que pertenece a la circunferencia de Euler del $\Delta ABC$.

Resolución :




Del gráfico:

- H es ortocentro del ΔABC , entonces al ser los cuadriláteros AQHR, HQBP y RHPC inscriptibles se cumple:
- Las circunferencias circunscritas a los triángulos AQR, QBP y CRP contienen a H.
- Debido a que 𝒞 es la circunferencia de Euler del ΔABC, se cumple:

$$BO_2 = O_2H \ , \quad AO_1 = O_1H \quad y \quad CO_3 = O_3H$$

$\Rightarrow$ $O_1$ es circuncentro del ΔAQR.

$O_2$ es circuncentro del ΔQBP.

$O_3$ es circuncentro del ΔCRP.

- Sean también: $H_1$, $H_2$ y $H_3$ ortocentros de los triángulos AQR, QBP y CRP respectivamente.

- La recta de Euler del triángulo AQR $(\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1})$ corta a $\mathscr{C}$ en S.

- Por ángulo inscrito: $m\widehat{PS} = 2x$

- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ son rectas de Euler de los triángulos QBP y CRP respectivamente.

- $\Delta AQR \sim \Delta QBP \sim \Delta CRP$: $O_1$, $O_2$ y $O_3$: Puntos homólogos

  $H_1$, $H_2$ y $H_3$: Puntos homólogos

  $\Rightarrow \; m\measuredangle H_1O_1A = m\measuredangle H_3O_3P = m\measuredangle H_2O_2P = x$

- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle PO_2S = x \;\Rightarrow$ Al prolongar $\overline{O_2H_2}$ llega a S.

- En forma análoga al prolongar $\overline{O_3H_3}$ llega a S.

■ En un triángulo ABC de ortocentro H, se cumple que las rectas de Euler de los triángulos AHB, BHC, AHC y ABC son concurrentes.

**Demostración :**

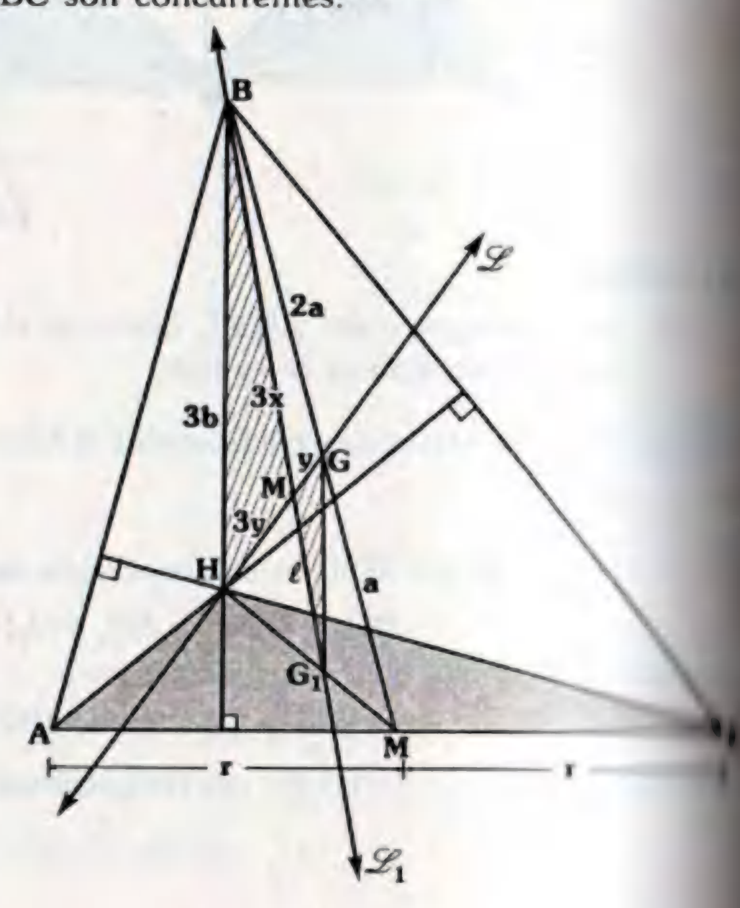
En el gráfico:

- H y G son ortocentro y baricentro del $\Delta ABC$ respectivamente.

- $G_1$ es baricentro del $\Delta ABC$ y B su ortocentro.

- Se sabe que B es ortocentro del $\Delta AHC$.

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ son rectas de Euler de los triángulos ABC y AHC respectivamente.



- Por teoremas sobre el baricentro:

$$HG_1 = 2(G_1M) \quad y \quad BG = 2(GM) \quad \Rightarrow \quad \overline{G_1G} // \overline{HB}$$

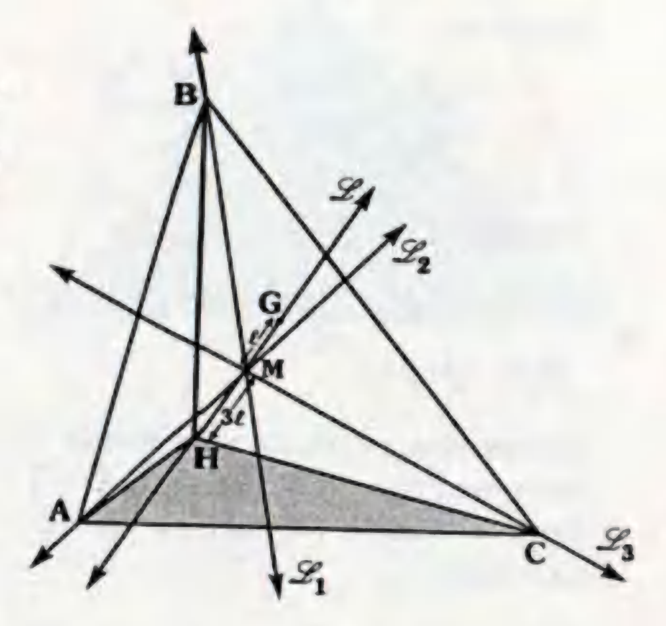
$$\Delta\, G_1MG \sim \Delta\, HMB \quad \Rightarrow \quad HB = 3(G_1G)$$

$$\Delta\, HMB \sim \Delta\, GMG_1 \quad \Rightarrow \quad HM = 3(MG) \quad y \quad BM = 3(MG_1)$$

- Quiere decir que la recta de Euler del triángulo corta a $\overline{HG}$ en la razón de 3 a 1 y en forma análoga las rectas de Euler de AHB y BHC cortaran a $\overline{HG}$ en la misma razón por lo tanto todas serán concurrentes en M.

- En el gráfico:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ son rectas de Euler de los triángulos ABC, AHC, BHC y AHB respectivamente.




- H y G ortocentro y baricentro del ΔABC respectivamente.

- Se cumple entonces:

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ concurren en M.

## [...]CIÓN EN LA GEOMETRÍA

[...] método de inducción matemática es un método especial de demostración que [...] a base de observaciones particulares llegar a deducciones generales.

[...] demostración por el método por inducción consta de dos partes :

[...] Se comprueba que la proposición es valida para el menor de los valores de "n" para los cuales ella tiene sentido (no necesariamente n=1).

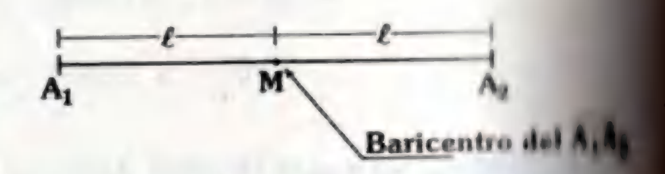
[...] Se demuestra que si la proposición es válida para un número natural "n", también es válida para el número siguiente inmediato, es decir n+1. (Hipotesis inductiva)

[...] demostración del método de inducción no siempre es estricta bajo el esquema, a [...] resulta necesario suponer que la proposición es válida para dos números sucesi- [...] n−1 y n y demostrar que es valida para n+1.

El método de inducción matemática tiene su mayor aplicación en aritmética, álgebra y la teoría de números pero en particular resaltan su belleza en la geometría, a continuación veremos dos teoremas interesantes que tienen que ver con la inducción.

## BARICENTRO DE UN POLÍGONO

- Llamaremos baricentro de un segmento a su punto medio.




- Dado el $\Delta A_1A_2A_3$ sabemos que el baricentro del triángulo es el punto de concurrencia del segmento que une un vértice y los baricentros de los lados opuestos.

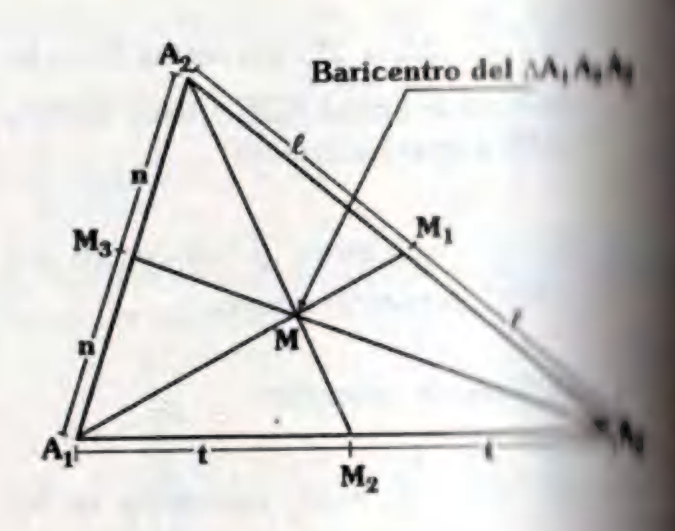
Teorema:

$$\frac{A_1M}{MM_1}=\frac{A_2M}{MM_2}=\frac{A_3M}{MM_3}=2$$

También:

$\overline{A_1A_3} // \overline{M_3M_1}$ , $\overline{A_1A_2} // \overline{M_1M_2}$ y $\overline{A_2A_3} // \overline{M_3M_2}$

Vemos que el baricentro divide a cada mediana en la razón de 2 a 1 desde el vértice (lo cual ya fue demostrada).

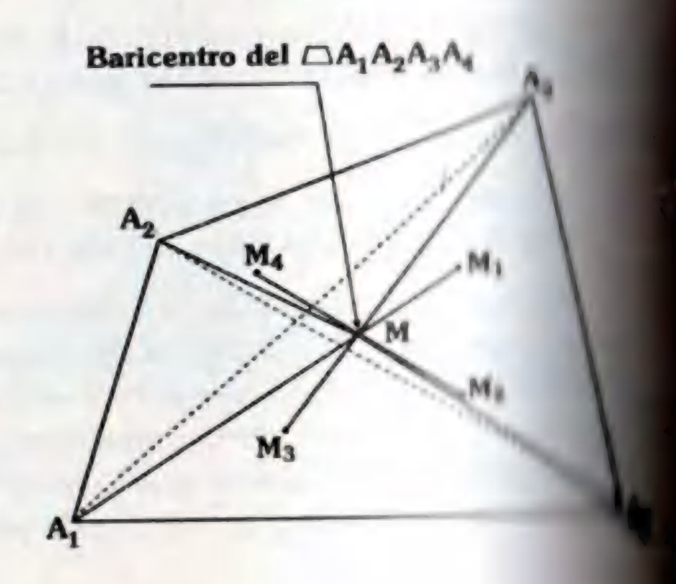



- Ahora vamos a definir el baricentro de un cuadrilátero.

En el gráfico:
$M_1$, $M_2$, $M_3$ y $M_4$ son baricentros de los $\Delta A_2A_3A_4$, $\Delta A_1A_3A_4$, $\Delta A_1A_2A_4$ y $\Delta A_1A_2A_3$ respectivamente.

Llamaremos medianas a :

$\overline{A_1M_1}$, $\overline{A_2M_2}$, $\overline{A_3M_3}$ y $\overline{A_4M_4}$ del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$.



**Teorema:** • $\overline{A_1M_1}$ , $\overline{A_2M_2}$ , $\overline{A_3M_3}$ y $\overline{A_4M_4}$ son concurrentes

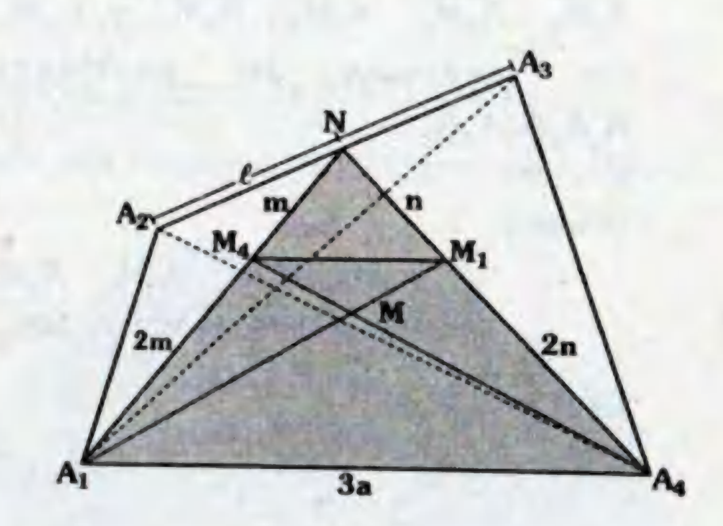
• $$\frac{A_1M}{MM_1} = \frac{A_2M}{MM_2} = \frac{AM}{MM_3} = \frac{A_4M}{MM_4} = 3$$

• $\overline{A_1A_2} // \overline{M_2M_1}$ , $\overline{A_1A_3} // \overline{M_3M_2}$ , $\overline{A_3A_4} // \overline{M_4M_3}$ y $\overline{A_2A_4} // \overline{M_4M_1}$

**Demostración:**

Vamos a demostrar que cada dos medianas se cortan en la misma razón.

Sean $M_4$ y $M_1$ baricentros de los triángulos $A_1A_2A_3$ y $A_2A_3A_4$ ⇒ al prolongar $\overline{A_1M_4}$ y $\overline{A_4M_1}$ cortaran a $A_2A_3$ en su punto medio (N).




Se sabe: $A_2M_4 = 2(M_4N)$

$A_4M_1 = 2(M_1N)$

Por teorema de Tales: $\overline{M_4M_1} // \overline{A_1A_4}$

$\Delta\, A_1NA_4 \sim \Delta\, M_4NM_1$

$\Rightarrow\ A_1A_4 = 3(M_4M_1)$

$\Delta\, M_4M_1M \sim \Delta\, M_4MA_1$

$$\Rightarrow\ \frac{A_1M}{MM_1} = 3 \ \text{ y } \ \frac{A_4M}{MM_4} = 3$$

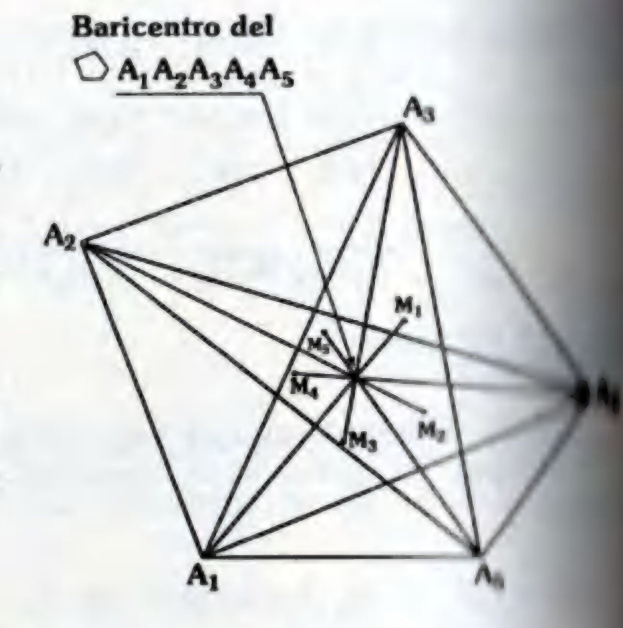
De lo anterior se deduce que cada dos medianas del cuadrilátero se cortan en la razón de 3 a 1 desde el vértice.

- En el pentágono ocurre algo análogo.

  En el gráfico :

  $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ y $M_5$ son baricentros de $A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_3A_4A_5$, $A_2A_4A_5A_1$, $A_3A_5A_1A_2$ y $A_1A_2A_3A_4$ respectivamente.

  $\overline{A_1M_1}$, $\overline{A_2M_2}$, $\overline{A_3M_3}$, $\overline{A_4M_4}$ y $\overline{A_5M_5}$ son medianas del pentágono $A_1A_2A_3A_4A_5$.




Teorema:

$$\frac{A_1M}{MM_1}=\frac{A_2M}{MM_2}=\frac{A_3M}{MM_3}=\frac{A_4M}{MM_4}=\frac{A_5M}{MM_5}=4$$

También:

$$\overline{A_1A_2}//\overline{M_2M_1},\ \overline{A_2A_3}//\overline{M_3M_2},\ \overline{A_3A_4}//\overline{M_4M_3},\ \overline{A_4A_5}//\overline{M_5M_4}\ \text{y}\ \overline{A_5A_1}//$$

- Ahora supongamos que se cumple que el baricentro de un polígono de "n" lados divide a cada mediana en la razón $(n-1)$ a 1.

  Las medianas del polígono son aquellos segmentos que unen sus vértices con baricentros de los polígonos de $(n-1)$ lados formados por los $(n-1)$ vértices restantes.

  En el gráfico:

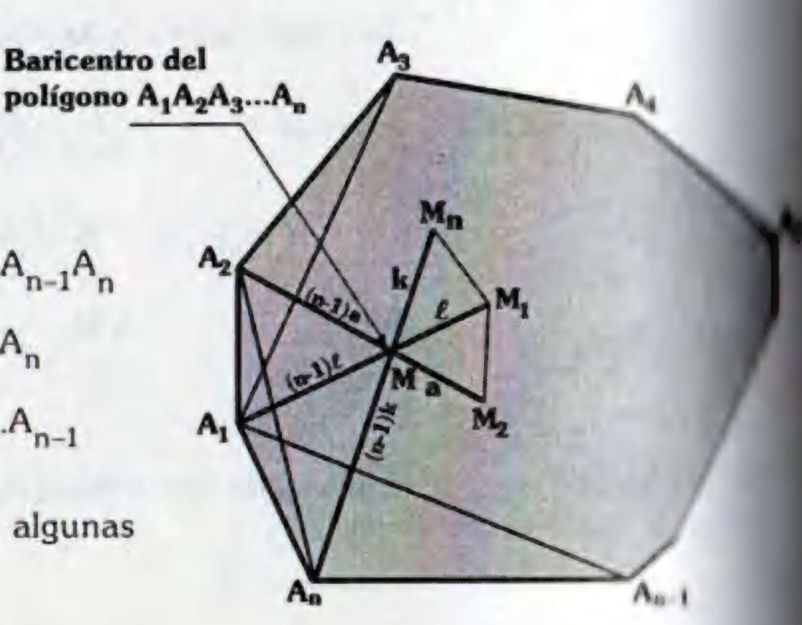
  $A_1A_2A_3A_4....A_{n-1}A_n$ : Polígono de "n" lados

  $M_1$ : Baricentro de $A_2A_3A_4...A_{n-1}A_n$

  $M_2$ : Baricentro de $A_1A_3A_4...A_n$

  $M_n$ : Baricentro de $A_1A_2A_3...A_{n-1}$

  $\overline{A_1M_1}$, $\overline{A_2M_2}$ y $\overline{A_nM_n}$ son algunas de las "n" medianas.



Suponiendo que M divide a cada mediana en la razón $(n-1)$ a 1.

Así tenemos: $$\frac{A_1M}{MM_1}=\frac{A_2M}{MM_2}=\frac{A_nM}{MM_n}=n$$

Similar para las demás medianas, pero como se ha indicado analizaremos solo dos medianas.

También: $\overline{A_1A_2}\,//\,\overline{M_2M_1}$ y $\overline{A_1A_n}\,//\,\overline{M_1M_n}$

Vamos a demostrar que se cumple para un polígono de $(n+1)$ lados.

Será suficiente con demostrar que cada dos medianas del polígono se cortan en la razón de "n" a "1".

En el gráfico:

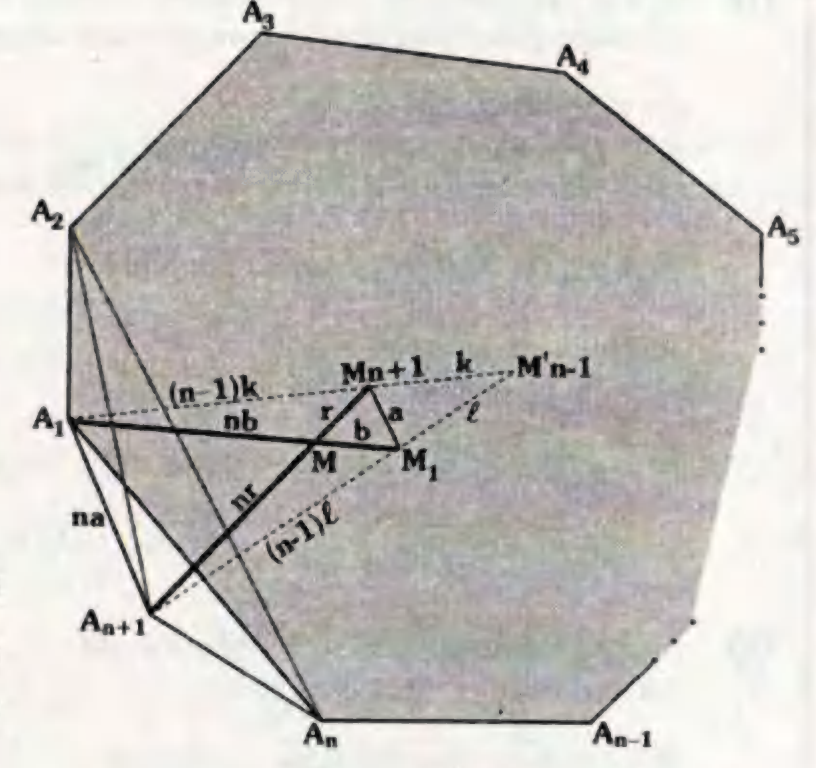
$A_1A_2A_3...A_nA_{n+1}$ : Polígono de $n+1$ lados

Sea:

$M_1$ : Baricentro de $A_2A_3A_4...A_nA_{n+1}$

$M_{n+1}$ : Baricentro de $A_1A_2A_3...A_n$

Ya que $A_1A_2A_3...A_n$ y $A_2A_3A_4A_nA_{n+1}$ son polígonos de "n" lados, lo cual es nuestra suposición.




Considerando:

$M'_{n-1}$: Es el baricentro del polígono de "n−1" lados : $A_2A_3A_4...A_{n-1}A_n$

⇒ Las medianas de $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ y $A_2A_3A_4...A_nA_{n+1}$ trazadas de $A_1$ y $A_{n+1}$ tienen como extremo: $M'_{n-1}$

Se tendrá : $$\frac{A_1M_{n+1}}{M_{n+1}M'_{n-1}}=\frac{A_{n+1}M_1}{M_1M'_{n-1}}=n-1$$

Por teorema de Tales se tendrá: $\overline{A_1A_{n+1}} // \overline{M_{n+1}M_1}$

$$\Delta\, A_1M'_{n-1}A_{n+1} \sim \Delta\, M_{n+1}M'_{n-1}M_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{n+1}A_1}{M\,M_{n+1}} = n$$

$$\Delta\, M_1MM_{n+1} \sim \Delta\, A_1MA_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_1M}{MM_1} = \frac{A_{n+1}M}{M\,M_{n+1}} = n$$

Con lo cual estamos demostradas que cada dos medianas del polígono $A_1A_2A_3...A_nA_{n+1}$ se cortan en la razón de "n" a 1.

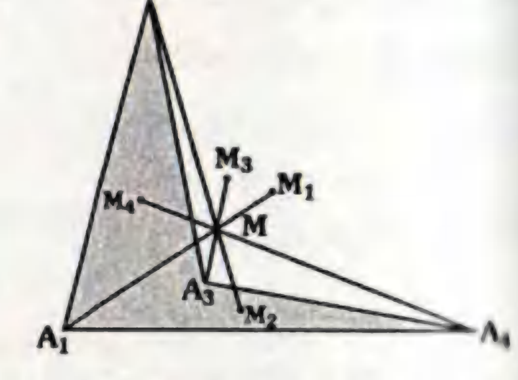


Nota

① *Si bien es cierto en nuestra demostración hemos considerado un polígono convexo pero también se cumple para un polígono no convexo.*

*En el gráfico:*

$M_1$, $M_2$, $M_3$ y $M_4$ *son baricentros de los triángulos:* $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ y $A_1A_2A_3$ *respectivamente.*




*También se cumple:*

- $\dfrac{A_1M}{MM_1} = \dfrac{A_2M}{MM_2} = \dfrac{A_3M}{MM_3} = \dfrac{A_4M}{MM_4} = 3$
- $\overline{A_1A_2} // \overline{M_2M_1}$ , $\overline{A_3A_4} // \overline{M_4M_3}$ , $\overline{A_2A_3} // \overline{M_2M_3}$ y $\overline{A_1A_4} // \overline{M_4M_1}$

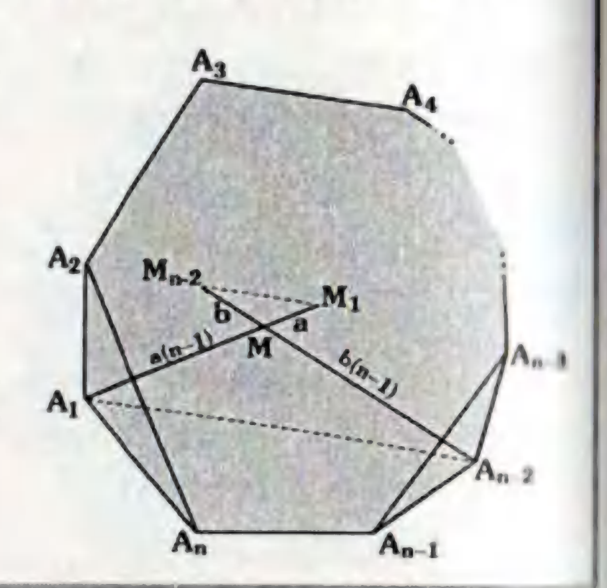
② *En el gráfico se tiene un polígono de "n" lados cuyo baricentro es M.*

*Si ubicamos dos vértices cualesquiera.*

***Por ejemplo:***

$A_1$ y $A_{n-2}$ y sean $\overline{A_1M_1}$ y $\overline{A_{n-2}M_{n-2}}$ *las medianas trazadas desde dichos puntos se cumple:*

$$\boxed{\overline{A_1A_{n-2}} // \overline{M_{n-2}M_1}}$$



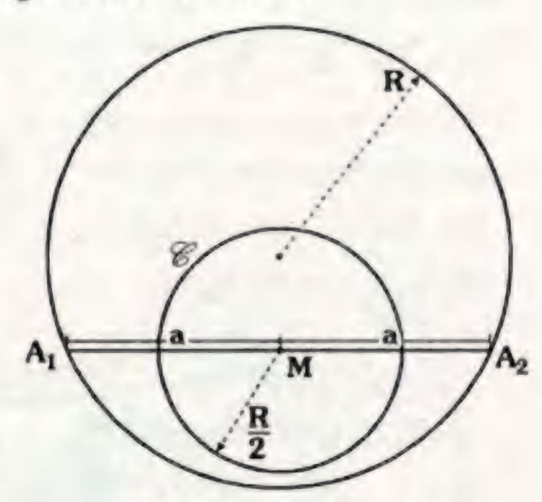
## CIRCUNFERENCIA DE EULER PARA POLÍGONOS INSCRITOS

De forma análoga al análisis anterior, definamos así: primero para una cuerda, el triángulo y el cuadrilatero, y luego el caso de un polígono de "n" lados.

- Dada una circunferencia de radio R se denomina circunferencia de Euler de una cuerda a la circunferencia cuyo centro es el punto medio de la cuerda y su radio R/2.

  En el gráfico: $A_1M = MA_2$

  $\Rightarrow$ $\mathscr{C}$ es la circunferencia de Euler de $\overline{A_1A_2}$.

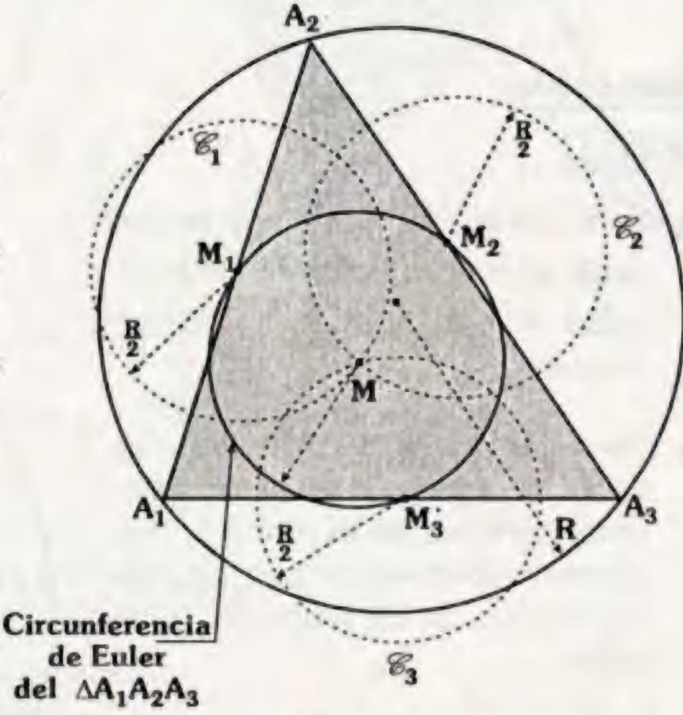



- Sea el triángulo $A_1A_2A_3$ inscrito en la circunferencia de radio R, las tres circunferencias de radio R/2 y pasa por los centros de las circunferencias de Euler de las tres cuerdas.

  Circunferencia se denomina circunferencia de Euler del triángulo $A_1A_2A_3$.

  En el gráfico $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son las circunferencias de Euler de $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ y $\overline{A_3A_1}$ respectivamente las cuales son concurrentes en M.

  En el capítulo sobre circunferencia de Euler (para el triángulo) ya hemos analizado sus propiedades, así como sus demostraciones.



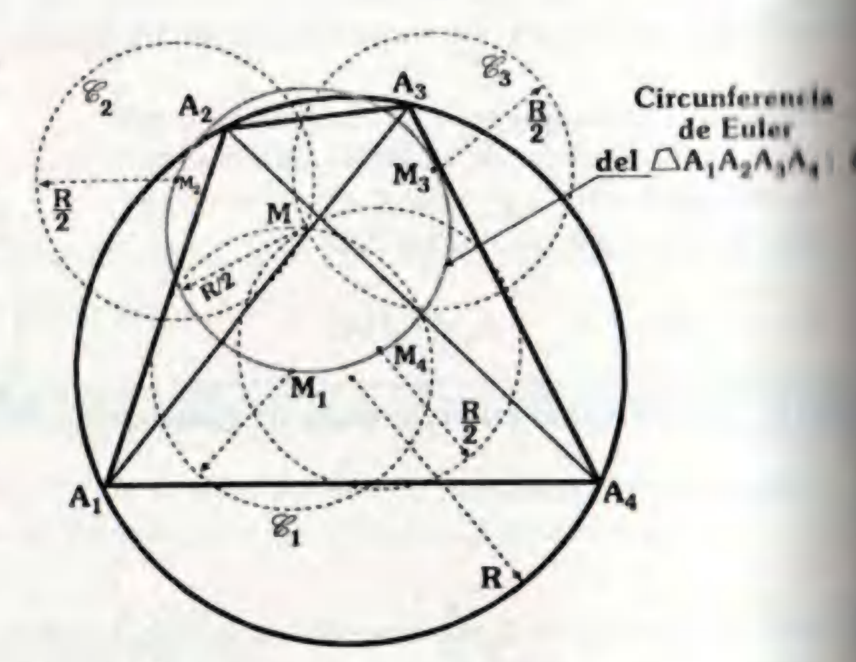

- Dado el cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ inscrito en una circunferencia de radio R, las circunferencias de Euler de los triángulos $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ y $A_4A_1A_2$ son concurrentes en un punto el cual es centro de una circunferencia de radio R/2 y pasa por los centros de las circunferencias de Euler de los cuatro triángulos mencionados a la circunferencia.

A dicha circunferencia se le denomina circunferencia de Euler del $\square A_1A_2A_3A_4$.

En el gráfico:

$M_1$, $M_2$, $M_3$ y $M_4$ centros de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_4$ las cuales son las circunferencias de Euler de los triángulos $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ y $A_4A_1A_2$ respectivamente.

$\mathscr{C}$ : Circunferencia de Euler del $\square A_1A_2A_3A_4$.




***Notar*** : $M_1$, $M_2$, $M_3$ y $M_4 \subset \mathscr{C}$

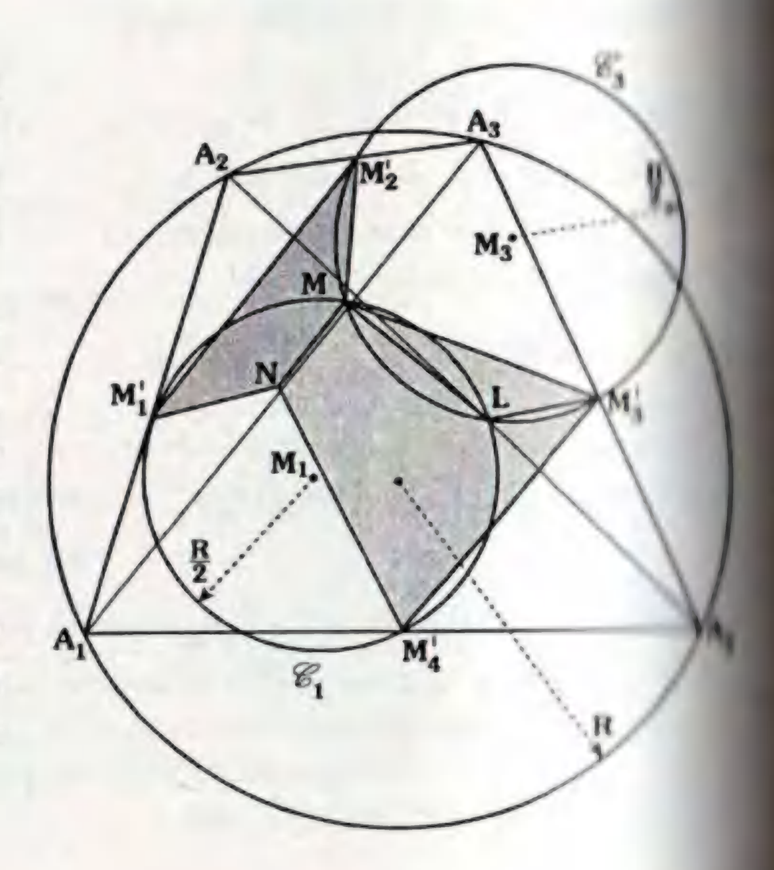
**Demostración:**

**Paso 1**

- En el gráfico $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son las circunferencias de Euler de los triángulos $A_1A_2A_4$ y $A_3A_4A_2$ respectivamente.

- Recordar que la circunferencia de Euler del triángulo es la circunferencia circunscrita al triángulo mediano (es decir pasa por los puntos medios de los lados del triángulo).

- Consideremos: $M_1'$, $M_2'$, $M_3'$, $M_4'$, N y L son puntos medios de $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_1A_4}$, $\overline{A_1A_3}$ y $\overline{A_2A_4}$ respectivamente.



- Debido a que "L" es punto medio de $\overline{A_2A_4}$, entonces "L" pertenece a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, M es el otro punto de intersección.

- Se va a demostrar que los cuadriláteros $M'_1M'_2MN$ y $M'_3M'_4NM$ son inscriptibles, con ello se demostrará la concurrencia de las cuatro circunferencia de Euler en M.

**Paso 2**

**Notar:**

- $A_4M'_4NM'_3$ , $A_4M'_4M'_1L$ y $LM'_2M'_3A_4$ son paralelogramos

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle M'_4M'_1L = x$ y

  $m\measuredangle M'_3M'_2L = y$

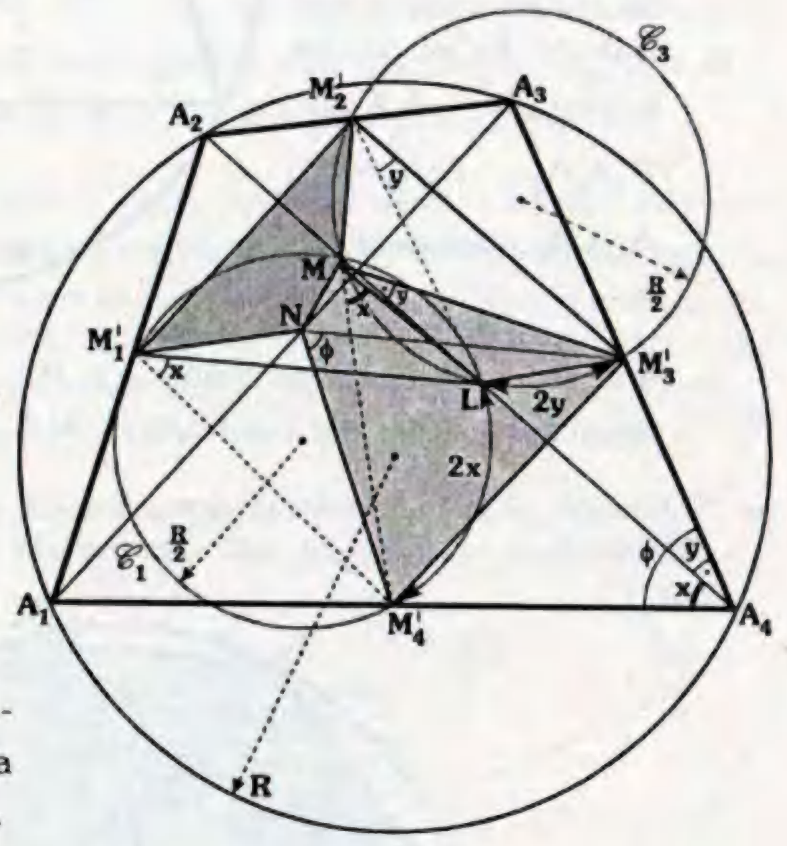
- En $A_4$: $x + y = \phi$

- En $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_3$ por ángulo inscrito:

  $m\measuredangle M'_4ML = x$ y

  $m\measuredangle LMM'_3 = y$

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle M'_4MM'_3 = x + y = \phi$




- Luego el $\square M'_4NMM'_3$ es inscriptible, es decir la circunferencia circunscrita al triángulo $M'_4NL$ contiene a M.

- En forma análoga se demuestra: $m\measuredangle M'_1NM'_2 = m\measuredangle M'_2MM'_1$

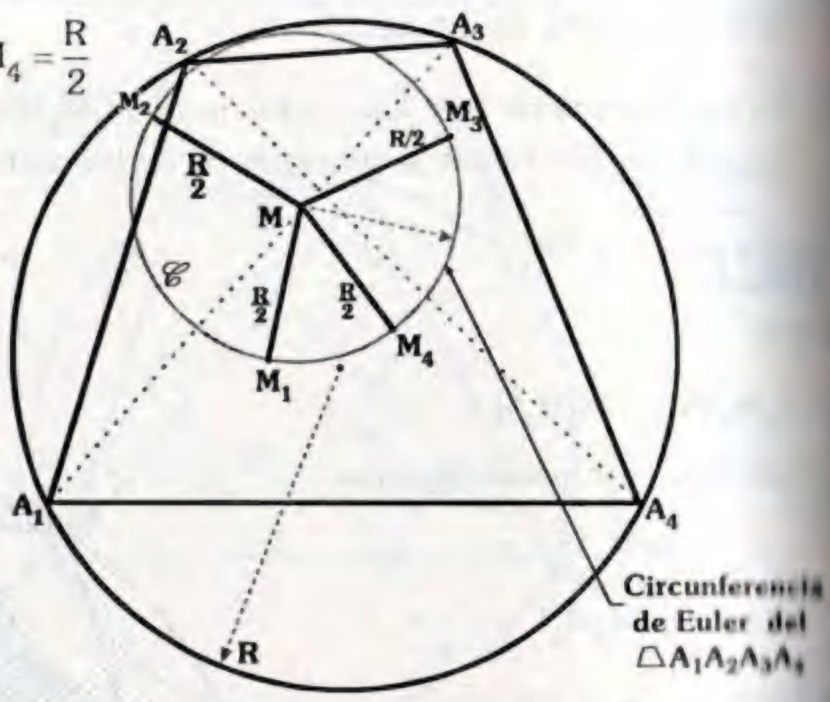
- Es decir el cuadrilátero $M'_1NMM'_2$ es inscriptible.

**Paso 3**

- Ya con la demostración anterior se ha demostrado que las cuatro circunferencias de Euler son concurrentes en M.

- Luego se puede observar:

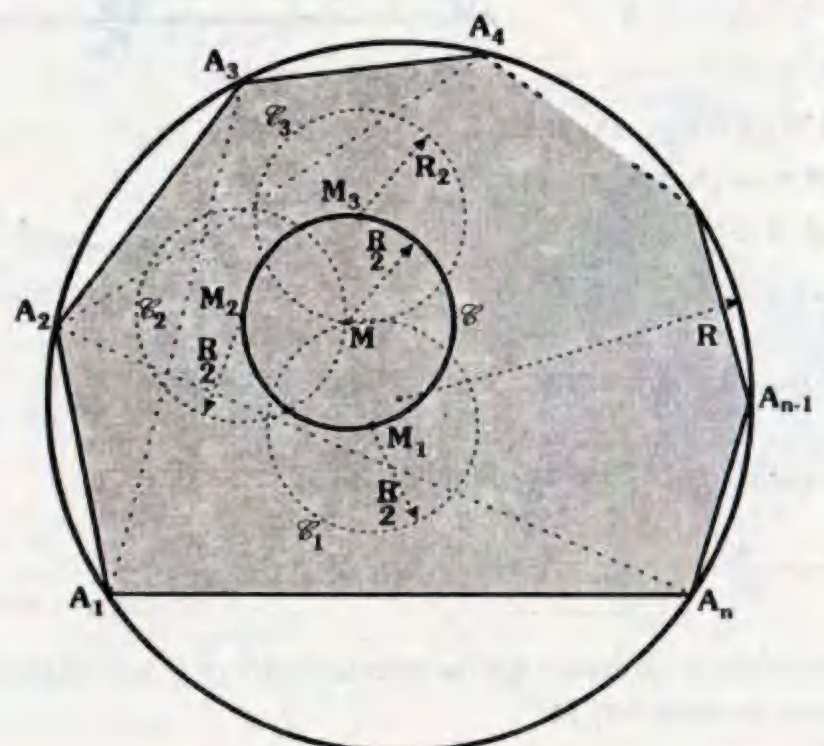
$$MM_1 = MM_2 = MM_3 = MM_4 = \frac{R}{2}$$




- Con lo cual se demuestra que M es centro de una circunferencia que pasa por los centros $M_1$, $M_2$, $M_3$ y $M_4$ de las cuatro circunferencias de Euler de los triángulos $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ y $A_4A_1A_2$ respectivamente.

- A la circunferencia que contiene a $M_1$, $M_2$, $M_3$ y $M_4$ se le llama circunferencia de Euler del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$. ($\mathscr{C}$)

➢ Siguiendo el esquema de la demostración por inducción, supongamos que la circunferencia de Euler ha sido demostrada para un polígono inscrito de "n" lados.



Del gráfico:

$\mathscr{C}_1$: Es la circunferencia de Euler de $A_2A_3A_4...A_{n-1}A_n$.

$\mathscr{C}_2$: Es la circunferencia de Euler de $A_3A_4A_5...A_{n-1}A_1$.

$\mathscr{C}_3$: Es la circunferencia de Euler de $A_4A_5...A_nA_1A_2$.

y así sucesivamente para las demás circunferencias (hasta $\mathscr{C}_n$).

$M_1$, $M_2$, $M_3$ son centros de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ respectivamente.

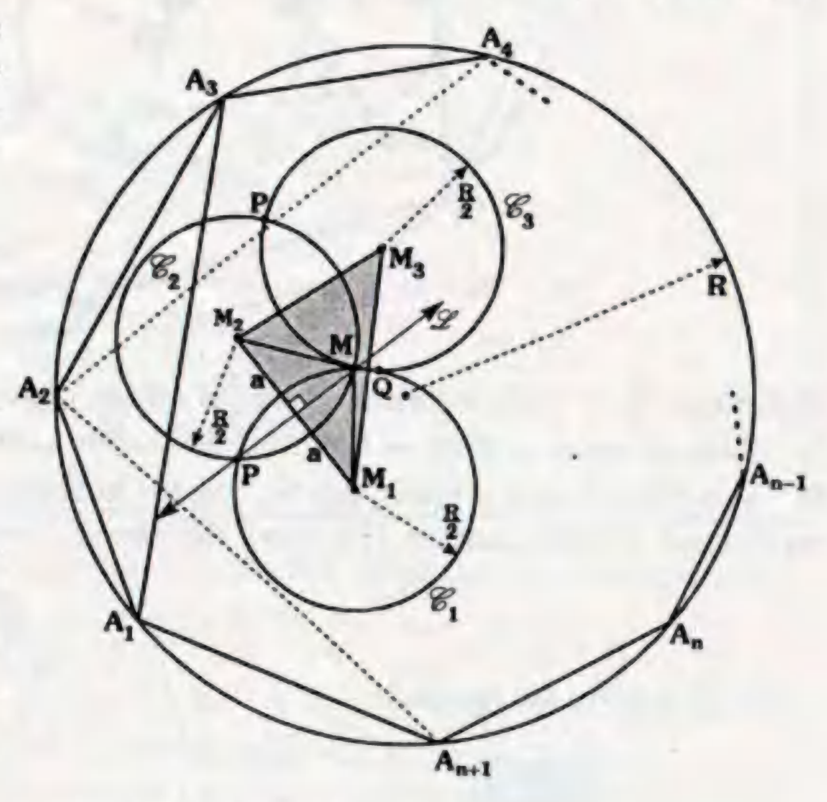
Estamos suponiendo que $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, ... $\mathscr{C}_n$ son concurrentes en M entonces M es centro de una circunferencia ($\mathscr{C}$) que contiene a los centros $(M_1, M_2, M_3...M_n)$. A $\mathscr{C}$ se denomina circunferencia de Euler del polígono $A_1, A_2, A_3, ... A_n$.

- Ahora en el gráfico anterior en el arco $A_1A_n$ vamos a ubicar un punto tal como $A_{n+1}$ y vamos a demostrar que las circunferencia de Euler de los polígonos de "n" lados considerados con concurrentes en un punto el cual será centro de la circunferencia de radio R/2 y contiene a los demás centros. A dicha circunferencia se le denominará circunferencia de Euler para el polígono $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_nA_{n+1}$

Bastará con demostrar que se cortan en un mismo punto tres circunferencia (cualquiera) de Euler de los polígonos de "n" lados.

*Por ejemplo:*

$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$




$\mathscr{C}_1$: Circunferencia de Euler de $A_2A_3A_4...A_nA_{n+1}$

$\mathscr{C}_2$: Circunferencia de Euler de $A_3A_4A_5...A_nA_{n+1}A_1$

$\mathscr{C}_3$: Circunferencia de Euler de $A_4A_5...A_{n+1}A_1A_2$

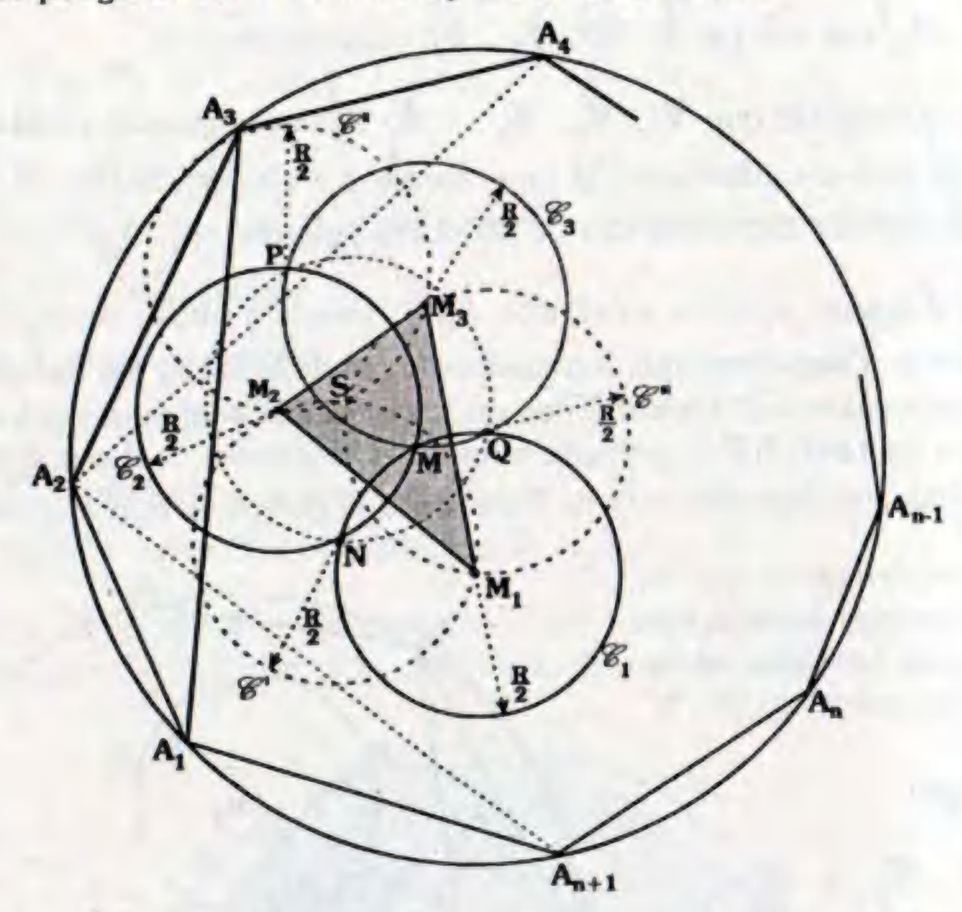
Notar que $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son congruentes y de radio R/2.

Vamos a demostrar que M es circuncentro del $\Delta M_1 M_2 M_3$.

Se observa $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $M_1M_2$ $\left(M_1NM_2M \text{ es rombo}\right)$

De la suposición:

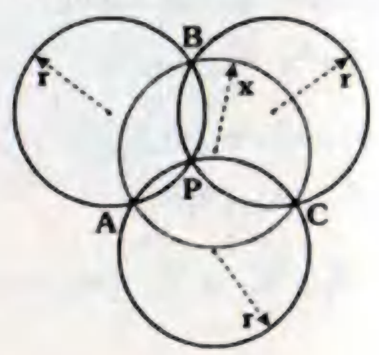
La circunferencia de Euler del polígono inscrito de "n" lados contiene a los centros de las circunferencias de Euler del polígono de $n-1$ lados y estos a su vez contienen a los centros de los polígonos de $n-2$ lados y así sucesivamente.



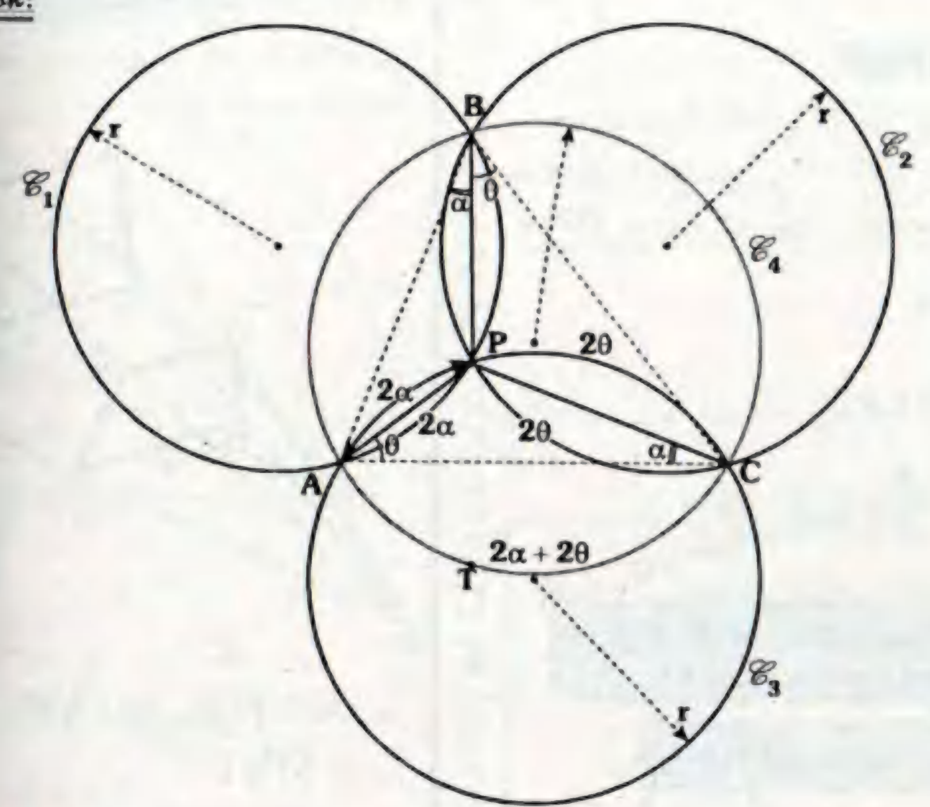

Notar que N, P y Q son centros de las circunferencias de Euler de los polígonos de $n-1$ lados, en el gráfico se han trazado dichas circunferencias tales como $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ y $\mathscr{C}'''$ son congruentes y pasan por S, nuestro problema se reduce a un teorema, el cual mostramos a continuación (Teorema del círculo medio).

En el gráfico se cumple:

$$\boxed{x = r}$$



**Demostración:**




- Se tiene $\mathscr{C}_1 \equiv \mathscr{C}_2 \equiv \mathscr{C}_3$
- Para $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_3$ los arcos comunes $\overset{\frown}{AP}$ miden $2\alpha$.

  $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ los arcos comunes $\overset{\frown}{PC}$ miden $2\theta$.
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle ABC = \alpha + \theta \Rightarrow m\measuredangle \overset{\frown}{ATC} = 2\alpha + 2\theta$
- Debido a que: $m\measuredangle \overset{\frown}{ATC} = m\overset{\frown}{APC} = 2\alpha + 2\theta$

$$\Rightarrow \mathscr{C}_4 \equiv \mathscr{C}_3$$

$$\therefore \; x = r$$

En nuestro gráfico en virtud del teorema ya demostrado se tendrá que la circunferencia circunscrita al triángulo $M_1M_2M_3$ tiene radio R/2.

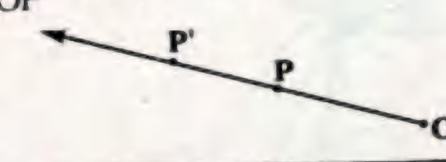
Además se observa : $MM_2 = MM_1 = \dfrac{R}{2} \Rightarrow M$ es circuncentro del $M_1\,M_2\,M_3$ con lo cual queda demostrado que cada tres circunferencias de Euler del polígono de "n" lados pasan por M, el cual será el centro de una circunferencia de radio R/2 y que pasa por $M_1$ , $M_2$ , $M_3$ , ... $M_n$ , dicha circunferencia es la circunferencia de Euler del polígono inscrito de n+1 lados.

## HOMOTECIA

### HOMOTECIA DE UN PUNTO

Dado un punto fijo O y una razón constante k se dice que P' es el homotético de P, si P' pertenece al rayo OP y $\frac{OP'}{OP}=k$.

Si $\frac{OP'}{OP}=k$ $(k \in \mathbb{R})$



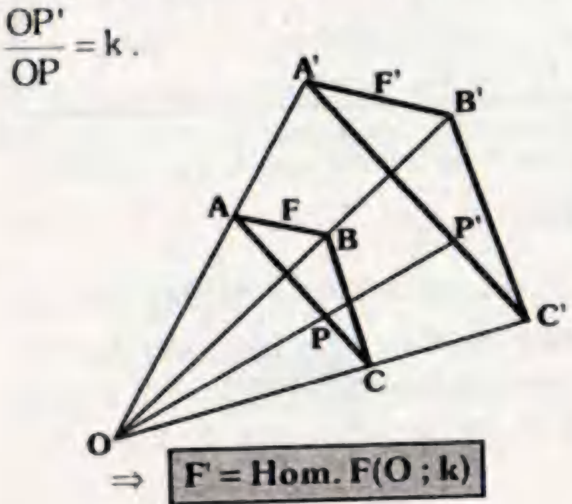

⇒ **P' es el homotético de P, respecto de O y de razón k**

Notación: **P' = Hom. P(O ; k)**

### HOMOTECIA DE UNA FIGURA

Dado un punto fijo O y una razón constante k se dice que la figura F' es homotética de F, si para todo punto P' de F' le corresponde un punto P de F, tal que P' es homotético de P respecto de O.

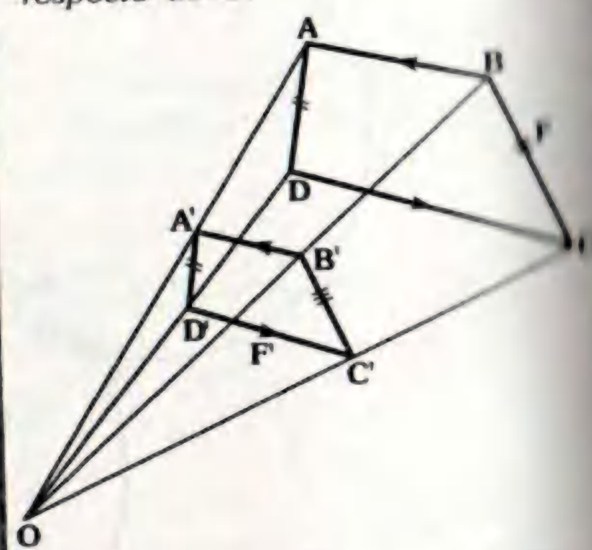
Si $\forall P' \in F' \exists\ P \in F$, tal que $P' \in \overrightarrow{OP}$ y $\frac{OP'}{OP}=k$.



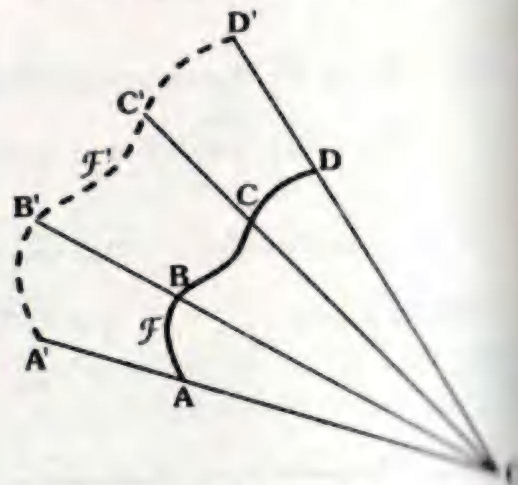

⇒ **F' = Hom. F(O ; k)**

*Observación*

*Si ABCD es homotético de A'B'C'D', respecto de O.*



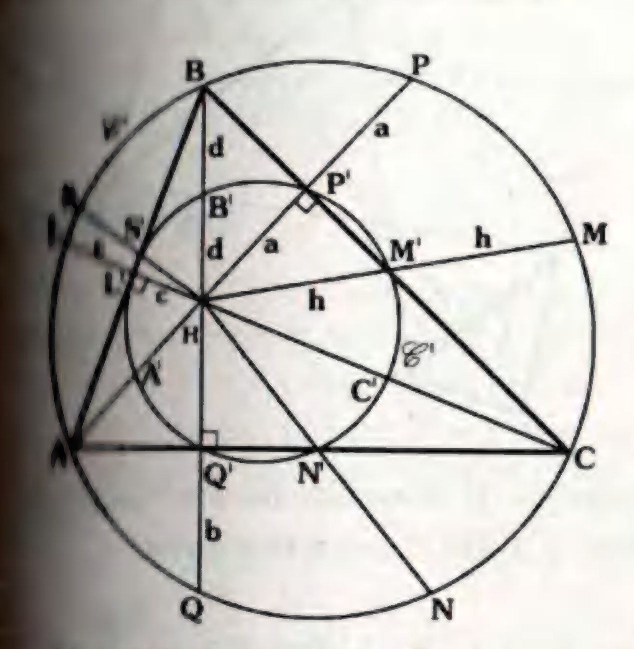

- $\overline{AD} // \overline{A'D'}$, $\overline{AB} // \overline{A'B'}$, $\overline{BC} // \overline{B'C'}$ y $\overline{CD} // \overline{C'D'}$
- △ ABCD ~ △ A'B'C'D'




*Si A', B', C' y D' son puntos homotéticos de A, B, C y D respectivamente, con respecto a O.*

*Si seguimos ubicando los homotéticos de todos los puntos de $\mathcal{F}$, nos daremos cuenta que dichos puntos describen una curva $\mathcal{F}'$ es semejante a $\mathcal{F}$.*

## [illegible]TRACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA DE LOS [illegible] PUNTOS




- H : Ortocentro de $\Delta ABC$.
- Por el teorema 8.5:

  $HP' = PP' = a$ , $HQ' = QQ' = b$ y

  $HL' = LL' = c$
- Por dato :

  $HA' = AA' = c$ , $HB' = BB' = d$ y

  $HC' = CC' = f$
- Como M', N' y S' son puntos medios (de la observación posterior)

  $HM' = M'M = h$

  $HN' = N'N = i$

  $HS' = S'S = g$
- Se observa :

$$\frac{AH}{A'H} = \frac{BH}{B'H} = \frac{CH}{C'H} = \frac{PH}{P'H} = \frac{QH}{Q'H} =$$

$$\frac{LH}{L'H} = \frac{NH}{N'H} = \frac{SH}{S'H} = 2$$

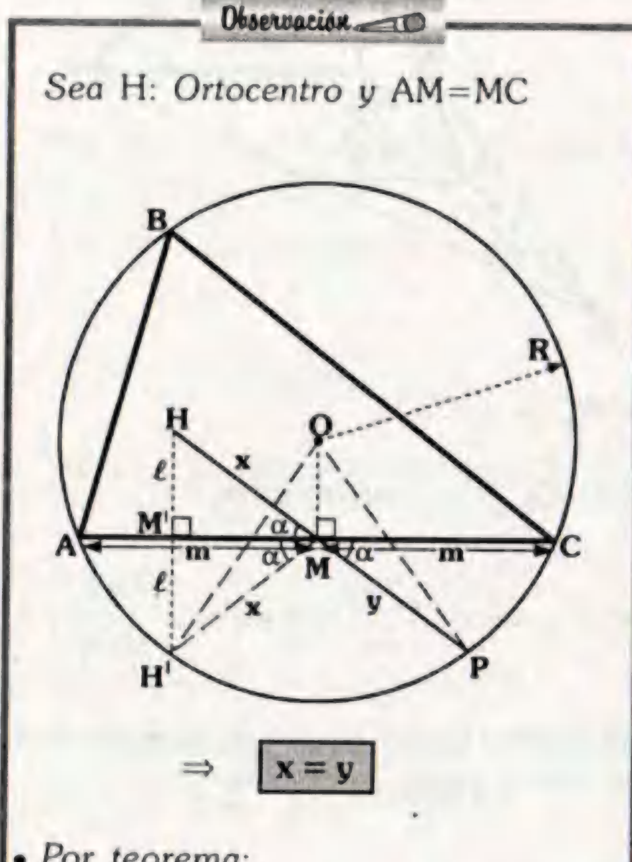
$\Rightarrow$ A', B', C', P', Q', L', M', N' y S' son homotéticos de A, B, C, P, Q, L, M, N y S respectivamente, con respecto a H, entonces A', B', C', P', Q', L', M', N' y S' describen o pertenecen a la circunferencia $\mathscr{C}_1$, cuya razón de homotecia 2.

$$\therefore \ \mathscr{C}' = \text{Hom}\,\mathscr{C}\ (H\ ;\ 2)$$

Además la relación de radios de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ es 2.

**Observación**

*Sea* H: *Ortocentro y* AM=MC




$\Rightarrow$ **x = y**

- *Por teorema*:

  $HM' = M'H' = \ell \ \Rightarrow \ H'M = x$ y

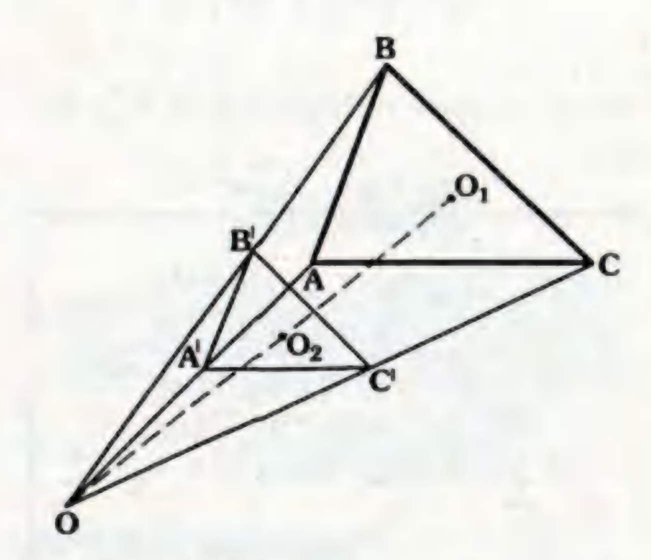
  $m\measuredangle HMM' = m\measuredangle M'MH' = m\measuredangle CMP = \alpha$
- $\Delta OMH' \cong \Delta OPM$

  $\therefore \ x = y$

**CONCLUSIONES IMPORTANTES**

- Si $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'} = \dfrac{OC}{OC'} = k$

$\Rightarrow$ El $\Delta ABC$ es homotético del $\Delta A'B'C'$.




$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Sean $O_1$ y $O_2$ circuncentros

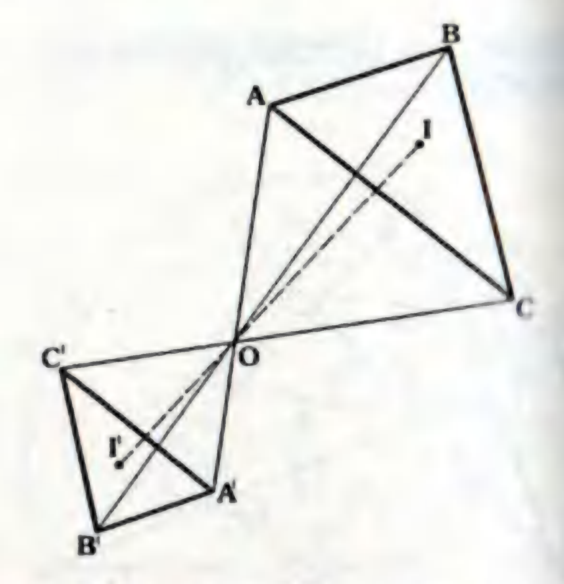
$\Rightarrow$ $O_1$, $O_2$ y O: Colineales y $\dfrac{OO_1}{OO_2} = k$

Del mismo modo podemos trabajar con los demás puntos notables.

**También:**

- Si $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{OC'}{OC} = r$

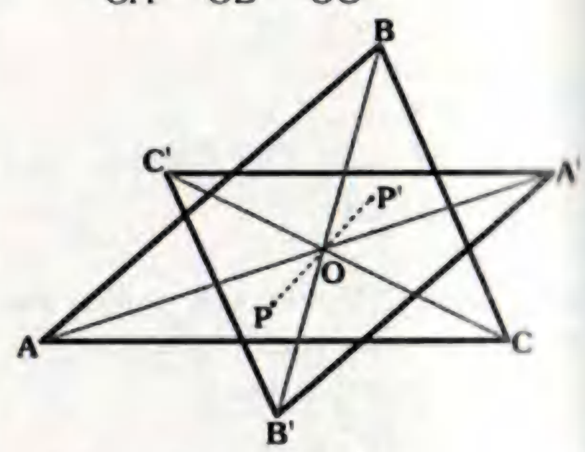
$\Rightarrow$ El $\Delta A'B'C'$ es homotético del $\Delta ABC$.




Sean I e I' incentros de los triángul
ABC y A'B'C' respectivamente.

$\Rightarrow$ I, O y I': Colineales y $\dfrac{OI'}{OI} = r$

- Si $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{OC'}{OC} = k$




$\Rightarrow$ El $\Delta A'B'C'$ es homotético del $\Delta ABC$, respecto de O.

Sean P y P' puntos notables de una mis ma característica de los triángulos ABC y A'B'C', respectivamente.

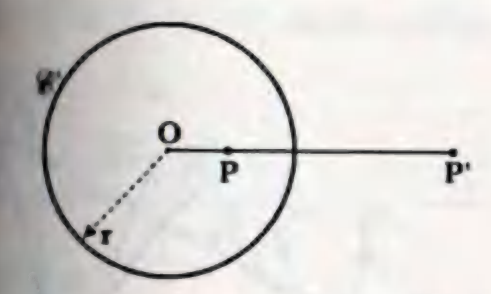
$\Rightarrow$ P, O y P' son colineales y $\dfrac{OP'}{OP} = k$

## INVERSIÓN

Es una transformación geométrica anamórfica (es decir cambia la forma de la figura original), la inversión fue creada por Steiner (1 796 - 1 863).

## PUNTOS INVERSOS

Sean P y P' son colineales con O, el cual es centro de una circunferencia de radio r, tal que $(OP)(OP')=r^2$, cada uno de los puntos P y P' es inverso del otro respecto de la circunferencia.




En el gráfico:

$$(OP)(OP')=r^2$$

O : Centro de inversión

𝒞 : Circunferencia de inversión

P y P' son inversos

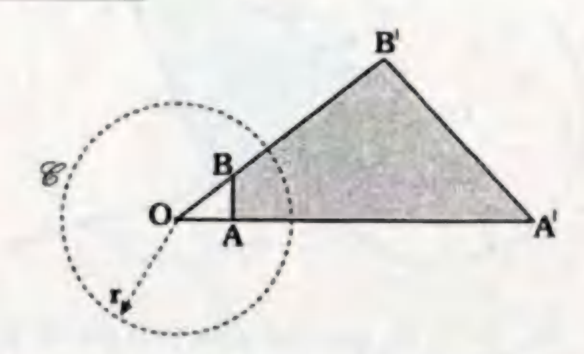
**Observación**

1. *Si un punto está en la circunferencia de inversión en su propio inverso.*
2. *Si un punto está en la región interior su inverso está en la parte externa.*

## ALGUNOS TEOREMAS SOBRE INVERSIÓN

➢ Dos puntos y sus respectivos inversos respecto a un centro de inversión son vértices de un cuadrilátero inscriptible.

**Demostración:**




- Sea O y 𝒞 centro y la circunferencia de inversión.
- A y A' : Puntos inversos respecto de 𝒞.

$$\Rightarrow \quad (OA)(OA')=r^2$$

- B y B' : Puntos inversos respecto de 𝒞.

$$\Rightarrow \quad (OB)(OB')=r^2$$

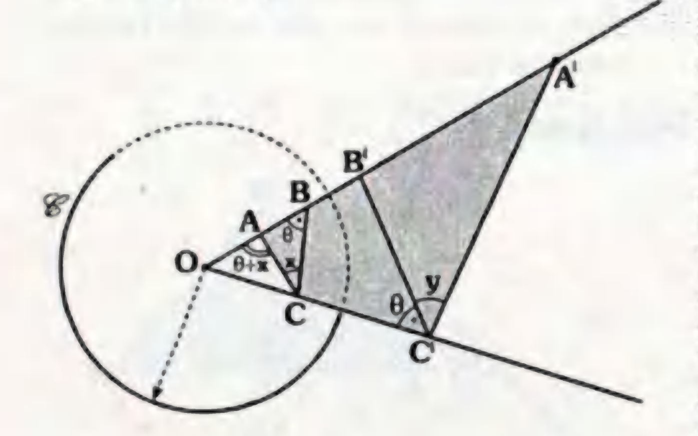
- Luego $(OA)(OA')=(OB)(OB')$
- Por recíproco del teorema de la secante el ⏢AA'B'C' es inscriptible.

➢ Sean A y B dos puntos colineales con el centro de la circunferencia de inversión y sea C un punto que no esta en $\overleftrightarrow{AB}$ y sean A', B' y C' sus inversos, se cumple:

$$m\measuredangle ACB = m\measuredangle A'C'B'$$

**Demostración:**

- Sea O y $\mathscr{C}$ : Centro y circunferencia de inversión.




- A', B' y C' puntos inversos de A, B y C respectivamente.
- Por el teorema anterior :

$\triangle$CBB'C' y $\triangle$CAA'C son inscriptibles.

$\Rightarrow$ m∡OBC = m∡OC'B = θ

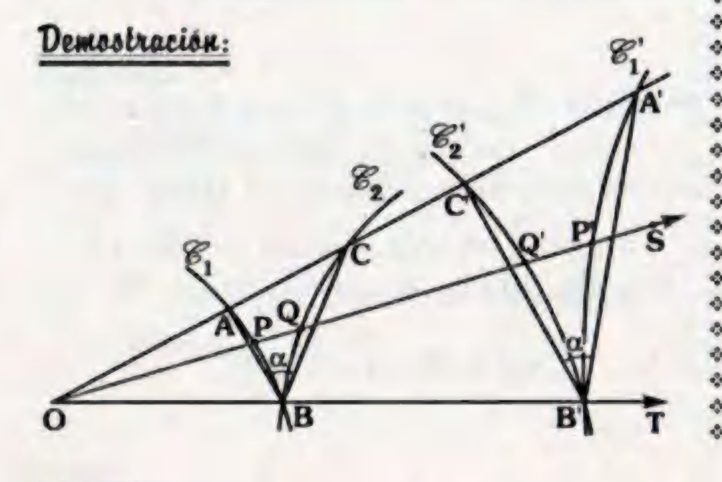
m∡OAC = m∡OC'A'

$\Rightarrow$ θ+x = θ+y

$\therefore$ x = y

➤ Si dos curvas se intersecan en un punto distinto del centro de inversión, la medida del ángulo en ese punto es el mismo que el de sus inversos.

**Demostración:**



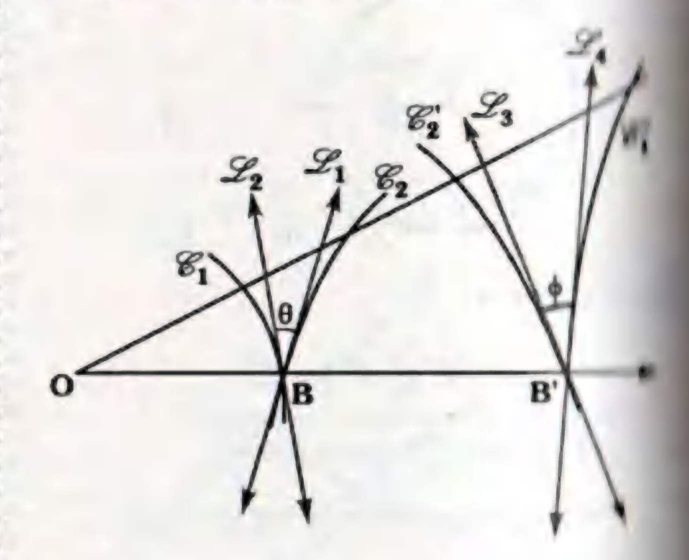

- Sea O el centro de inversión.
- A', B' y C' son inversos de A, B y C respectivamente.
- Por el teorema anterior:

m∡ABC = m∡A'B'C'

- Si nos aproximamos a $\overrightarrow{OT}$ y trazamos $\overrightarrow{OS}$ (P' y Q' son inversos de P y Q).

$\Rightarrow$ m∡PBQ = m∡P'B'Q'

- En el caso límite:




- $\mathscr{C}_1$' y $\mathscr{C}_2$' son curvas inversas de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ respectivamente.

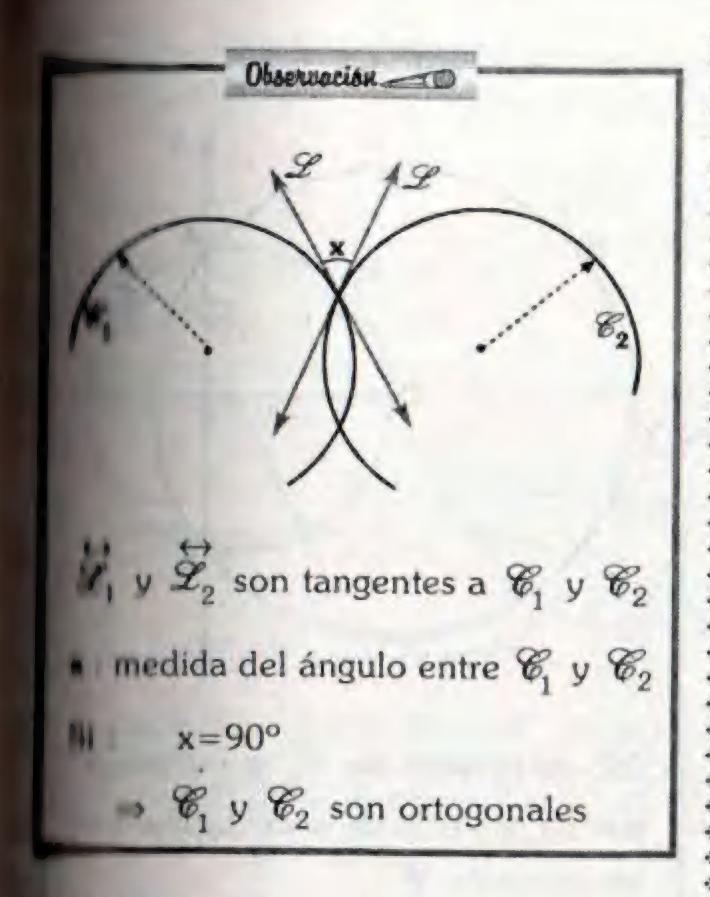
θ : medida de ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

ϕ : medida de ángulo entre $\mathscr{C}_1$' y $\mathscr{C}_2$'

- Se cumple:

θ = ϕ

**Observación**




$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son tangentes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

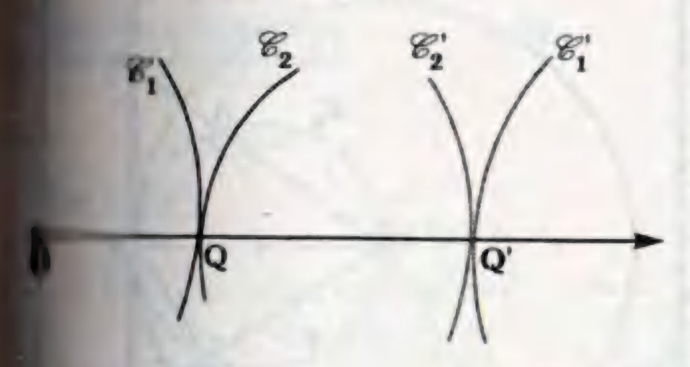
x : medida del ángulo entre $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

Si : $x=90°$

$\Rightarrow$ $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son ortogonales

**COROLARIO**

Si dos curvas son tangentes sus inversas también lo son :



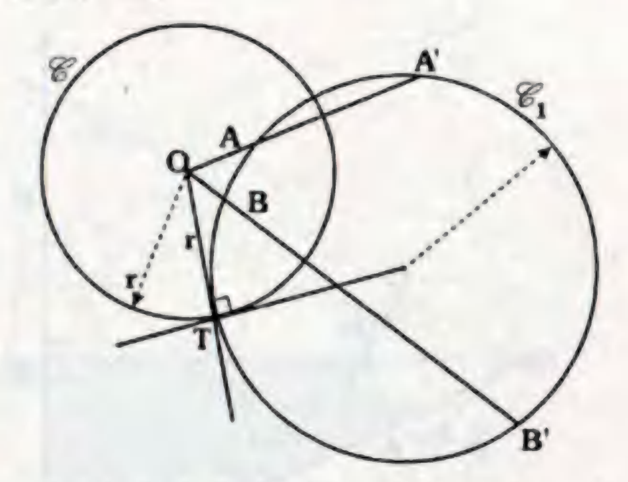

$\mathscr{C}_1'$ y $\mathscr{C}_2'$ son inversas de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ respecto al centro de inversión O.

Si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes en Q.

$\Rightarrow$ $\mathscr{C}_1'$ y $\mathscr{C}_2'$ son también tangente en Q' ( Q' y Q son inversas)

➤ Toda circunferencia que pasa por dos puntos inversos es su propia inversa y es ortogonal a la circunferencia de inversión.

**DEMOSTRACIÓN**




- Sea A y A' inversos respecto de la circunferencia de inversión $\mathscr{C}$ y centro O.

$$\Rightarrow \quad (OA)(OA') = r^2$$

- Por teorema de la tangente: $\overline{OT}$ es tangente a $\mathscr{C}_1$.

$$\Rightarrow \quad \mathscr{C} \text{ y } \mathscr{C}_1 \text{ son ortogonales}$$

- También $(OB)(OB') = r^2 \Rightarrow$ B y B' son inversos.

***Importante:***

Dada una circunferencia entonces las siguientes figuras son sus propias inversas:

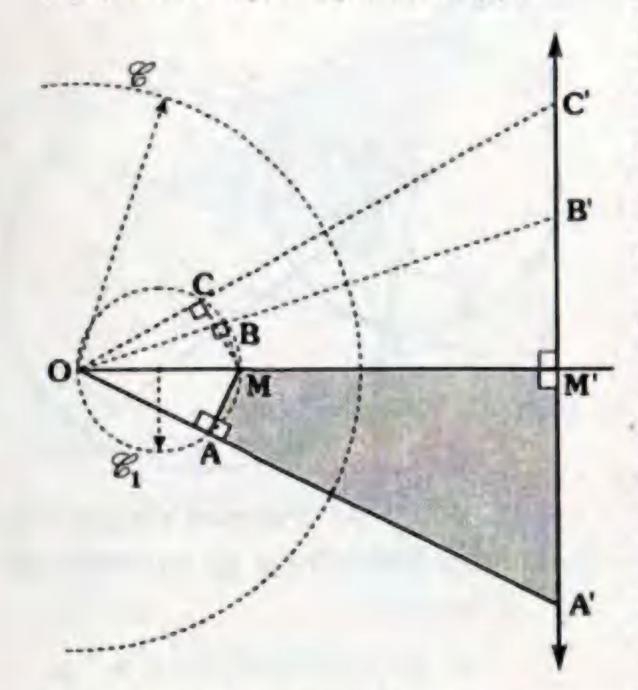
**a.** La circunferencia de inversión.

**b.** Las rectas que pasan por el centro de inversión.

**c.** Las circunferencias ortogonales a la circunferencia de inversión.

## INVERSIÓN DE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

➤ El inverso de una recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por el centro de inversión y recíprocamente.




Sea $\mathscr{C}$ y O la circunferencia y centro de inversión.

Se traza $\overline{OM}' \perp$ a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$

Se ubica M inverso de M'

Sean A, B y C inversos de A', B' y C' sus respectivos inversos.

$\Rightarrow$ ⏢A'AMM', ⏢M'MBB' y ⏢M'MCC'

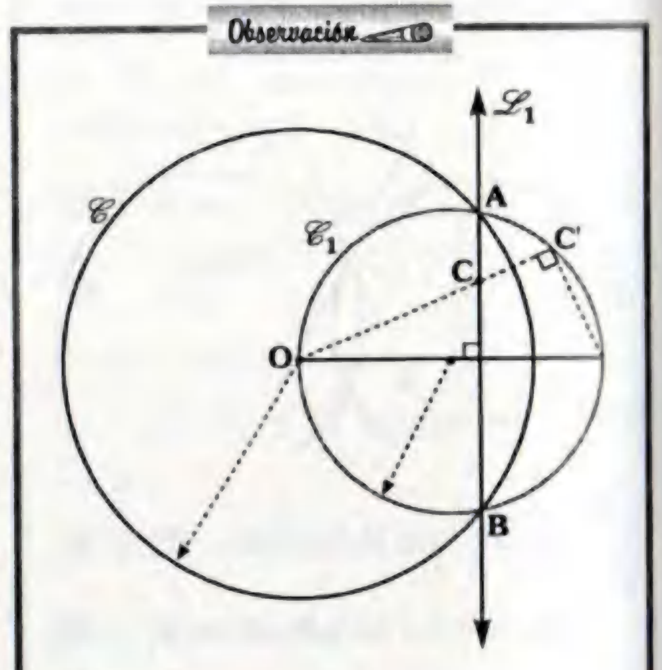
Son inscriptibles:

$\Rightarrow m\measuredangle OAM = m\measuredangle MBO = m\measuredangle MCO = 90°$

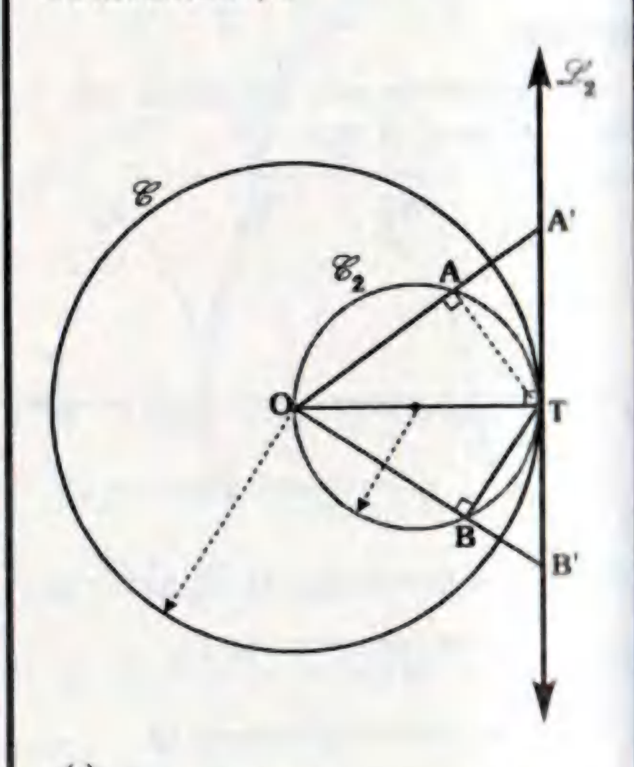
Finalmente O, A, M, B y C son concíclicos

Luego $\mathscr{C}_1$ es inverso de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ para la demostración del recíproco es análogo.

**Observación**




$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ es inverso de $\mathscr{C}_1$ y recíprocamente respecto de la circunferencia de inversión $\mathscr{C}$.




$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\mathscr{C}_2$ son inversos respecto de la circunferencia de inversión $\mathscr{C}$.

➤ El inverso de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia que no pasa por ese punto.

Sean O y $\mathscr{C}_1$ centro y circunferencia de inversión P' y Q' son inversos de P y Q respectivamente.

Por teorema:

$m\measuredangle APB = m\measuredangle A'P'B' = 90^o$

$m\measuredangle AQB = m\measuredangle A'Q'B' = 90^o$

$\Rightarrow$ A'B'Q' y P' son concíclicos.

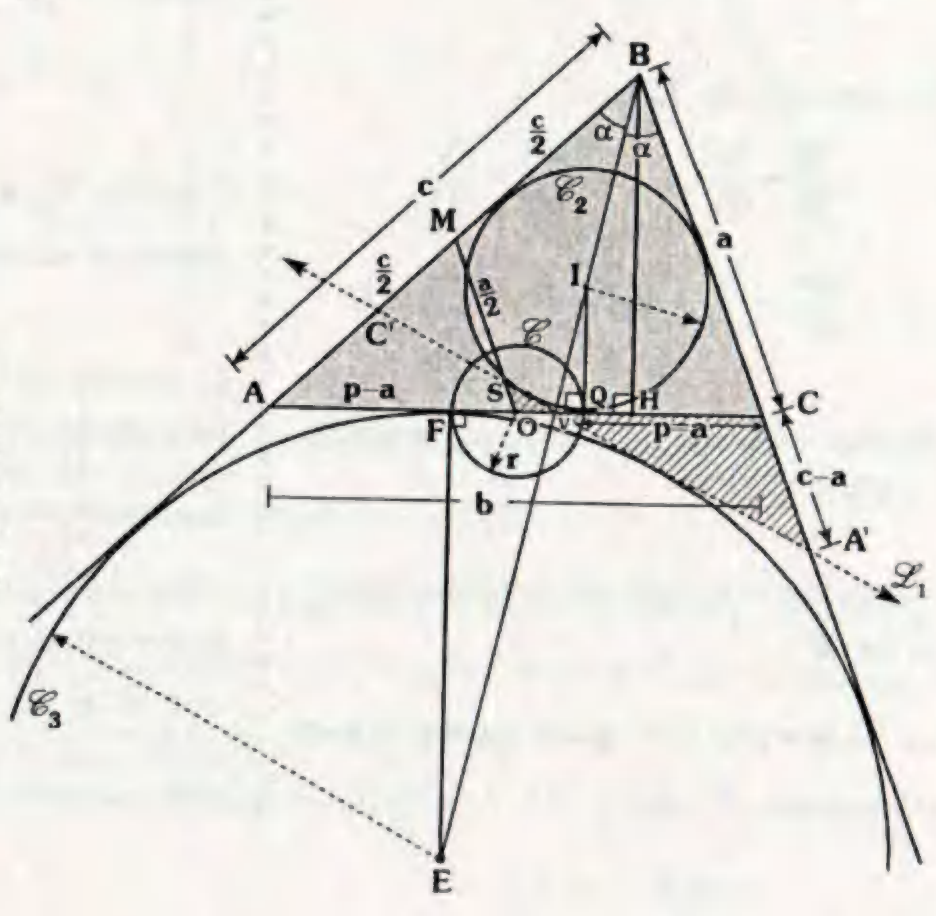
$\therefore$ $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son inversas.



## TEOREMAS FEUERBACH

**DEMOSTRACIÓN:**

La circunferencia de Euler de un triángulo es tangente a la circunferencia inscrita y a cada una de las circunferencias exinscritas.



En el gráfico se ha trazado $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ tangente interior a la circunferencia inscrita y exinscrita la cual paras por V.

Por teorema de circunferencia:

AF=QC= p−c, sea O punto medio de $\overline{AC}$ (notar FO=OQ) y $\mathscr{C}$ la circunferencia de radio: r

$$r=\frac{QF}{2}=\frac{c-a}{2},$$

la cual será nuestra circunferencia de inversión y O centro de inversión.

Debido a que I es incentro y E es excentro relativo a $\overline{AC}$:

$$\Rightarrow \quad \frac{BI}{IV}=\frac{VE}{BE}$$

Por teorema de Tales:

$$\frac{BI}{IV}=\frac{QH}{QV} \quad y \quad \frac{VE}{BE}=\frac{FV}{FH}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{QH}{QV}=\frac{FV}{FH}, \text{ luego F, V, Q y H .}$$

Forman cuaterna armónica, por teorema $\Rightarrow (OV)(OC)=r^2$ .

Luego V y H son puntos inversos respecto de $\mathscr{C}$ .

Se ha trazado $\overline{OM}$ (base media) la cual interseca a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ en S:

$$\Rightarrow \triangle OSV \sim \triangle CA'V$$

Por teorema de la bisectriz:

$$\frac{VC}{VA}=\frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad VC=\frac{ab}{a+c}$$

$$OV=\frac{b}{2}-\frac{ab}{a+c}=\frac{b}{2}\frac{(c-a)}{(a+c)}$$

Por teorema de circunferencia :

$$\triangle ABC \cong \triangle A'BC' \quad \Rightarrow \quad BA'=c$$

Luego: $\quad A'C=c-a$

Por la semejanza de OSV y CA'V :

$$\frac{OS}{A'C}=\frac{OV}{VC} \quad \Rightarrow \quad OS=\frac{(c-a)^2}{2a}$$

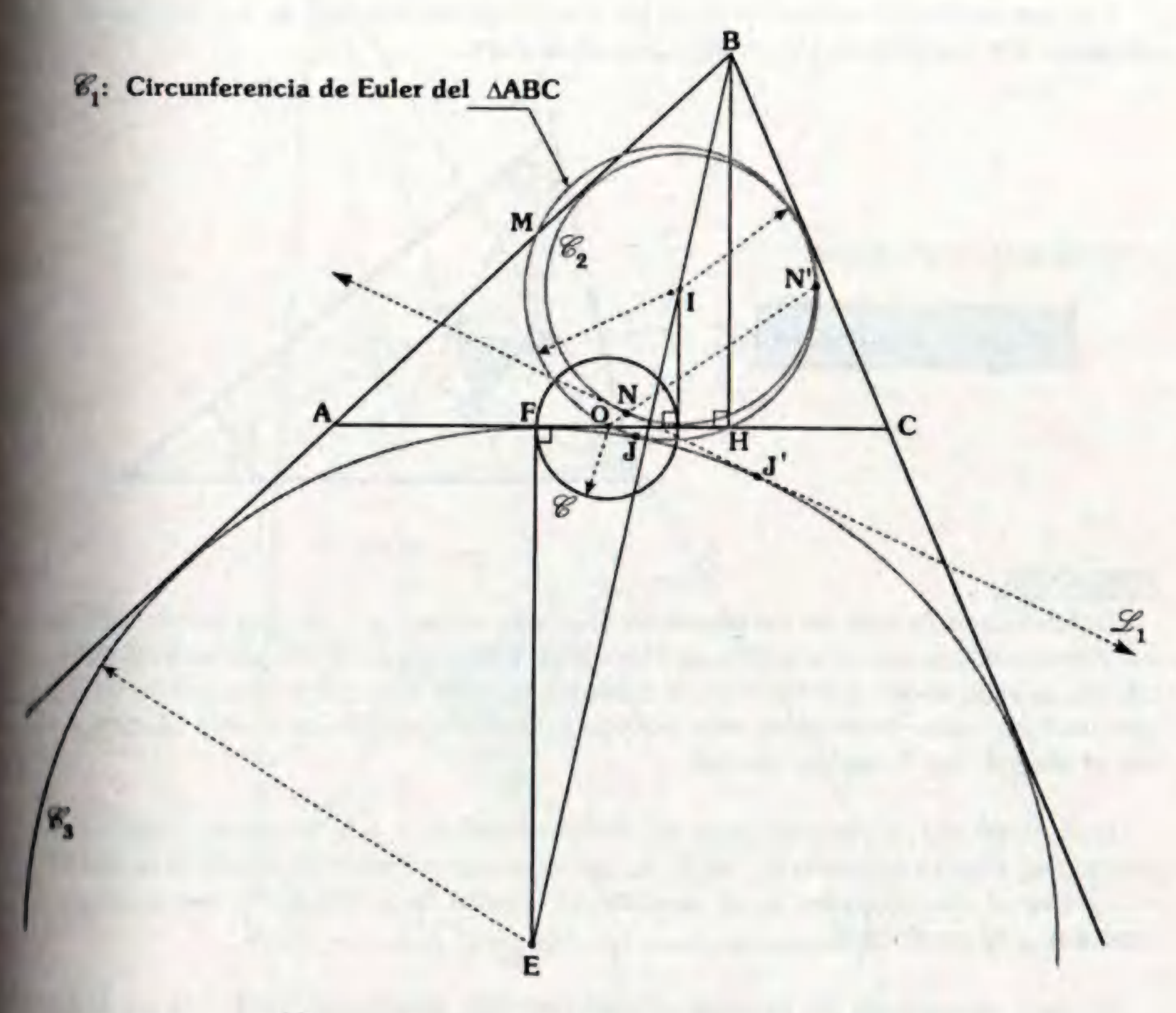
Luego : $\quad (OS)(OM)=\left(\frac{c-a}{2}\right)^2=r^2$

$\Rightarrow$ S y M son puntos inversos

También $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ son ortogonales a $\mathscr{C}$ entonces son sus propios inversos.

El inverso de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ respecto de $\mathscr{C}$ es una circunferencia que pasa por O y debido que H y M son inversos de O y S respectivamente, entonces la circunferencia inversa de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ pasa por H y M, pero está es precisamente la circunferencia de Euler, que al ser $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ tangente a la circunferencia inscrita y exinscrita su inverso también lo será.

Luego el gráfico quedará así:




Del gráfico: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\mathscr{C}_1$ son inversos respecto de $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}_1$ : Circunferencia de Euler del $\Delta ABC$.

$\mathscr{C}_1$ es tangente a las circunferencia inscrita $\mathscr{C}_2$ y a la exinscrita $\mathscr{C}_3$, en forma análoga se demuestra que $\mathscr{C}_1$ es tangente a las otras dos circunferencias exinscritas.

Notar que J y J' son puntos inversos lo mismo N y N'.

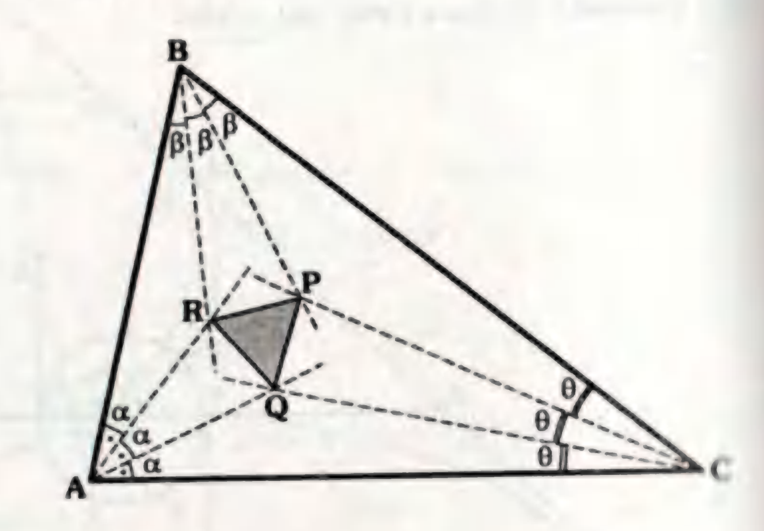
Si analizamos las circunferencias exinscritas relativas a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se demuestra en forma análoga.

## TEOREMA DE MORLEY

Los tres puntos de intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo son los vértices de un triángulo equilátero.

En el gráfico se cumple:

**ΔPQR : Equilátero**




**DEMOSTRACIÓN :**

Definitivamente uno de los teoremas que más apasiona a los geómetras, debido a sus demostraciones es el teorema de Morley, en esta constante búsqueda de la demostración se sabe ahora que también se determinan otros triángulos equiláteros, es decir que las trisectrices determinan más triángulos equiláteros, de los cuales Morley estudió el ubicado en la región interior.

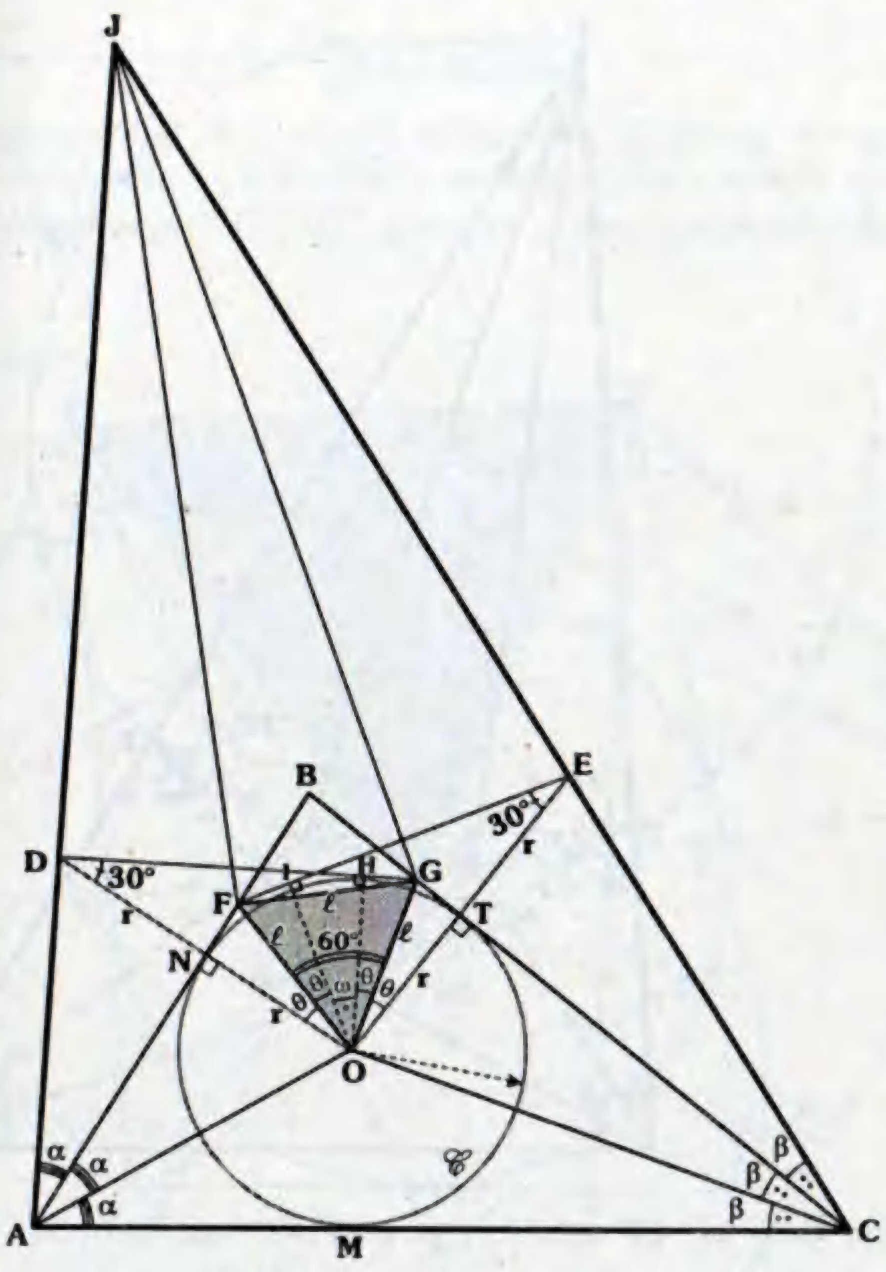
Una clasificación preliminar de las demostraciones a este teorema establece dos categorías, directa e indirecta. Aquí se usa el término indirecto no en el sentido de reducción al absurdo sino en el sentido de invertir la sucesión de pasos desde la hipótesis a la conclusión.

El gran espectro de las demostraciones han sido plasmadas en 1 993 en el libro titulado "Le Theoreme de Morley" de André Viricel.

Aquí mostramos una demostración indirecta.

**Paso 1**

Partimos del triángulo ABC, circunscrito a la circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O y radio r (M, N y T : puntos de tangencia), prolongamos $\overline{OT}$ y $\overline{ON}$ hasta E y D respectivamente, tal que ON=ND=TE=r. Se ubican F en $\overline{AB}$ y G en $\overline{BC}$, tal que $\overline{FE}$ y $\overline{DG}$ son tangentes a $\mathscr{C}$ en I y H.




- $\overline{OG}$ : Bisectriz $\Rightarrow$ $m\measuredangle HOG = m\measuredangle GOT = \theta$
- ⊾OIE : Notable $\Rightarrow$ $\omega + 2\theta = 60°$
- ⊾DHO : Notable $\Rightarrow$ $m\measuredangle HOD = 60°$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle IOD = 2\theta$
- $\overline{OF}$ : Bisectriz $\Rightarrow$ $m\measuredangle IOF = m\measuredangle FON = \theta$
- $\Delta OFN \cong \Delta OGT$ (ALA) $\Rightarrow$ $FO = OG = \ell$
- Puesto que : $m\measuredangle FOG = \theta + \omega + \theta = 60°$ $\Rightarrow$ $\Delta FOG$: Equilátero ...(a)

Para demostrar el teorema de Morley, faltaría demostrar que $\overline{JF}$ y $\overline{JG}$ trisecan al $\measuredangle AJC$.

**Paso 2**

- Trazamos $\overline{DF}$ y $\overline{GE}$ $\Rightarrow$ $DF = GE = \ell$ y $m\measuredangle FDG = m\measuredangle FEG = 30° - \theta$
- $\square$DFGE : Inscriptible, al trazar la circunferencia $\mathscr{C}_1$ se observa:

$$m\widehat{DF} = m\widehat{FG} = m\widehat{GE} = 60° - 2\theta$$

- $\triangle$ACJ : $3\alpha + 3\beta + \phi = 180°$ ...(I)
- En $\triangle$ DOEJ : $60° + 2\theta + \phi = 90° - \alpha + 90° - \beta$ ...(II)
- De (I) y (II) : $\phi = 90° - 3\theta$ $\Rightarrow$ $\square$DGEJ es inscriptible, pues en $\triangle$DOEG

$$m\measuredangle DGE = 90° + 3\theta$$

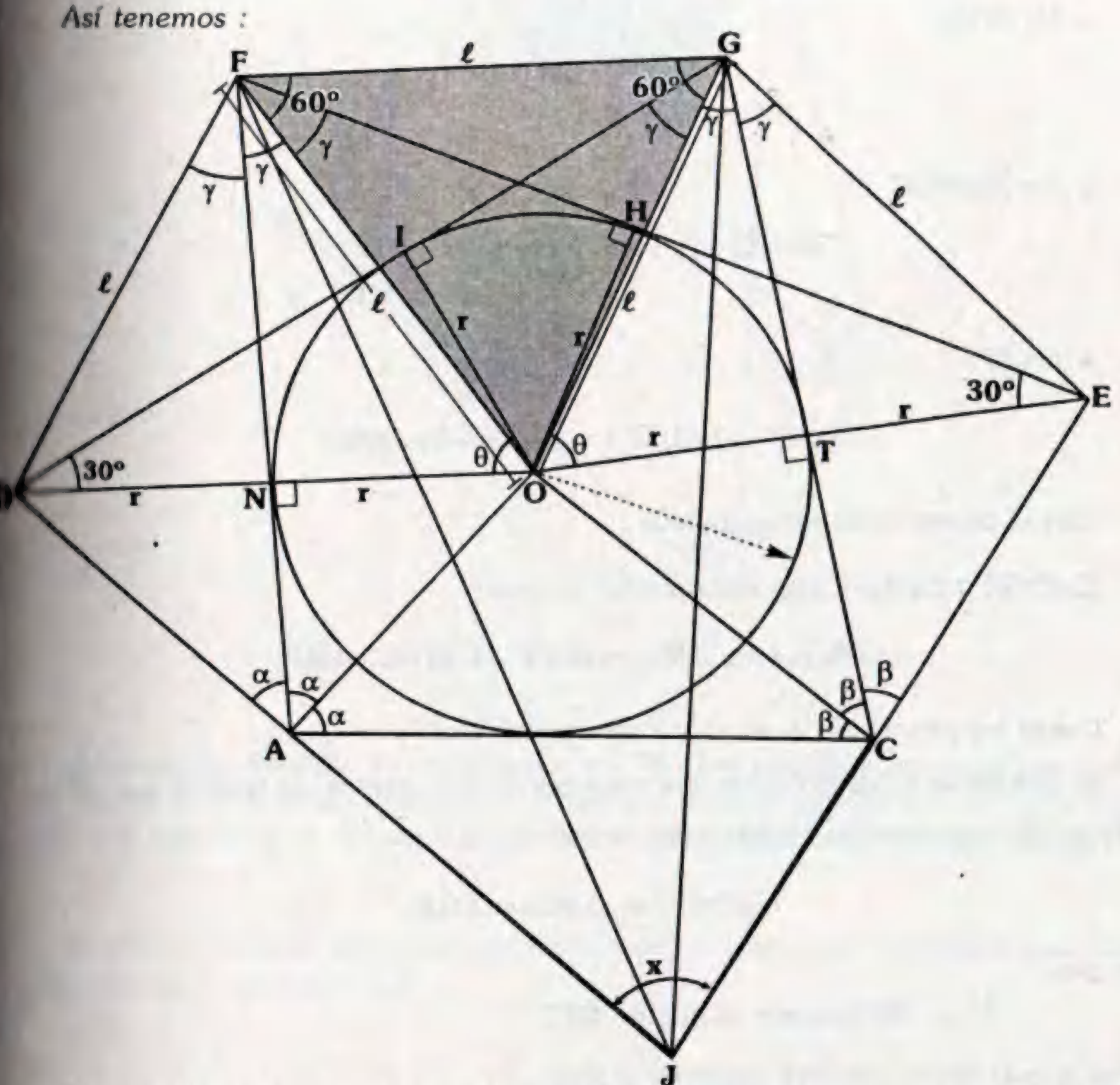
$\Rightarrow$ D,F,G,E y J son concíclicos.

$\therefore$ $\overline{JF}$ y $\overline{JG}$ trisecan al $\measuredangle$AJC

Observación

*Demostremos ahora un caso muy interesante. En forma análoga al anterior, en el cual se consideró :* $3\alpha + 3\beta < 180°$ *, analicemos ahora cuando* $3\alpha + 3\beta > 180°$ *, ahora la intersección de* $\overline{AD}$ *y* $\overline{EC}$ *estará en el otro semiplano determinado por* $\overleftrightarrow{AC}$ *.*

*Así tenemos :*




*Se procede en forma análoga a la anterior (solo que no estamos considerando la intersección de* $\overrightarrow{AN}$ *y* $\overrightarrow{CT}$ *), se demuestra que el triángulo FOG es equilátero. Son los mismos pasos hasta (a), notar que se han considerado los mismos puntos. Lo que se va ha demostrar que* $\overline{JF}$ *y* $\overline{JG}$ *trisecan al* $\measuredangle AJC$ *.*

- *Por teorema de la mediatriz :*

$$DF = FO = OG = GE = \ell$$

- $\Delta DFO \cong \Delta OGE$ *(L.L.L)* $\Rightarrow$ $m\measuredangle DFO = m\measuredangle OGE = 2\gamma$
- $\overline{FO}$ *es bisectriz del* $\measuredangle NFH$ *y* $\overline{GO}$ *es bisectriz del* $\measuredangle IGT$
- *En* $\Delta AJC$:

$$3\alpha + 3\beta = 180° + x$$
$$3(\alpha + \beta) = 180° + x \quad \ldots \text{(I)}$$

- *En* $\square AFGC$ *:*

$$2\alpha + 2\beta + (\gamma + 60°) + (\gamma + 60°) = 360°$$
$$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = 120° - \gamma$$

- *En (I) :*

$$3(120° - \gamma) = 180° + x \quad \Rightarrow \quad x + 3\gamma = 180°$$

Con el último resultado tenemos :

$\square JDGE$ y $\square JDFE$ son inscriptibles, ya que :

$$m\measuredangle AFE + m\measuredangle DJE = m\measuredangle DGE + m\measuredangle DJE = 180°$$

Luego los puntos D, J, E, G y F son concíclicos.

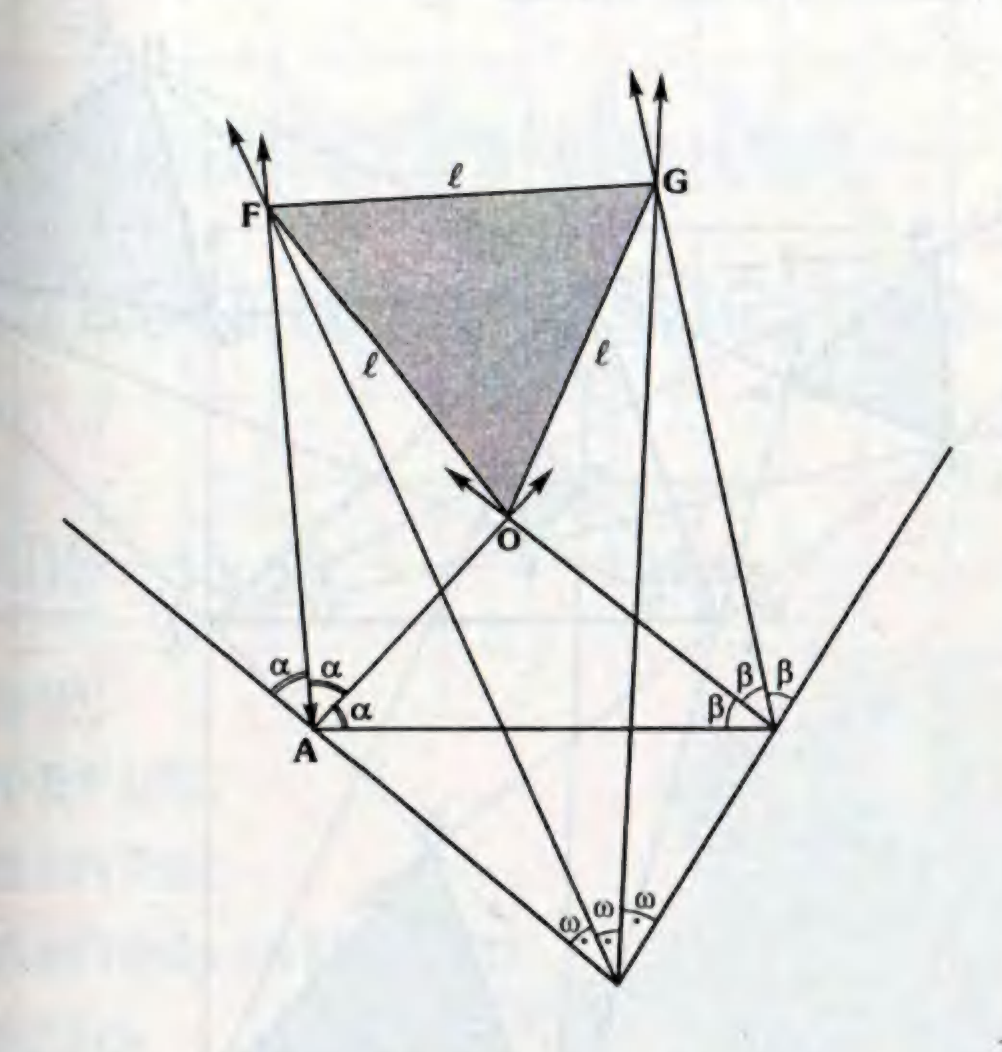
Si se traza la circunferencia que pasa por dichos puntos, se tendría que $\overline{AF}$, $\overline{FG}$ y $\overline{GE}$ son cuerdas congruentes, entonces :

$$m\measuredangle DJF = m\measuredangle FJG = m\measuredangle GJE$$

Es decir :

$\overline{JF}$ y $\overline{JG}$ trisecan al ángulo DJE

Con lo cual tendríamos el siguiente gráfico.



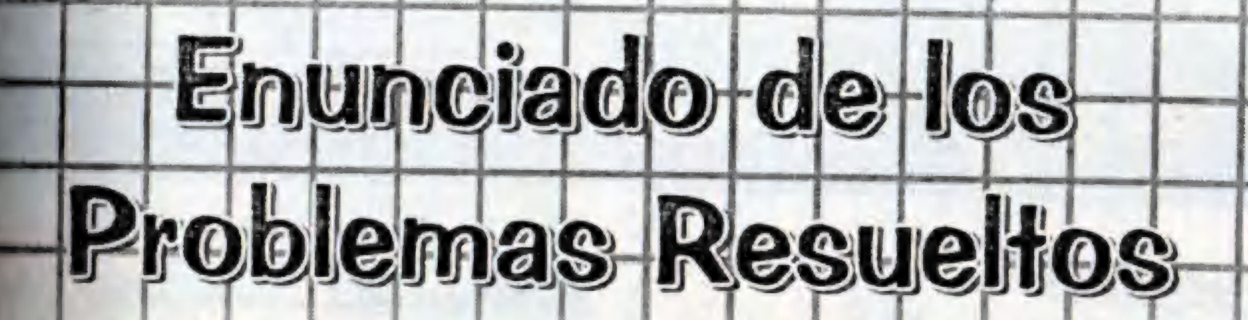

El resultado obtenido es interesante, con lo cual podemos asegurar que con dos partes de trisectrices externas y la trisectriz interna trazada del tercer vértice se puede encontrar un nuevo triángulo de Morley, denominado no tradicional.

El estudiante tiene que notar que no se pueden tomar las trisectrices externas e internas de cualquier modo.

De los resultados anteriores tenemos:

Al trisecar los ángulos internos como externos del triángulo ABC, los triángulos DEF, GHI, JKL y MNP son equiláteros.

Otras pruebas indirectas son las de Naraniengar, Dodds y Child y la directa es la forma trigonométrica, las cuales se encuentran en las páginas indicadas en la bibliografía.




## Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

Puntos Notables
Geometría

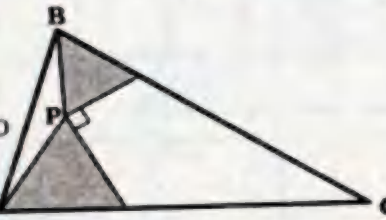





**PROBLEMA Nº 1**

Si las regiones sombreadas son regulares. ¿Qué punto notable es P del triángulo ABC?

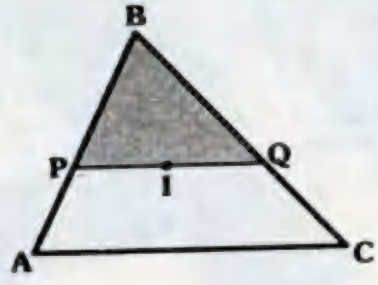
A) Incentro
B) Ortocentro
C) Circuncentro
D) Baricentro
E) Excentro




**PROBLEMA Nº 2**

En el gráfico AB=6, BC=8, I es incentro del triángulo ABC y $\overline{PQ}//\overline{AC}$. Calcule el perímetro de la región de la región sombreada.

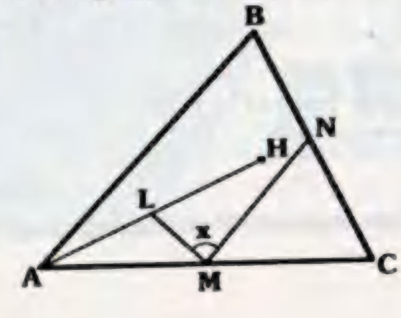
A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14




**PROBLEMA Nº 3**

Si H es ortocentro del triángulo ABC, AL=LH, AM=MC y BN=NC, calcule x.

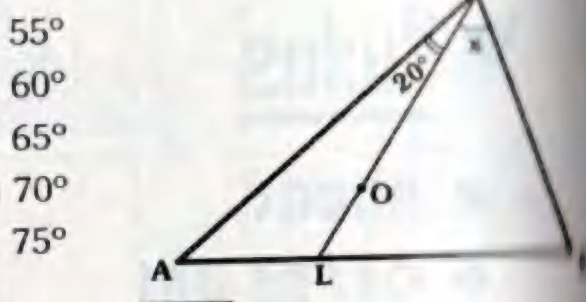
A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 90°
E) 120°




**PROBLEMA Nº 4**

En el gráfico O es circuncentro de ABC si BC=LC, calcule x.

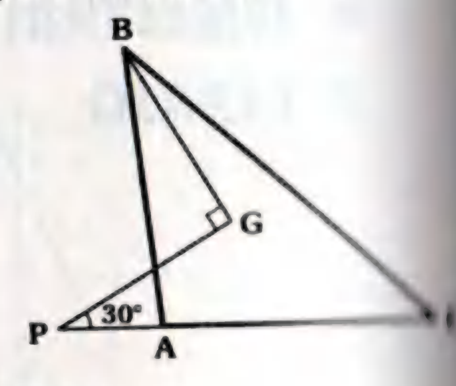
A) 55°
B) 60°
C) 65°
D) 70°
E) 75°




**PROBLEMA Nº 5**

Si G es baricentro de ABC y BG=3(AP)=6. Calcule AC.

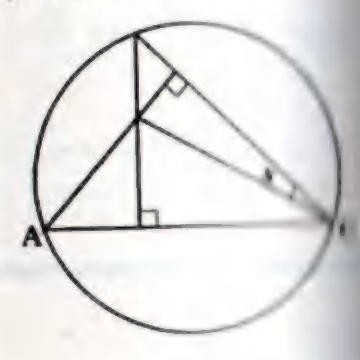
A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10




**PROBLEMA Nº 6**

Si $m\widehat{AC}=150°$, calcule x.

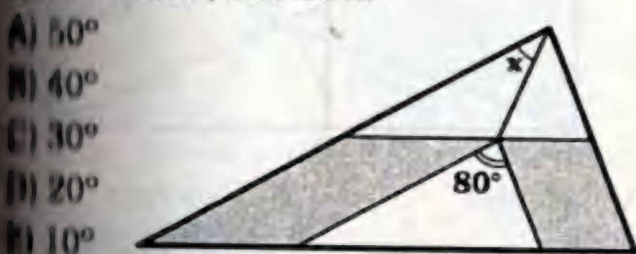
A) 10°
B) 14°
C) 15°
D) 25°
E) 30°



**PROBLEMA Nº 7**

En el gráfico si las regiones sombreadas son rombales, calcule x.

A) 50°
B) 40°
C) 30°
D) 20°
E) 10°




**PROBLEMA Nº 8**

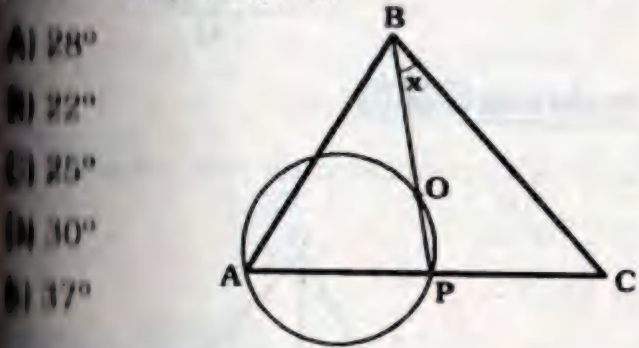
Se tiene el triángulo ABC, m∡ABC = 50°, se traza la ceviana interior BF, si M y N son los ortocentros de los triángulos ABF y BFC respectivamente, calcule m∡MFN .

A) 25° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 50°

**PROBLEMA Nº 9**

Si O es circuncentro de ABC, AP=BO y m⌢OP = 40°, calcule x.

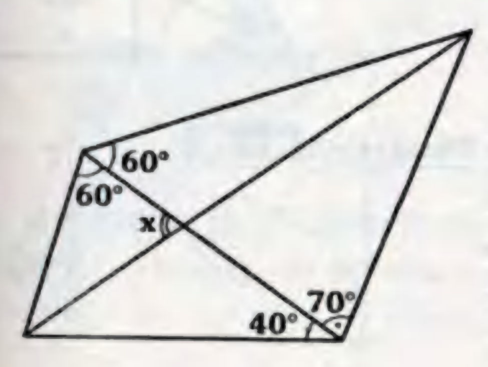
A) 28°
B) 22°
C) 25°
D) 30°
E) 37°




**PROBLEMA Nº 10**

Calcule x.

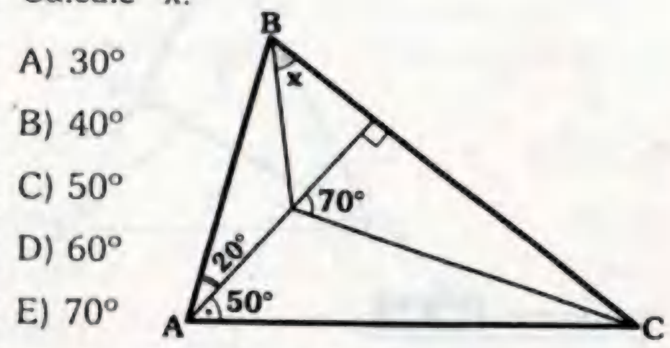
A) 70°
B) 80°
C) 90°
D) 100°
E) 120°




**PROBLEMA Nº 11**

Calcule x.

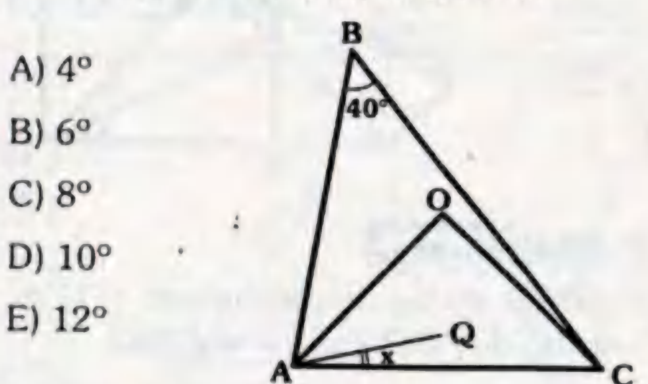
A) 30°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 70°




**PROBLEMA Nº 12**

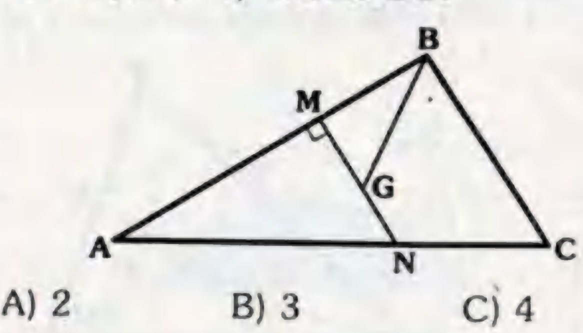
Si O y Q son circuncentros de ABC y AOC respectivamente, calcule x.

A) 4°
B) 6°
C) 8°
D) 10°
E) 12°




**PROBLEMA Nº 13**

Si G es baricentro de ABC, MG=GN y AN=2(NC)=8, calcule BG.




A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

**PROBLEMA Nº 14**

En el gráfico, si AB=BC e I es incentro de ABH, calcule IC/AC.

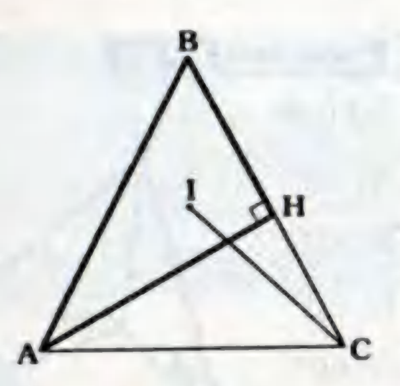
A) 1

B) 1/2

C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{2}/2$

E) 1/3




**PROBLEMA Nº 15**

Si ABCD es un cuadrado, calcule x.

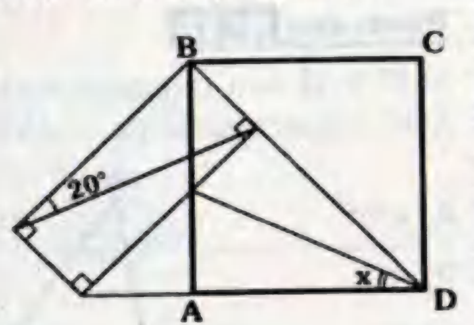
A) 25°

B) 24°

C) 23°

D) 22°

E) 21°




**PROBLEMA Nº 16**

Si ABCD es un paralelogramo y C es excentro de ABD, calcule $m\measuredangle ABD$.

A) 45° B) 60° C) 70° D) 80° E) 90°

**PROBLEMA Nº 17**

En el gráfico H es ortocentro de ABC, si AN=NH=BM=MC, calcule x.

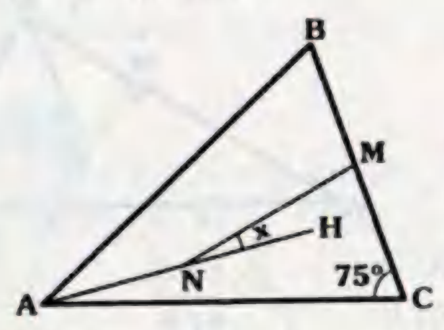
A) 10°

B) 11°

C) 12°

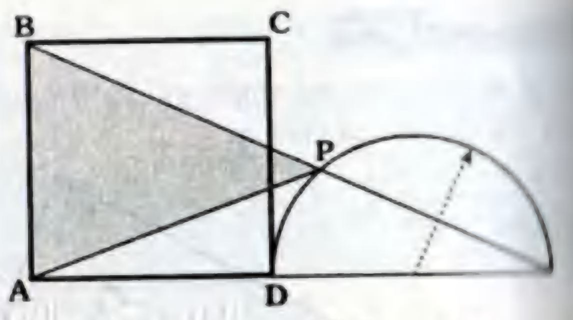
D) 14°

E) 15°




**PROBLEMA Nº 18**

En el gráfico, ¿Qué punto notable es, el centro del cuadrado ABCD, del triángulo ABP?




A) Incentro B) Excentro

C) Circuncentro D) Ortocentro

E) Baricentro

**PROBLEMA Nº 19**

Si H es ortocentro de ABC y BC=1 calcule PQ.

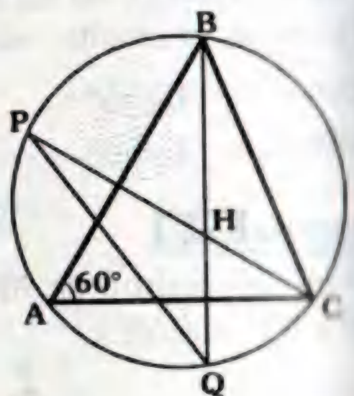
A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

E) 14




**PROBLEMA Nº 20**

Si O es circuncentro de ABC, calcule

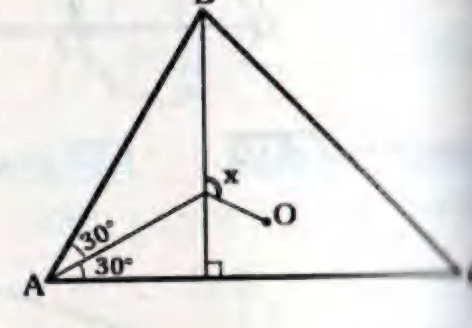
A) 120°

B) 115°

C) 105°

D) 100°

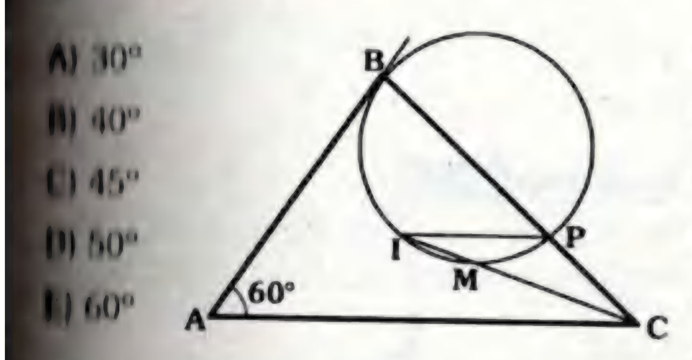
E) 90°




**PROBLEMA Nº 21**

En el gráfico I es incentro de ABC y punto de tangencia, si $\overline{IP} // \overline{AC}$, calcule $m\widehat{MP}$.

A) 30°
B) 40°
C) 45°
D) 50°
E) 60°




**PROBLEMA Nº 22**

Si G es baricentro de ABC, BM = 5(MG) = 5, calcule AQ + PC.

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8



**PROBLEMA Nº 23**

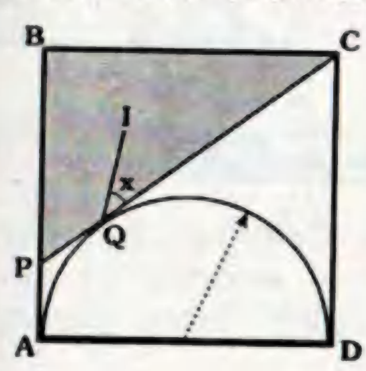
Se tiene el triángulo ABC, cuyo ortocentro es H, si L, M y N son puntos medios de $\overline{AC}$, $\overline{AH}$ y $\overline{BH}$ respectivamente, calcule m∡NML.

A) 45° B) 60° C) 90°
D) 120° E) 135°

**PROBLEMA Nº 24**

Si ABCD es un cuadrado, Q es punto de tangencia e I es incentro de BPC. Calcule x.

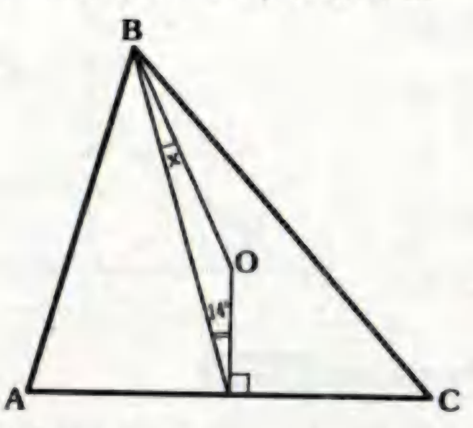
A) 15°
B) 30°
C) 37°
D) 45°
E) 53°




**PROBLEMA Nº 25**

En el gráfico O es circuncentro de ABC, si m∡BAC − m∡BCA = 20°, calcule x.

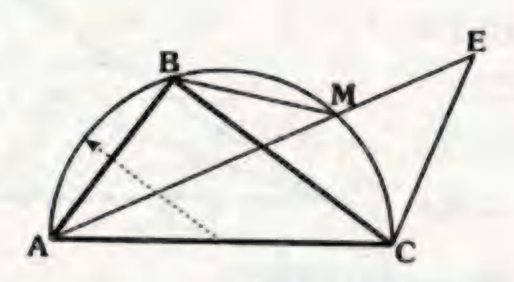
A) 2°
B) 4°
C) 6°
D) 8°
E) 10°




**PROBLEMA Nº 26**

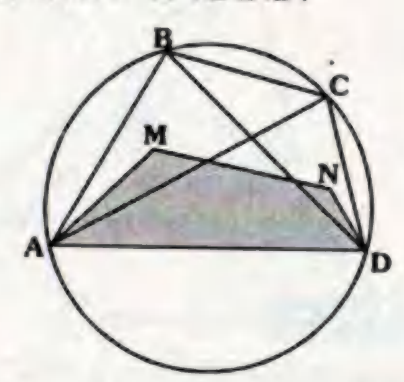
Si E es excentro de ABC y BM = 6, calcule EC.

A) $6\sqrt{2}$
B) 6
C) $8\sqrt{2}$
D) 8
E) 10




**PROBLEMA Nº 27**

En el gráfico M y N son ortocentros de ABD y ACD respectivamente. ¿Qué tipo de cuadrilátero es AMND?

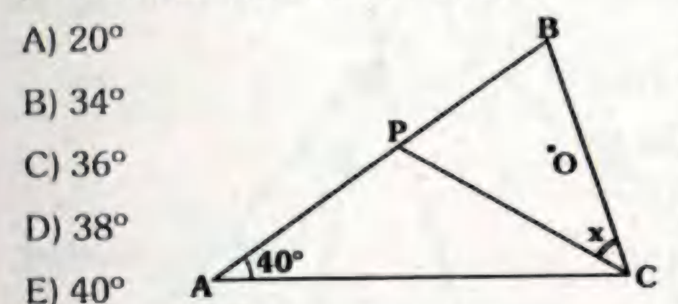



A) Rombo B) Inscriptible
C) Paralelogramo D) Trapecio
E) Bicentrico

**PROBLEMA Nº 28**

Si O es circuncentro y ortocentro de PBC y ABC respectivamente, calcule x.

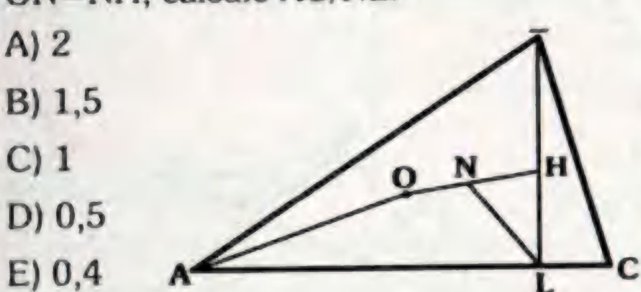
A) 20°
B) 34°
C) 36°
D) 38°
E) 40°




**PROBLEMA Nº 29**

En el gráfico H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC respectivamente y ON=NH, calcule AO/NL.

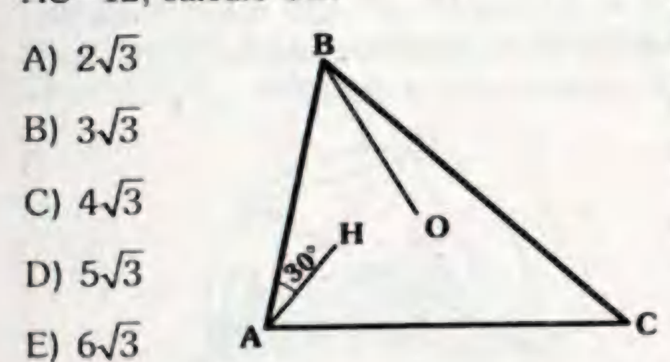
A) 2
B) 1,5
C) 1
D) 0,5
E) 0,4




**PROBLEMA Nº 30**

Si O es circuncentro, H es ortocentro y AC=12, calcule OB.

A) $2\sqrt{3}$
B) $3\sqrt{3}$
C) $4\sqrt{3}$
D) $5\sqrt{3}$
E) $6\sqrt{3}$




**PROBLEMA Nº 31**

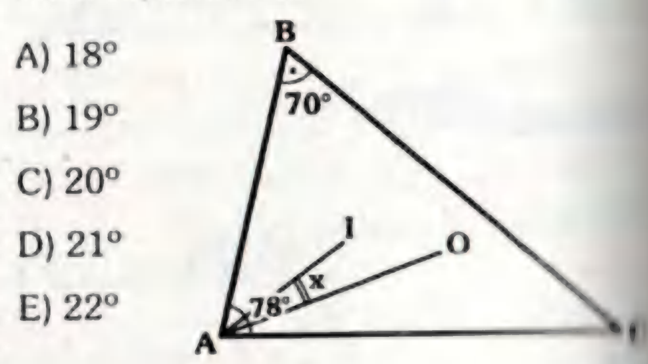
Dado un triángulo ABC, si $m\measuredangle ABC = 53°$, calcule la razón entre la distancia del ortocentro a $\overline{AB}$ y la distancia del circuncentro a $\overline{BC}$.

A) 4/3 B) 4/5 C) 5/3
D) 6/5 E) 4/5

**PROBLEMA Nº 32**

En el gráfico, si O es circuncentro y I es incentro, calcule x.

A) 18°
B) 19°
C) 20°
D) 21°
E) 22°




**PROBLEMA Nº 33**

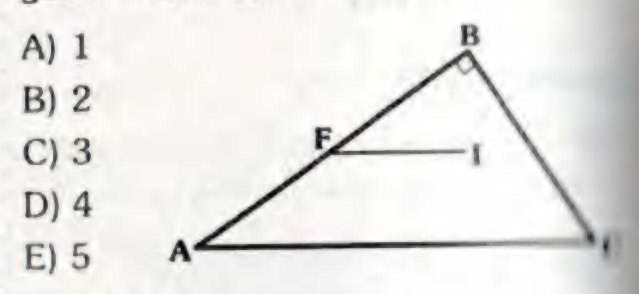
Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, si O e I son el circuncentro e incentro de ABC y $m\measuredangle OIC = 90°$, calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

**PROBLEMA Nº 34**

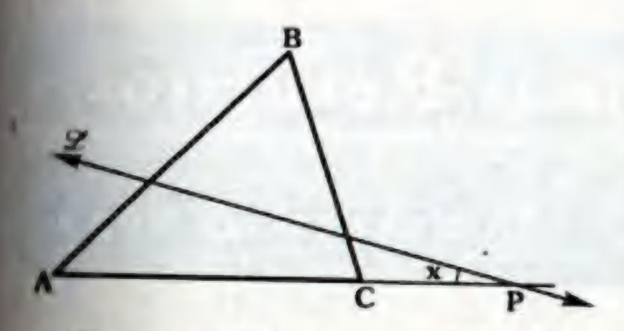
Si $\overline{IF} // \overline{AC}$, I es incentro de ABC, FB=7 y la distancia de I al ortocentro del triángulo ABC es $3\sqrt{2}$. Calcule AF.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5




**PROBLEMA Nº 35**

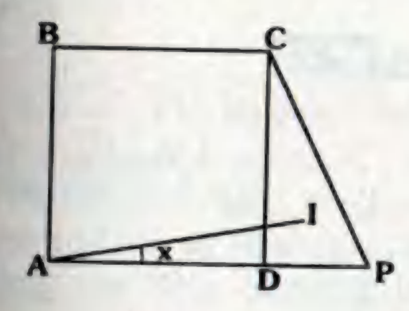
En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Euler y H es ortocentro de ABC, si AP=3(BH)=3(CP), calcule x.




A) 14° B) 15° C) 37°/2
D) 53°/2 E) 30°

**PROBLEMA Nº 36**

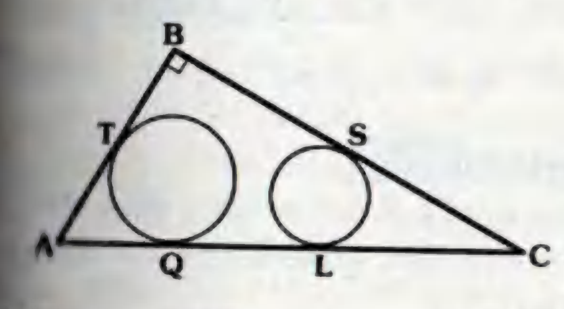
Si ABCD es un cuadrado, CP=13, DP=5 y I es incentro de CDP.




A) 6° B) 7° C) 8°
D) 9° E) 10°

**PROBLEMA Nº 37**

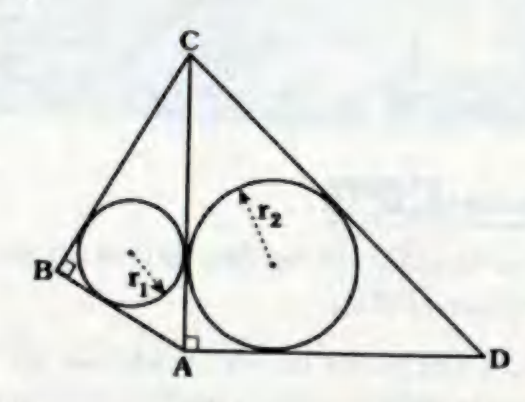
En el gráfico T, S, L y Q son puntos de tangencia, QL=4 y TB+BS=10, calcule el inradio del triángulo ABC.




A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 3

**PROBLEMA Nº 38**

Si AB+BC=CD y AD=18, calcule $r_1+r_2$.

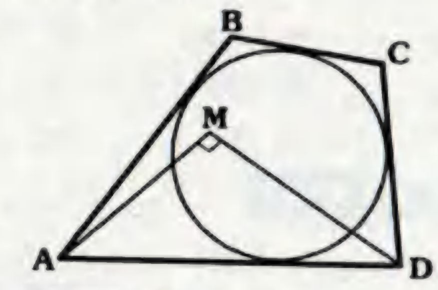



A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

**PROBLEMA Nº 39**

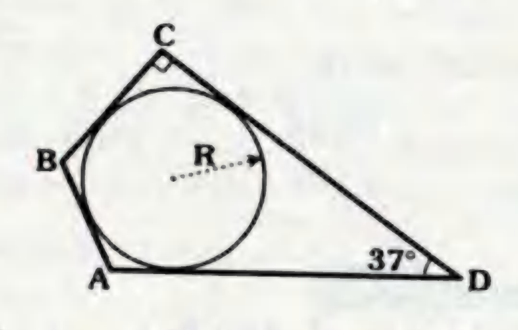
Si AB=MD, CD=AM y BC=6, calcule el inradio de AMD.

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7




**PROBLEMA Nº 40**

Si AB=5, BC=6 y AD=15, calcule el inradio del ABCD.




A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7




**PROBLEMA Nº 41**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El baricentro de un triángulo es el baricentro de su respectivo triángulo órtico.

II. El incentro de un triángulo pertenece a su región interior.

III. Si la recta de Euler de un triángulo pasa por un vértice, entonces el triángulo es isósceles.

A) VFV B) VFF C) FVF
D) FVV E) FFF

**PROBLEMA Nº 42**

En un triángulo ABC recto en A, donde AB=8u, se traza la mediana $\overline{BD}$ de manera que :

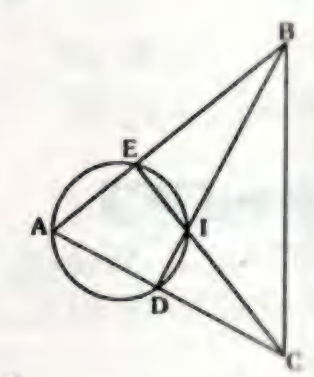
$$m\measuredangle ABD = 45 + \frac{1}{2} m\measuredangle BCA$$

Calcule BC (en u).

A) 16 B) 18 C) 20
D) 24 E) 36

**PROBLEMA Nº 43**

En la figura mostrada, el punto I es el incentro del triángulo ABC. Entonces, la m∡BAC es:




A) 30°
B) 20°
C) 60°
D) 45°
E) 15°

**PROBLEMA Nº 44**

Se tiene un triángulo ABC, se ubican los puntos M y N en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de modo que la $m\measuredangle AMN = 2m\measuredangle BAN = 90°$, si AB=BC y el radio de la circunferencia inscrita al triángulo BMN es r, entonces NC es :

A) r B) 2r C) $\frac{3}{2}$r D) 3r E) 4r

**PROBLEMA Nº 45**

Sea el punto O exterior al triangulo ABC y relativo al lado $\overline{BC}$. Si O equidista de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ y $m\measuredangle OBC = 56°$, $m\measuredangle OAC = 26°$. Calcule m∡BCA .

A) 56° B) 58° C) 60° D) 62° E) 54°

**PROBLEMA Nº 46**

En un triángulo acutángulo DRA, O es ortocentro y C circuncentro. Halle la m∡ORC, si :

$$m\measuredangle ODC + m\measuredangle OAC = 38°$$

A) 36° B) 38° C) 48° D) 35° E) 45°

**PROBLEMA Nº 47**

En un triángulo ABC (AB=BC) se traza la mediana AM y se prolonga hasta el punto H de modo que $m\measuredangle AHC = 90°$. Si $m\measuredangle MAC = m\measuredangle BCH$ y MH=a, halle AM.

A) 2a  B) 3a/2  C) 4a/3
D) 4a  E) 6a

**PROBLEMA Nº 48**

En un triángulo rectángulo los catetos suman 32 cm, si la menor mediana mide 12 cm. Halle la longitud del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo (en cm).

A) 3  B) 4  C) 5  D) $\frac{5}{2}$  E) $\frac{7}{2}$

**PROBLEMA Nº 49**

En un ΔABC de incentro I, la $m\measuredangle ACB = 60°$. Se inscribe una circunferencia en el triángulo BIC tangente a $\overline{CI}$, $\overline{IB}$ y $\overline{CB}$ en los puntos M, N y P respectivamente. Si la $m\measuredangle BAC = m\measuredangle NMP$. Calcule la $m\measuredangle CAB$.

A) 85°  B) 81°  C) 80°
D) 72°  E) 60°

**PROBLEMA Nº 50**

En un triángulo ABC recto B, se traza la ceviana $\overline{BM}$ ($M \in \overline{AC}$). La circunferencia inscrita al triángulo ABM es tangente al lado $\overline{BM}$ en el punto P y la circunferencia inscrita al triángulo BMC es tangente al segmento PM en el punto Q. Si BP − QM = $\ell$, entonces la longitud del radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC es :

A) $\frac{\ell}{3}$  B) $\frac{2\ell}{5}$  C) $\frac{\ell}{5}$  D) $\frac{3\ell}{5}$  E) $\ell$

**PROBLEMA Nº 51**

En un cuadrilátero ABCD :

$$AB = CB = BD \ , \ m\measuredangle BAD = 3\alpha \ ,$$

$$m\measuredangle BCD = 2\alpha \ \text{ y } \ \frac{m\measuredangle ADC}{m\measuredangle ABC} = \frac{3}{2}$$

Halle $m\measuredangle D - m\measuredangle B$.

A) 10°  B) 30°  C) 45°  D) 60°  E) 72°

**PROBLEMA Nº 52**

En un triángulo acutángulo ABC, las alturas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ concurren en H. Por este punto se traza la paralela a $\overline{FD}$, que interseca a $\overline{AB}$, $\overline{FE}$, $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$, en los puntos M, N, P y Q respectivamente. Si FN=a y DP=b. Calcule MQ.

A) 2(a+2b)  B) 2a+b
C) 2(a+b)  D) a+2b
E) 2a+3b

**PROBLEMA Nº 53**

En un triángulo ABC está inscrita la circunferencia de centro O y se ubica otra circunferencia menor, tangente al lado $\overline{AC}$ en P y al lado $\overline{BC}$ en Q y a la circunferencia dada. Si la $m\measuredangle ABC = \theta$, calcular la medida del ángulo determinado por los rayos $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{PQ}$.

A) $\frac{\theta}{2}$  B) $90° - \frac{\theta}{2}$  C) $\theta$
D) $90° - \theta$  E) $\frac{3\theta}{2}$

**PROBLEMA Nº 54**

En un triángulo ABC recto en B de inradio r, "O" es el circuncentro e "I" el incentro. Si $m\measuredangle AIO = 90°$. Calcule el perímetro del triángulo.

A) 7r  B) 9r  C) 12r  D) 15r  E) 18r

**PROBLEMA Nº 55**

En un triángulo isósceles, la $m\measuredangle ABC = 120°$ y $AB = 12\mu$. Calcule la distancia entre el ortocentro y el baricentro.

A) $6\sqrt{3}\ \mu$  B) $8\sqrt{3}\ \mu$  C) $12\ \mu$
D) $15\ \mu$  E) $16\ \mu$

**PROBLEMA Nº 56**

En un triángulo ABC acutángulo, D es el circuncentro y O es el ortocentro, por B trazamos la bisectriz que es interceptada por la mediatriz del lado $\overline{AC}$ en el punto E. Si la $m\measuredangle ABC = 60°$ y la $m\measuredangle ODA = 12°$, calcule la $m\measuredangle BED$.

A) 48°  B) 36°  C) 30°
D) 24°  E) 18°

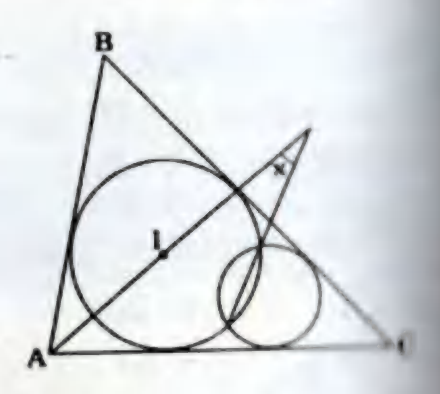
**PROBLEMA Nº 57**

En un triángulo ABC, H es ortocentro y O es circuncentro. Si $m\measuredangle BAC - m\measuredangle BCA = \alpha$, entonces la $m\measuredangle HBO$ es :

A) $90° - \alpha$  B) $\alpha/2$  C) $\alpha$
D) $2\alpha$  E) $60° + \alpha$

**PROBLEMA Nº 58**

En un triángulo ABC; $m\measuredangle ABC = \beta$, I es el incentro. Calcule x.




A) $\beta/4$
B) $\beta/2$
C) $\beta$
D) $90° - \beta$
E) $90° - \beta/2$

**PROBLEMA Nº 59**

En un triángulo acutángulo ABC, la recta de Euler determina con sus lados un cuadrilátero inscriptible. Calcule la medida del ángulo que forma dicha recta de Euler y el diámetro de la circunferencia circunscrita al $\Delta ABC$ que pasa por el vértice de donde parten los lados que intersecan a la recta de Euler.

A) 60°  B) 75°  C) 80°  D) 90°  E) 95°

**PROBLEMA Nº 60**

En un $\Delta ABC$, recto en B, se ubican los puntos E y D en los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que $m\measuredangle DEC = 90°$. Si la suma de las longitudes de los radios de las circunferencias inscritas en el cuadrilátero ABDE y en el triángulo CDE es $10\mu$, calcule BD.

A) $12\mu$  B) $15\mu$  C) $8\mu$
D) $10\mu$  E) $7{,}5\mu$

**PROBLEMA Nº 61**

En un triángulo acutángulo PQR, I es el incentro, O es el ortocentro y C el circuncentro. Si $m\measuredangle POR = m\measuredangle PCR$. Calcule $m\measuredangle PIR$.

A) 145°  B) 130°  C) 120°
D) 160°  E) 135°

**PROBLEMA Nº 62**

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, I es el incentro tal que : $m\measuredangle AID = 90^\circ$ $(D \in \overline{AC})$ $\overline{DE} \perp \overline{BC}$. Si $AB + BC = 34$, $AC = 26$. Calcule BE.

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

**PROBLEMA Nº 63**

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$ se ubica un punto B, en el triángulo ABC se inscribe una circunferencia tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en D y E respectivamente, la recta DE intercepta a la semicircunferencia en los puntos F y G, calcule la $m\widehat{FG}$.

A) 60° B) 72° C) 75°
D) 90° E) 120°

**PROBLEMA Nº 64**

En un triángulo ABC, $\overline{BM}$ es mediana, N es punto medio de $\overline{BM}$, la prolongación de $\overline{CN}$ interseca a $\overline{AB}$ en P. Si PM = 3u y $m\measuredangle MBC = 90^\circ$. Halle la longitud de $\overline{AC}$.

A) 18 u B) 15 u C) 12 u
D) 10 u E) 6 u

**PROBLEMA Nº 65**

Se tiene una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ ; H y T son puntos del diámetro y de la semicircunferencia respectivamente, tal que $\overline{HT} \perp \overline{AB}$, por T y H pasan una recta tangente y una recta secante que se intersecan en C. Si desde el ángulo TCH se traza una bisectriz que interseca a $\overline{AT}$ en E. Si $m\measuredangle CHB = 70^\circ$. Halle $m\measuredangle AHE$.

A) 5° B) 10° C) 15° D) 20° E) 25°

**PROBLEMA Nº 66**

En un cuadrilátero convexo ABCD, AB = BC = CD y además:

$$m\measuredangle ACD - m\measuredangle ACB = 60^\circ$$

Se traza la mediatriz de $\overline{AC}$ que intersecta a $\overline{AD}$ en M. Halle la medida del menor ángulo que determinan la mediatriz y el lado AD.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 72° E) 80°

**PROBLEMA Nº 67**

En un triángulo ABC, en el interior se ubica el punto T.

Si: $m\measuredangle TBA = m\measuredangle TBC = 25^\circ$,

$m\measuredangle BCT = 30^\circ$ y $m\measuredangle CAT = 35^\circ$

entonces la $m\measuredangle TCA$ es :

A) 25° B) 30° C) 32°
D) 35° E) 45°

**PROBLEMA Nº 68**

En un triángulo ABC recto en B, se ubican los puntos N y Q en la hipotenusa $\overline{AC}$, tal que AN < AQ. Luego se trazan $\overline{NM} \perp \overline{BC}$, $\overline{QP} \perp \overline{AB}$, $\overline{MN} \perp \overline{PQ}$, $M \in \overline{BC}$, $P \in \overline{AB}$ y $\overline{MN} \cap \overline{PQ} = \{T\}$. Se trazan las circunferencias inscritas en los triángulos APQ, NMC y NTQ cuyos radios miden $r_1$, $r_2$, $r_3$. Calcule la longitud del radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC.

A) $r_1 + r_2 + r_3$ B) $r_1 + r_2 - r_3$
C) $r_1 + r_3 - r_2$ D) $(r_1 + r_2 + r_3)/2$
E) $r_2 + r_3 - r_1$

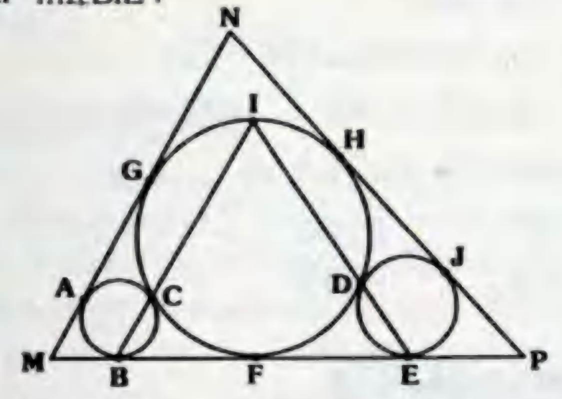
**PROBLEMA Nº 69**

En un triángulo ABC, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son bisectrices interiores que se interceptan en I, la circunferencia inscrita en el cuadrilátero AEIF es tangente a $\overline{AE}$ en M, a $\overline{EI}$ en N y a $\overline{IF}$ en P. Si m∡PMN = 2, m∡PMN, calcule la medida del ángulo BAC.

A) 30°. B) 60° C) 45° D) 80° E) 50°

**PROBLEMA Nº 70**

En la figura A, B, F, E, J, H, G, C, D son puntos de tangencia. Si m∡MNP = $\phi$, hallar m∡BIE.




A) $15°+\dfrac{\phi}{3}$ B) $30°+\dfrac{\phi}{4}$ C) $45°+\dfrac{\phi}{4}$

D) $45°+\dfrac{\phi}{3}$ E) $45°+\dfrac{\phi}{2}$

**PROBLEMA Nº 71**

En un cuadrilátero ABCD, la

m∡ABD = 2 · m∡ACD = 60°, la

m∡ADB = 2 · m∡ACB = 34°

Halle la medida del ángulo que determinan sus diagonales.

A) 72° B) 74° C) 77°
D) 80° E) 82°

**PROBLEMA Nº 72**

En un paralelogramo ABCD, se traza la diagonal $\overline{BD}$ y se ubican $E_1$ y $E_2$ excentros de los triángulos BCD y ABD relativos a los lados $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Determinar que punto notable representa D para el triángulo $E_1BE_2$.

A) Incentro B) Baricentro
C) Ortocentro D) Circuncentro
E) F.D.

**PROBLEMA Nº 73** *2da Práctica Calificada*

Se tiene un triángulo ABC, de ortocentro H, las prolongaciones de $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ y $\overline{CH}$ cortan a la circunferencia circunscrita en F, D y E respectivamente, $\overline{AB} \cap \overline{ED} = \{M\}$, $\overline{BC} \cap \overline{DF} = \{N\}$, demostrar que M, H y N son colineales.

**PROBLEMA Nº 74**

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ relativa a la hipotenusa. Los puntos $I_1$ y $I_2$ son los incentros de los triángulos ABH y BHC respectivamente. Si AB = 3μ y BC = 4μ, entonces $\overline{I_1I_2}$ mide :

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) 1 E) $2\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 75**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

**I.** Dado un triángulo ABC, de incentro I, para el triángulo cuyos vértices son los excentros, I es su ortocentro.

II. En los lados AB, BC y AC de un triángulo ABC se ubican M, N y L respectivamente, si $\overline{MN} // \overline{AC}$, $\overline{ML} // \overline{BC}$ y $\overline{NL} // \overline{AB}$, entonces MNL es el triángulo mediano de ABC.

III. El baricentro de un triángulo, siempre se encuentra en su región interior.

A) VFV B) VVV C) VFF
D) FFF E) FVV

**PROBLEMA Nº 76**

En un triángulo ABC; la $m\measuredangle ACB = 20$; la $m\measuredangle ABC = 40$; sean :

- H el ortocentro.
- O el circuncentro del triángulo ABC.

Halle $m\measuredangle HBO$.

A) 50° B) 60° C) 70°
D) 100° E) 120°

**PROBLEMA Nº 77**

En un triángulo ABC acutángulo, H es el ortocentro. Si BH=AC=12u, entonces la longitud del radio de la circunferencia de Euler o circunferencia de los nueve puntos de:

A) 2u B) 3u C) 4u
D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 78** *Examen Final*

En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las altura $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ (H: ortocentro). Si M y N son puntos medios de $\overline{AH}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Calcule la $m\measuredangle MEN$.

A) 60° B) 75° C) 85°
D) 90° E) 94°

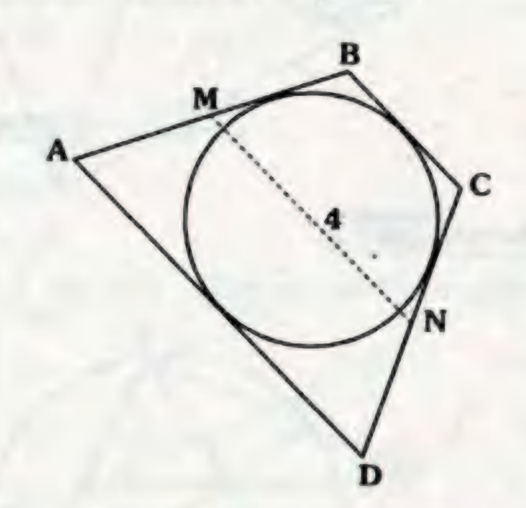
**PROBLEMA Nº 79** *Examen Final*

Si el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo mide 4 cm y uno de sus catetos 10 cm; entonces la distancia del incentro al circuncentro del triángulo rectángulo dado es :

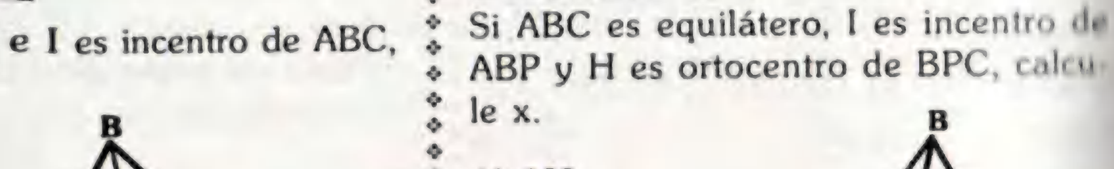
A) $\sqrt{65}$ cm B) 12 cm
C) $\sqrt{51}$ cm D) 8 cm
E) 9 cm

**PROBLEMA Nº 80**

En la figura mostrada se tiene un trapecio ABCD circunscrito a una circunferencia. Sea $\overline{MN}$ la mediana del trapecio de longitud 4u. Calcule el perímetro del trapecio ABCD (en u) .




A) 12 B) 13
C) 14 D) 15
E) 16




**PROBLEMA Nº 81**

Si BC=QC+BP e I es incentro de ABC, calcule x.

A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 60°
E) 75°

**PROBLEMA Nº 82**

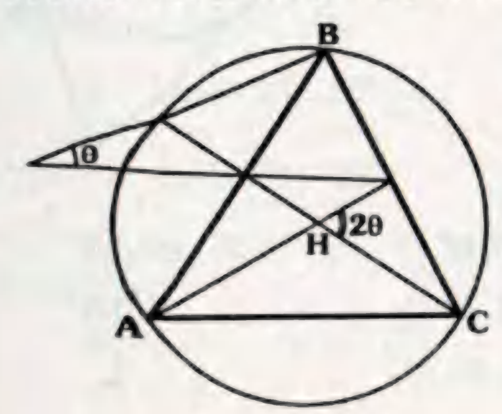
Calcule x.

A) 15°
B) 30°
C) 37°
D) 45°
E) 53°

**PROBLEMA Nº 83**

Si H es ortocentro de ABC, calcule θ.

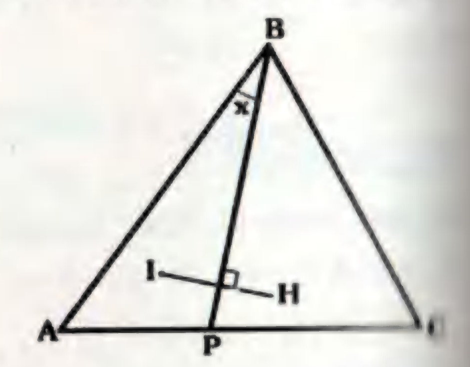
A) 30°
B) 35°
C) 36°
D) 37°
E) 42°




**PROBLEMA Nº 84**

Si ABC es equilátero, I es incentro de ABP y H es ortocentro de BPC, calcule x.

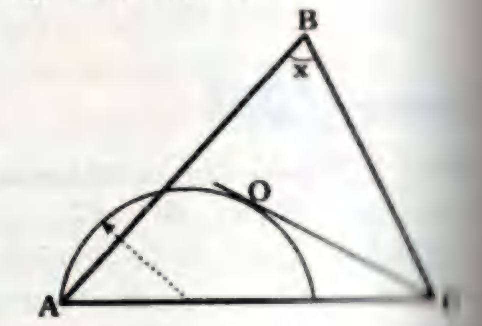
A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 30°




**PROBLEMA Nº 85**

En el gráfico O es circuncentro de ABC y punto de tangencia, calcule x.

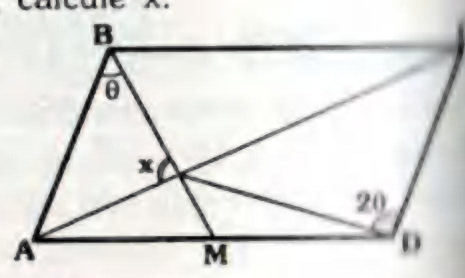
A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°




**PROBLEMA Nº 86**

Si ABCD es un paralelogramo y AM=MD, calcule x.

A) 60°
B) 75°
C) 90°
D) 120°
E) 135°



**PROBLEMA Nº 87**

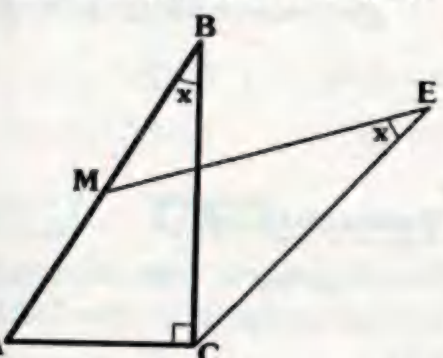
Se tiene un triángulo ABC, de inradio 4, si la distancia del incentro a la recta tangente a la circunferencia circunscrita trazada por B es 7, calcule la altura BH.

A) 11 B) 10 C) 9
D) 8 E) 7

**PROBLEMA Nº 88**

Si E es excentro de ABC y AM=MB, calcule x.

A) 14°
B) 15°
C) 30°
D) 37°
E) 45°




**PROBLEMA Nº 89**

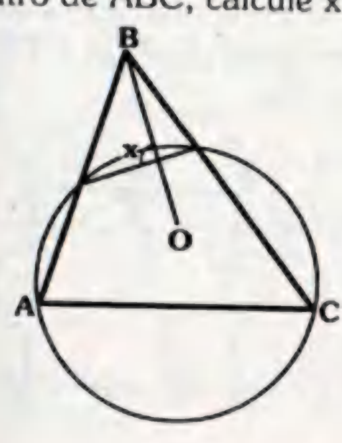
Dado un triángulo equilátero ABC, se traza la ceviana interior BD, si $AD-DC=4\sqrt{3}$, calcule la distancia entre los ortocentros de ABD y BDC.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) 4

**PROBLEMA Nº 90**

Si O es circuncentro de ABC, calcule x.

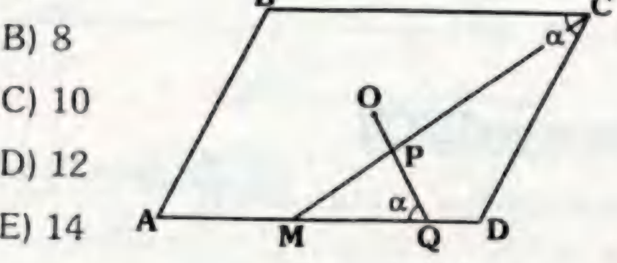
A) 60°
B) 90°
C) 100°
D) 120°
E) 135°




**PROBLEMA Nº 91**

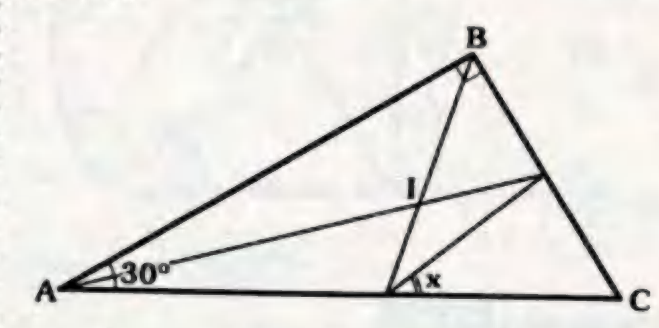
En el gráfico O es centro del paralelogramo ABCD, si AM=MQ y OP=2, calcule AB.

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 14




**PROBLEMA Nº 92**

En el gráfico I es incentro de ABC, calcule x.

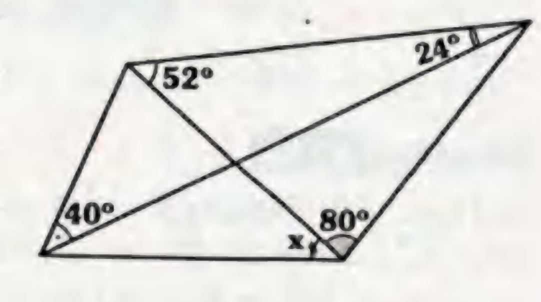



A) 30° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 75°

**PROBLEMA Nº 93**

Calcule x.

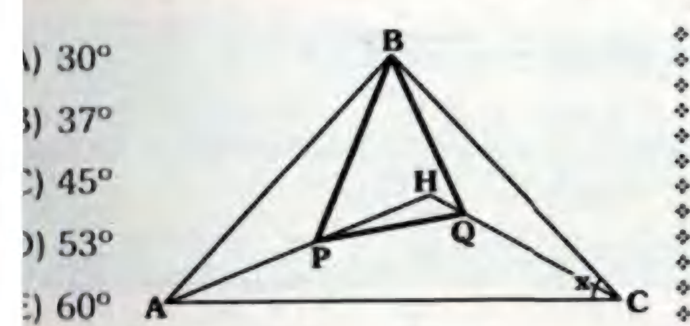
A) 50°
B) 52°
C) 54°
D) 56°
E) 60°




**PROBLEMA Nº 94**

Si H es ortocentro de PBQ, AP=BQ y PB=QC, calcule x.

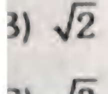
A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°



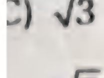

**Problema N° 95**

En el gráfico, calcule JN/EN.

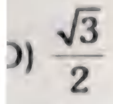
A) 1



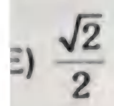
B) $\sqrt{2}$



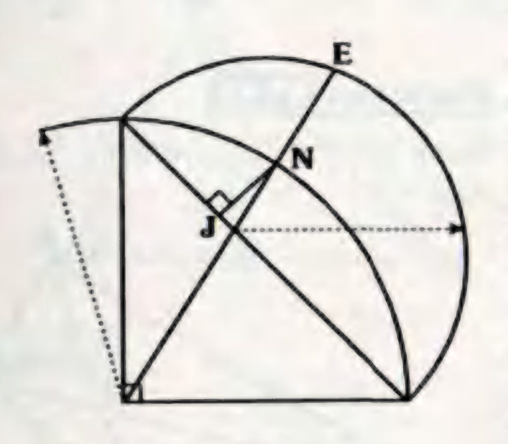
C) $\sqrt{3}$



D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$




**Problema N° 96**

Se traza la ceviana interior BN en el triángulo ABC, donde O es circuncentro de ABN, L es circuncentro de BNC y H es ortocentro de ONL, si $m\measuredangle OHL = 110°$, calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 35° B) 45° C) 60°
D) 70° E) 80°

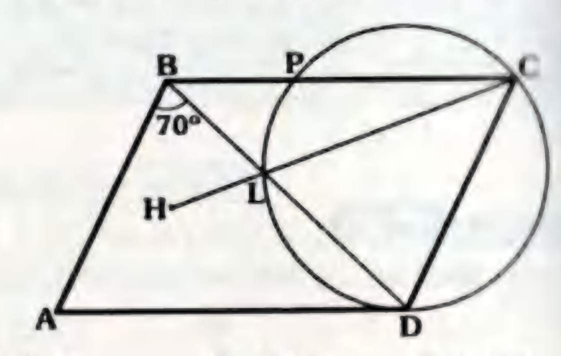
**Problema N° 97**

Se tiene el triánguo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, desde el excentro E relativo a $\overline{BC}$ se traza $\overline{EH}$ pera a $\overline{BC}$ $(H \in \overline{BC})$, si BH=4, calcule AC.

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

**Problema N° 98**

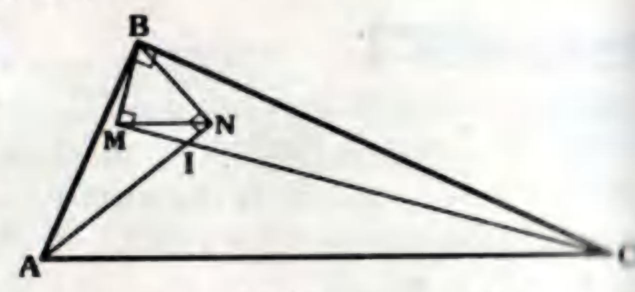
Si ABCD es un paralelogramo y H es ortocentro de ABD, calcule $m\widehat{PL}$.




A) 40° B) 38° C) 36°
D) 35° E) 32°

**Problema N° 99**

En el gráfico I es incentro de ABC y MN=8, calcule el inradio del triángulo ABC.

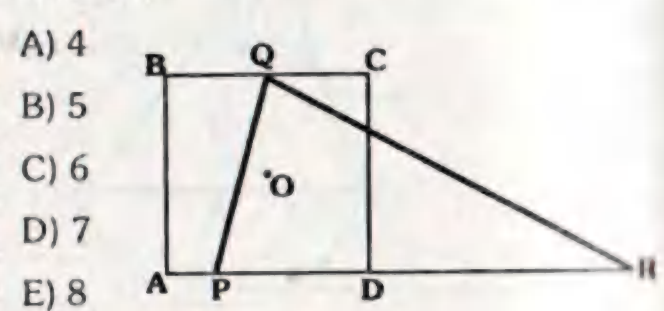



A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

**Problema N° 100**

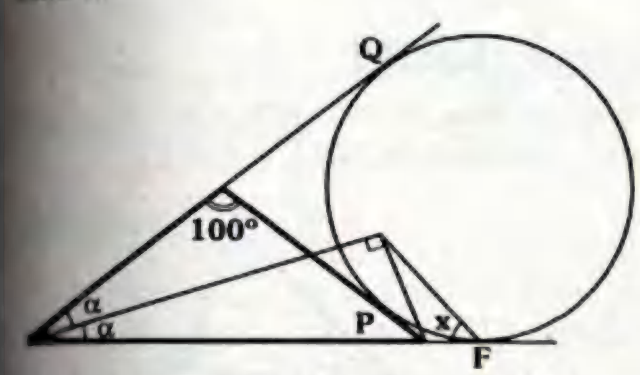
Si O es centro del cuadrado ABCD y ortocentro de PQR y PD=3(AP)=3, calcule DR.

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8



**PROBLEMA Nº 101**

Si P, Q y F son puntos de tangencia, calcule x.




A) 50° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 75°

**PROBLEMA Nº 102**

O y H son el circuncentro y ortocentro del triángulo ABC respectivamente si :

$$m\measuredangle AHC = 2(m\measuredangle AOC)$$

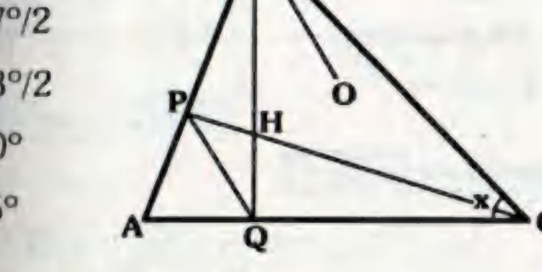
Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 32° C) 34°
D) 36° E) 38°

**PROBLEMA Nº 103**

En el gráfico H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC respectivamente, si $\overline{PQ} // \overline{BO}$, calcule x.

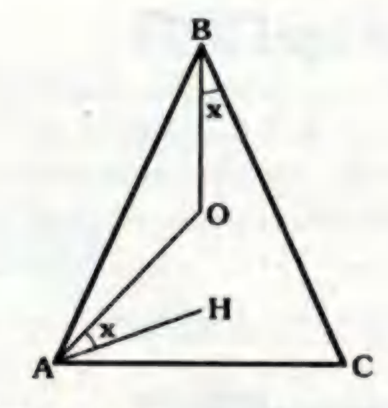
A) 15°
B) 37°/2
C) 53°/2
D) 30°
E) 45°




**PROBLEMA Nº 104**

Si H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC y AB=BC, calcule x.

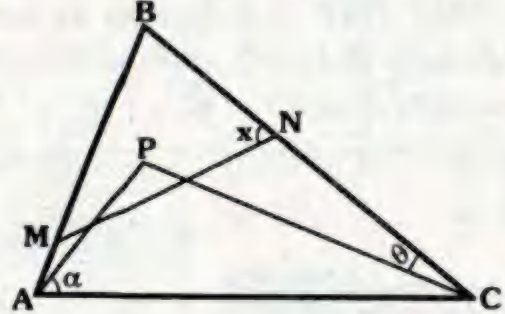
A) 45°/2
B) 53°/2
C) 37°/2
D) 15°
E) 30°




**PROBLEMA Nº 105**

En el gráfico P es el ortocentro de ABC y circuncentro de MBN, si $\alpha + \theta = 70°$, calcule x.

A) 60°
B) 70°
C) 80°
D) 90°
E) 100°




**PROBLEMA Nº 106**

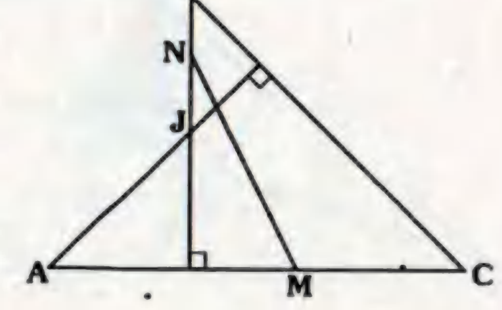
Se tiene un triángulo acutángulo ABC, si la distancia de B al ortocentro de ABC es igual a AC, calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 37° C) 53°
D) 60° E) 45°

**PROBLEMA Nº 107**

Si JN=NQ=3 y AM=MC=6, calcule MN.

A) $3\sqrt{3}$
B) $5\sqrt{3}$
C) $3\sqrt{5}$
D) $4\sqrt{5}$
E) $5\sqrt{5}$



**PROBLEMA Nº 108**

Dado un triángulo obtusángulo ABC, obtuso en B, si la distancia de A al ortocentro de ABC es igual al circunradio del triángulo ABC, calcule m∡BAC.

A) 60º B) 53º C) 45º
D) 37º E) 30º

**PROBLEMA Nº 109**

Desde un punto A exterior a una circunferencia se trazan las tangentes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ (B y C son puntos de tangencia), si m∡BAC = 60º y el inradio de ABC es r, calcule la distancia entre el incentro y el excentro relativo a $\overline{BC}$.

A) 2r B) 3r C) 4r
D) 5r E) 6r

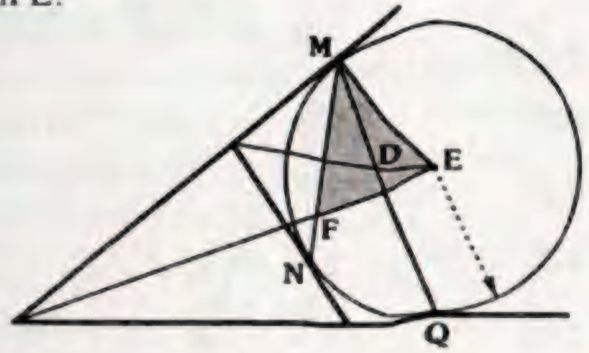
**PROBLEMA Nº 110**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC recto en B, en el cual se traza la altura BH, si E es el excentro de ABH relativo a $\overline{AB}$ e I es el incentro de BHC, calcule m∡EBI.

A) 90º B) 115º C) 130º
D) 135º E) 150º

**PROBLEMA Nº 111**

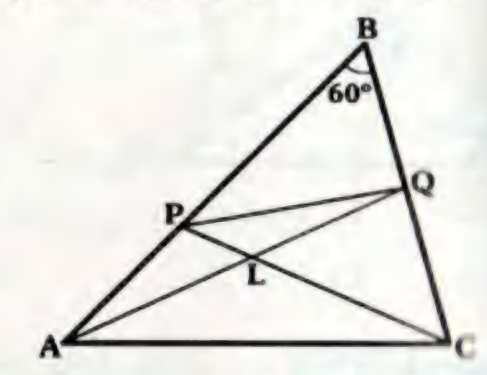
Si M, N y Q son puntos de tangencia, ¿Qué punto notable es D del triángulo MFE?




A) Ortocentro B) Incentro
C) Circuncentro D) Punto de Miquel
E) Baricentro

**PROBLEMA Nº 112**

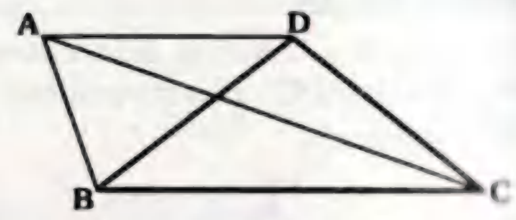
En el gráfico, si AP=PQ=QC. Indique que punto notable es L de ABC.




A) Incentro B) Ortocentro
C) Circuncntro D) Baricentro
E) Punto de Georgonne

**PROBLEMA Nº 113**

Si $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$ y D es circuncentro de ABC, ¿qué punto notable es A del triángulo BDC?




A) Incentro B) Punto de Nagel
C) Ortocentro D) Circuncentro
E) Excentro

**PROBLEMA Nº 114**

Si : $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$, $m\widehat{BN} = m\widehat{NC}$ y $m\widehat{CL} = m\widehat{LA}$

indique que punto notable es el incentro de ABC del triángulo MNL.

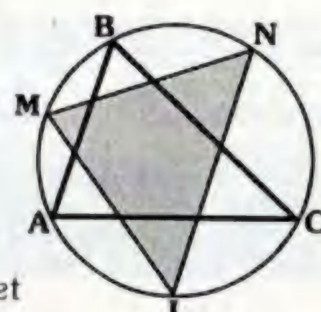
A) Incentro

B) Baricentro

C) Ortocentro

D) Circuncentro

E) Punto de Poncelet




**PROBLEMA Nº 115**

En el gráfico $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y O son la recta de Euler y el circuncentro del triángulo ABC, si AL=16, calcule OP.

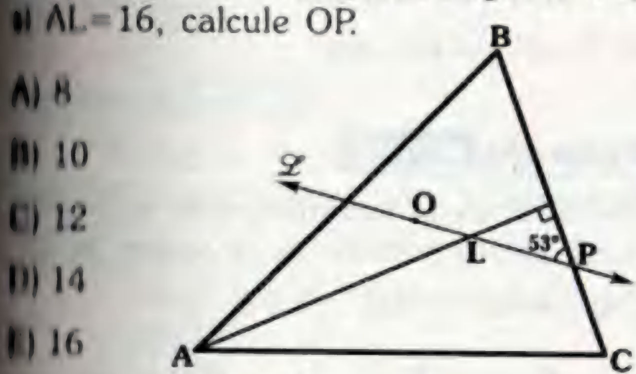
A) 8

B) 10

C) 12

D) 14

E) 16




**PROBLEMA Nº 116**

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es paralelo a la recta de Euler del triángulo ABC, H es ortocentro su ortocentro, AM=MC y PH=4, calcule BH.

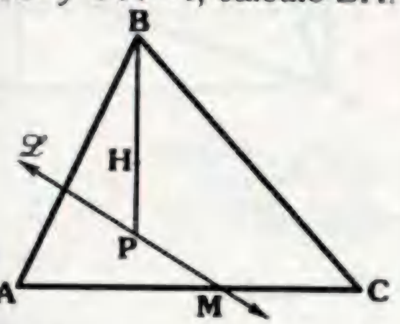
A) 8

B) 6

C) 4

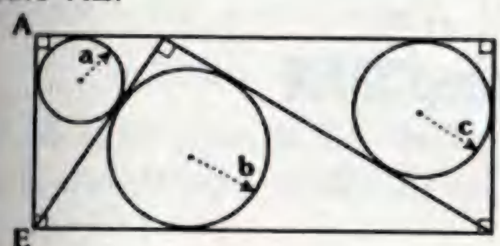
D) 3

E) 2




**PROBLEMA Nº 117**

Calcule AE.




A) $a+c-b$ B) $a+b+c$

C) $2a+2c-b$ D) $2a+b+c$

E) $a+b+3c$

**PROBLEMA Nº 118**

Si ED=5, AD=2 y BC=3, calcule x.

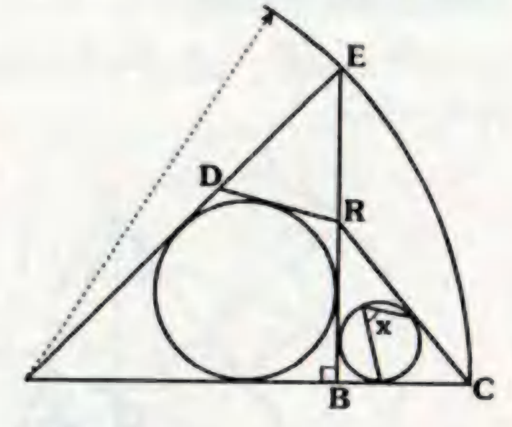
A) 60°

B) 75°

C) $\dfrac{143°}{2}$

D) 90°

E) $\dfrac{127°}{2}$




**PROBLEMA Nº 119**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica P en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$, si PB = BQ = 10, calcule la suma del inradio de PBQ con el inradio del cuadrilátero APQC.

A) 8 B) 9 C) 10

D) 11 E) 12

**PROBLEMA Nº 120**

Si AD=OP, AB=10 y BC=6, calcule x−y.

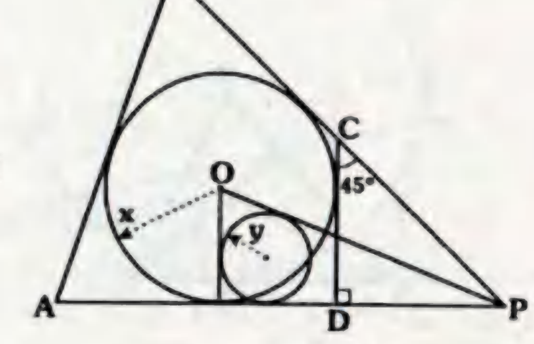
A) 2

B) 4

C) 5

D) 5,5

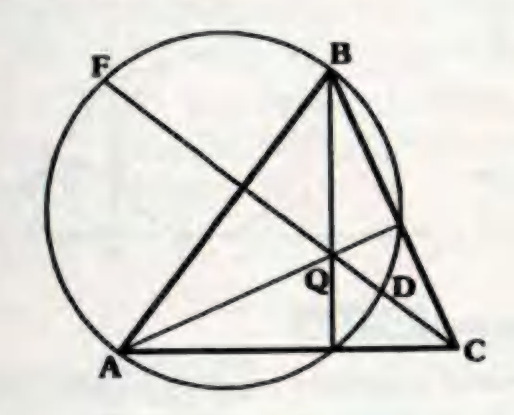
E) 6






**PROBLEMA Nº 121**

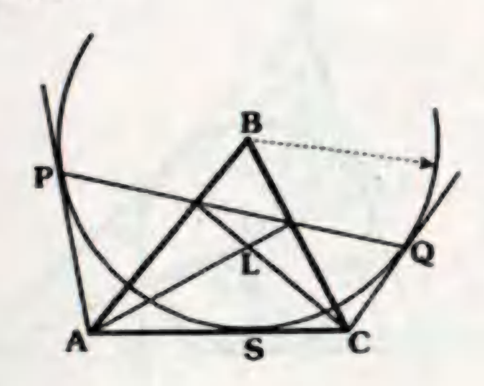
Si $m\widehat{FB} = m\widehat{BD}$. ¿Qué punto notable es Q de ABC.




A) Ortocentro
B) Baricentro
C) Circuncentro
D) Punto de Lemoine
E) Punto exmediano

**PROBLEMA Nº 122**

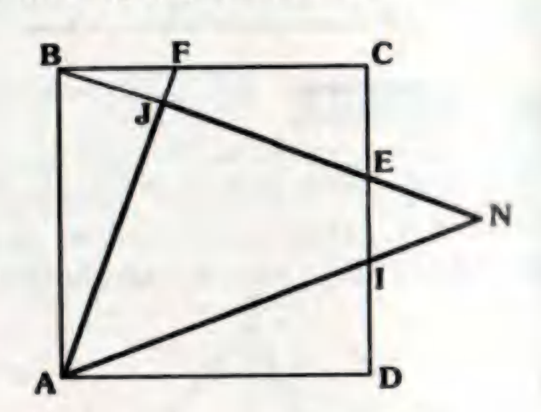
En el gráfico; P, Q y S son puntos de tangencia, indique que punto notable es L de ABC.




A) Incentro
B) Baricentro
C) Ortocentro
D) Punto exsimediano
E) Punto de Brocard

**PROBLEMA Nº 123**

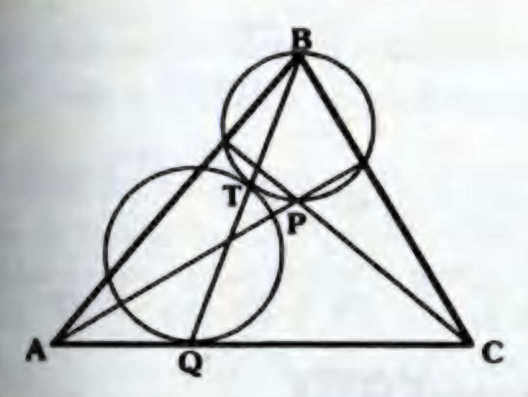
Si ABCD es un cuadrado y BF=ID=EC ¿Qué punto notable es el centro de dicho cuadrado del $\Delta$AJN?




A) Baricentro
B) Incentro
C) Ortocentro
D) Punto de Spieker
E) Punto de Miquel

**PROBLEMA Nº 124**

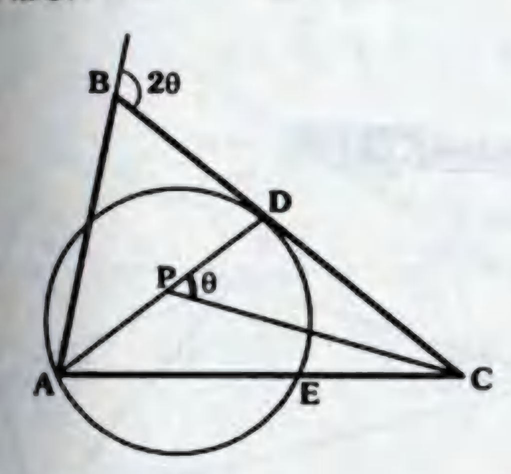
En el gráfico T y Q son puntos de tangencia, ¿Qué punto notable es P de ABC?




A) Incentro B) Baricentro
C) Punto de Steiner D) Circuncentro
E) Ortocentro

**PROBLEMA Nº 125**

Si D es punto de tangencia, AB=CD y BD=EC, indique que punto notable es P de ABC.




A) Baricentro B) Ortocentro
C) Incentro D) Circuncentro
E) Punto de Tarry

**PROBLEMA Nº 126**

En un triángulo ABC, las cevianas interiores $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ se cortan en L, si:

$$m\measuredangle BAP = m\measuredangle QBC,$$

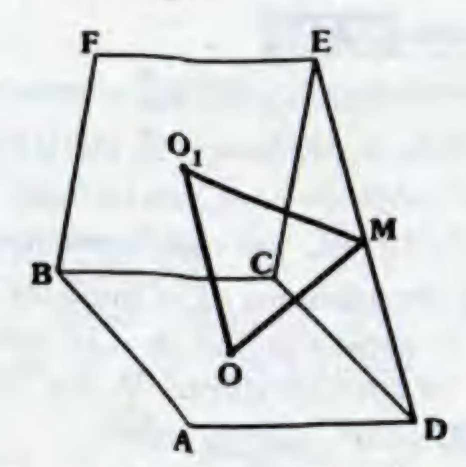
$$QP=QC \quad y \quad QLPC$$

es inscriptible, ¿Qué punto notable es L de ABC?

A) Incentro B) Baricentro
C) Circuncentro D) Ortocentro
E) Punto de Jerabek

**PROBLEMA Nº 127**

En el gráfico O y $O_1$ son los centros de los rombos ABCD y BCEF, si M es punto medio de $\overline{ED}$, indique que punto notable es C de $OO_1M$.




A) Ortocentro B) Incentro
C) Baricentro D) Circuncentro
E) Punto de Fermar

**PROBLEMA Nº 128**

Se tiene el triángulo ABC, de incentro I, y radio IA se traza la circunferencia $\mathscr{C}$ que corta a $\overline{AB}$ en M, a $\overline{BC}$ N y $L\left(L \in \overline{NC}\right)$ y a $\overline{AC}$ en P, si $m\measuredangle BAC = 80°$, calcule la medida del ángulo entre $\overline{NP}$ y $\overline{ML}$.

A) 15° B) 30° C) 37°
D) 40° E) 45°

**PROBLEMA Nº 129**

Se tiene el segmento PQ tangente a una circunferencia de centro O en B, luego

s $\overline{PA}$ y $\overline{QC}$ tangentes a dicha cir- ncia, (A y C son puntos de tangen- $\overline{AC}$ corta a $\overline{PO}$ en N, calcule :

$$\frac{m\measuredangle MBO}{m\measuredangle NBO}$$

B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}/2$

E) 2

**EMA Nº 130**

n triángulo ABC de ortocentro H, s la circunferencia $\mathscr{C}$ que pase por tangente a $\overline{AC}$ en C, luego ubi- L en $\overline{AC}$ tal que la semicircun- a de diámetro AL es tangente a $\mathscr{C}$ la prolongación de $\overline{CH}$ corta a semicircunferencia en M, si C = 20°, calcule $m\widehat{MH}$.

B) 20° C) 30°

E) 50°

**EMA Nº 131**

triángulo ABC, se trazan la altura la ceviana interior BN, el centro O de ABC pertenece a $\overline{BN}$, se traza $\overline{OM}$ perpendicular a $\overline{AC}$ H), si AH=HO, HM=m y A = 45°, calcule NC.

B) m C) 2m

/2 E) 3m

**EMA Nº 132**

e el triángulo ABC, de ortocentro H=6 calcule el radio de la circun- a que contiene a B, H y C, tal que la prolongación de $\overline{AB}$ corta en N a dicha circunferencia y $m\widehat{HBN} = 90°$.

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

**PROBLEMA Nº 133**

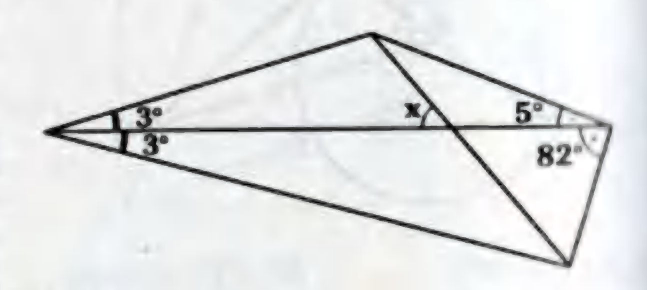
En un cuadrado ABCD, M es punto medio de $\overline{AB}$, el cuadrante BD de centro C corta a $\overline{DM}$ en F, luego se ubican Q en $\overline{FC}$ y H en $\overline{BC}$, si $m\measuredangle DFH = 90°$, FQ=QC y $\overline{FQ} \cap \overline{BQ} = \{O\}$, calcule FO/OH.

A) 1 B) 1,5 C) 2

D) 2,5 E) 3

**PROBLEMA Nº 134**

Calcule x.




A) 11° B) 13° C) 15°

D) 17° E) 19°

**PROBLEMA Nº 135**

Se tiene el triángulo ABC, se ubican P y Q en la región interior y en la región exterior relativa a $\overline{AC}$, si AP=PQ=QC, $m\measuredangle BCA = 60°$, $m\measuredangle APQ = 2(m\measuredangle ACQ) = 2\theta$ y $m\measuredangle ABC = 30° + \theta$. Calcule $m\measuredangle QBC$

EDITO

A) 3

D) 5

PROB

Dado se ub tiva a ment PB= QC.

A) 20

D) 12

PROB

Si O

A

A) 10

D) 20

PROB

Si las res, ca

)° B) 37° C) 45°
3° E) 60°

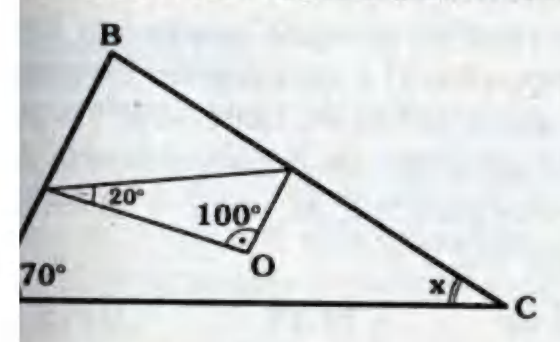
**LEMA Nº 136**

un triángulo ABC de ortocentro H,
ican P y Q en la región exterior rela-
$\overline{AB}$ y relativa a $\overline{BC}$ respectiva-
e si m∡PBA = m∡QBC = 90°,
CH, AH=BQ y AP=10, calcule

B) 18 C) 16
E) 10

**LEMA Nº 137**

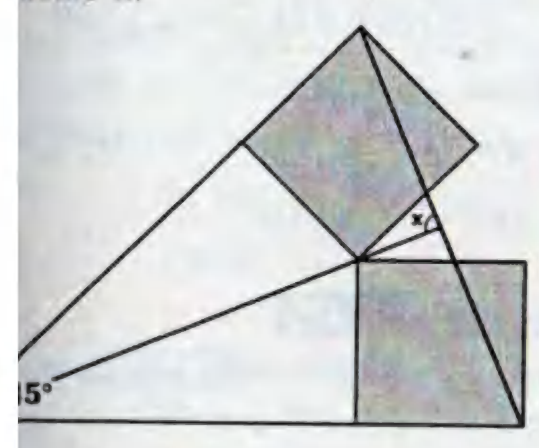
es circuncentro de ABC, calcule x.




B) 15° C) 18°
E) 30°

**LEMA Nº 138**

regiones sombreadas son regula-
lcule x.




A) 90° B) 75° C) 60°
D) 45° E) 30°

**PROBLEMA Nº 139**

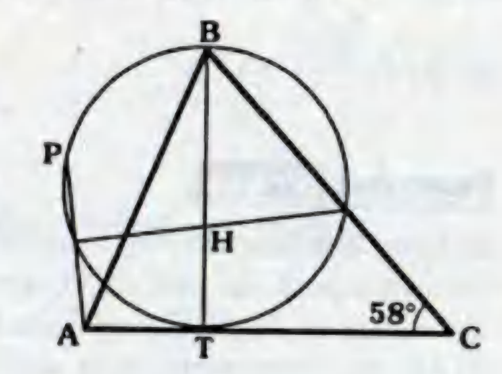
En un triángulo ABC, de baricentro G, con centro en A y radio 4 se traza una circunferencia que pasa por G, corta a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{AC}$ en N, si las ternas M, G, C y B, G, N son colineales, calcule BC.

A) 4 B) $4\sqrt{7}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{5}$ E) 8

**PROBLEMA Nº 140**

Si T es punto de tangencia y H es ortocentro de ABC, calcule $m\widehat{PB}$.

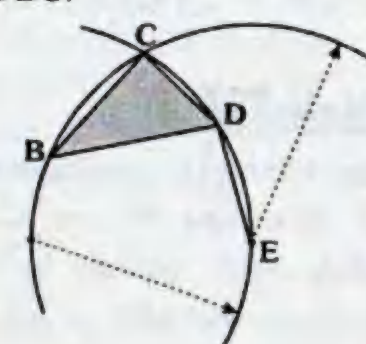
A) 60°
B) 62°
C) 64°
D) 66°
E) 68°




**PROBLEMA Nº 141**

En el gráfico BC=DE y BD=15, calcule la distancia del ortocentro al circuncentro del triángulo DBC.

A) 6
B) 6,5
C) 7
D) 7,5
E) 8



**PROBLEMA Nº 142**

Se tiene el triángulo ABC, de ortocentro H y circuncentro O, sean M y O' puntos medios de $\overline{AH}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, si la distancia entre las proyecciones de M y O sobre $\overline{BC}$, es la mitad del circunradio de ABC, calcule $m\measuredangle HMO'$.

A) 30° B) 37° C) 53°/2
D) 37°/2 E) 45°

**PROBLEMA Nº 143**

Dado un triángulo ABC, de ortocentro H y circuncentro O, además O, es circuncentro de AHC, si $OO_1 = 18$, calcule BH.

A) 9 B) $9\sqrt{2}$ C) 16
D) $16\sqrt{3}$ E) 18

**PROBLEMA Nº 144**

Se tiene el triángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro O, se ubica el ortocentro H de ABC y se traza el diámetro AD, si el perímetro de la región BHCD es 44 y la distancia de O a $\overline{AC}$ es 4, calcule la distancia de O a $\overline{AB}$.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

**PROBLEMA Nº 145**

En un triángulo acutángulo ABC, se traza la altura BL, si $CL - AL = 4$ y $m\measuredangle BCA = 45°$, calcule la distancia del circuncentro de ABC a $\overline{AC}$.

A) 0,5 B) 1 C) 2
D) 2,5 E) 4

**PROBLEMA Nº 146**

Dado un triángulo ABC, de circuncentro O y ortocentro H, se traza la altura BL, si BH=HL y $\overline{OH} // \overline{BC}$, calcule $m\measuredangle ABL$.

A) 15 B) $\frac{37°}{2}$ C) 30°
D) $\frac{53°}{2}$ E) 45°

**PROBLEMA Nº 147**

Se tiene un triángulo acutángulo ABC de ortocentro H y circuncentro O, trazamos la altura AM, si $m\measuredangle BHM = 37°$, la distancia del centro de la circunferencia de los nueve puntos a $\overline{AC}$ es 5 y BH=4, calcule AC.

A) 22 B) 20 C) 18
D) 16 E) 14

**PROBLEMA Nº 148**

En un triángulo ABC cuyo ortocentro es H y excentro relativo a $\overline{BC}$ es E, si:

$$m\measuredangle BCA = 2(m\measuredangle ABC) = 80°$$

Calcule $m\measuredangle AEH$.

A) 20° B) 18° C) 16°
D) 12° E) 10°

**PROBLEMA Nº 149**

Dado un triángulo ABC, la recta de Euler corta a $\overline{AB}$ en P y a $\overline{BC}$ en Q, si la

diferencia entre los perímetros de las regiones ABC y APQC es igual a PB, calcule m∡ABC.

A) 45° B) 60° C) 70°
D) 75° E) 90°

**PROBLEMA Nº 150**

En un triángulo ABC, m∡ABC = 120°, calcule la medida del ángulo entre la recta de Euler de ABC con $\overline{BC}$.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

**PROBLEMA Nº 151**

Se tiene el isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, donde O, G y H son el circuncentro, baricentro y ortocentro de ABC respectivamente, si OG=4 y la distancia de H a $\overline{AC}$ es 2, calcule el exradio relativo a $\overline{BC}$.

A) 10 B) 20 C) 30
D) 40 E) 50

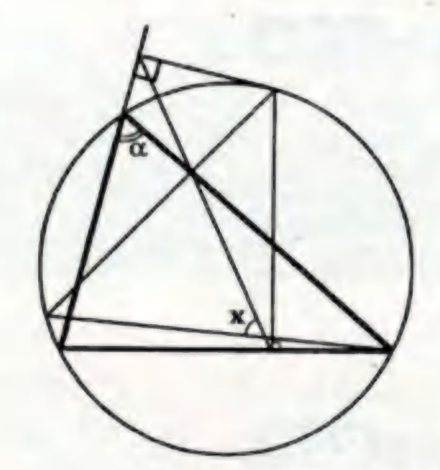
**PROBLEMA Nº 152**

La recta de Euler de un triángulo acutángulo ABC corta a $\overline{AC}$ en D, luego ubicamos el ortocentro H de ABC, si AD=2(BH)=2(DC), calcule m∡HDA.

A) 30° B) 37° C) 53°
D) 45° E) 60°

**PROBLEMA Nº 153**

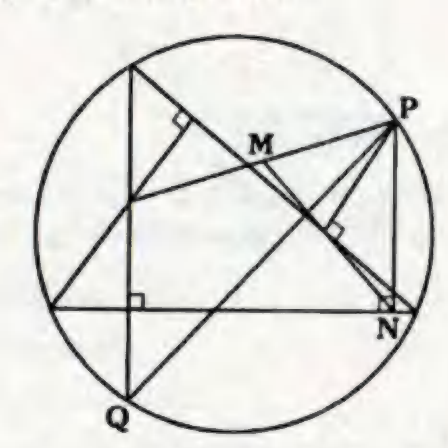
Calcule x.




A) α B) α/2 C) 2α
D) 3α/2 E) 3α

**PROBLEMA Nº 154**

Si PQ=24, calcule MN.




A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

**PROBLEMA Nº 155**

Se tiene el triángulo ABC, donde MNL es su respectivo triángulo mediano, H es el ortocentro de ABC; O, G y O' son el ortocentro, baricentro y circuncentro de MNL respectivamente, si GO=2, calcule OH.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

**...OBLEMA Nº 156**

...el perímetro de una región triangular ...8, calcule la suma de las distancias ...su circuncentro hacia los lados, sa...ndo que es entero.

...6 B) 5 C) 4

...3 E) 2

**...OBLEMA Nº 157**

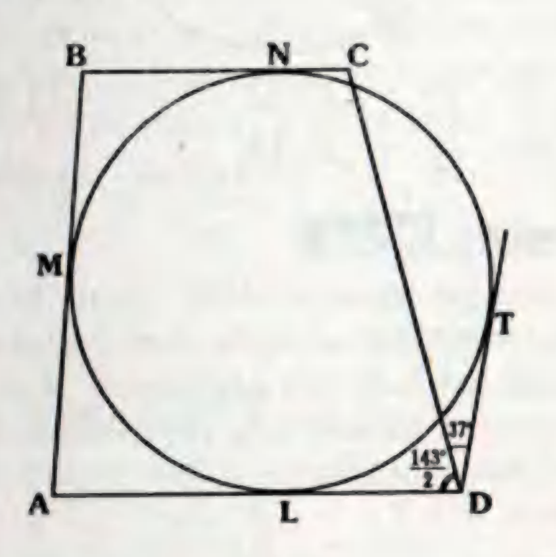
...un triángulo rectángulo ABC, recto ...B, se trazan las bisectrices interiores ... y CD, si la longitud de la proyección $\overline{ED}$ sobre la $\overline{AC}$ 6, calcule el inradio ...ABC.

...6 B) 5 C) 4,5

...4 E) 3

**...OBLEMA Nº 158**

... el gráfico M, N, L y T son puntos de ...ngencia, si la base media del trapecio ...BCD mide 5 y $CD=\sqrt{10}$ $(\overline{AD}//\overline{BC})$, ...lcule AB.




A) $10-\sqrt{10}$ B) $12-\sqrt{10}$

C) $14-\sqrt{10}$ D) $16-2\sqrt{5}$

E) $18-2\sqrt{10}$

**PROBLEMA Nº 159**

En un paralelogramo ABCD, se traza la altura BH, si los inradios de ABH y HBCD son r y R respectivamente, calcu... le HD.

A) R+r B) 2R+r

C) 2R−3r D) 2R−r

E) 3R−2r

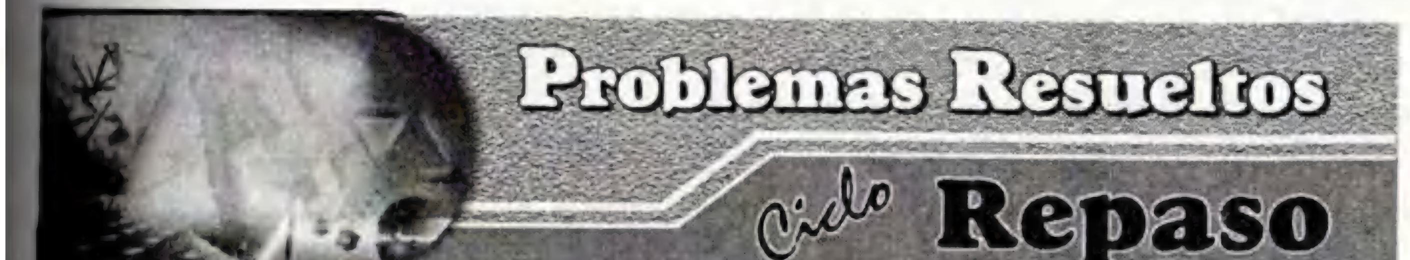
**PROBLEMA Nº 160**

Se tiene un trapecio isósceles ABCD $(\overline{BC}//\overline{AD})$ circunscrito a una circunferencia de centro O, si la prolongación de $\overline{BO}$ corta a $\overline{AD}$ en P, tal que $AP=2(PD)$, calcule $m\measuredangle CDA$.

A) 60° B) 53°

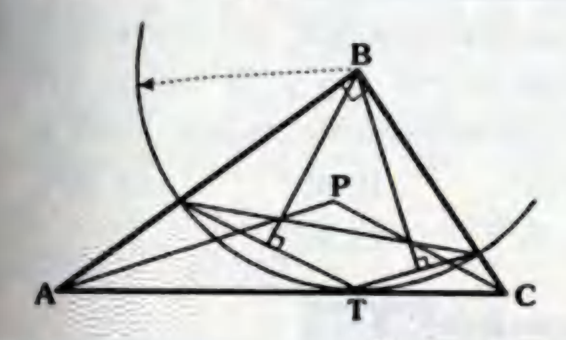
C) 45° D) 37°

E) 30°




**PROBLEMA Nº 161**

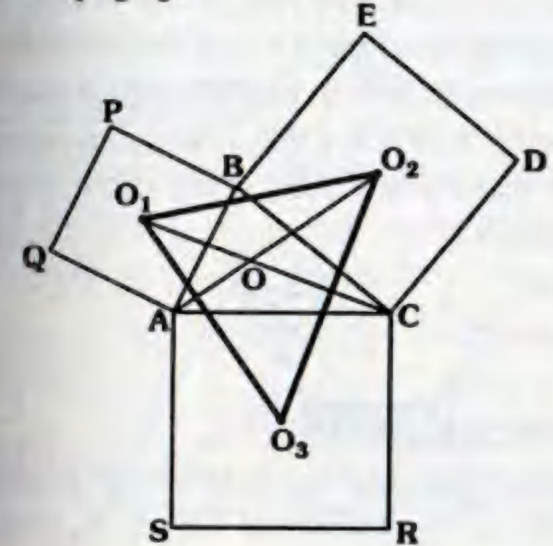
Si T es punto de tangencia, ¿Qué punto notable es P de ABC?




A) Incentro B) Baricentro
C) Circuncentro D) Ortocentro
E) Punto de Nagel

**PROBLEMA Nº 162**

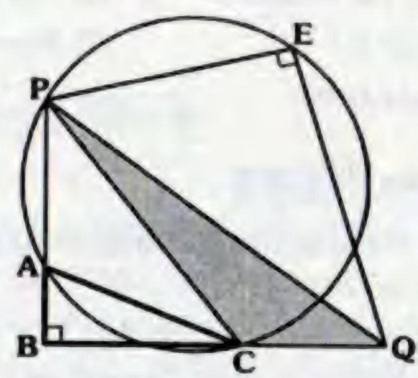
En el gráfico $O_1$, $O_2$ y $O_3$ son los centros de los cuadrados ABPQ, BCDE y ACRS, indique que punto notable es O del $\Delta O_1O_2O_3$.




A) Incentro B) Baricentro
C) Ortocentro D) Punto de Fermat
E) Circuncentro

**PROBLEMA Nº 163**

Si E es excentro de ABC. ¿Qué punto notable es E de PQC?

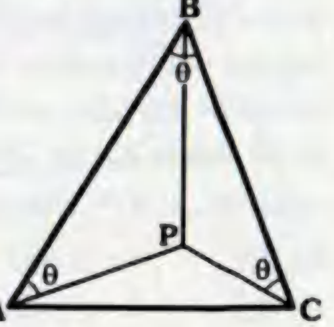



A) Circuncentro
B) Ortocentro
C) Punto de Morley
D) Punto de exmediano
E) Excentro

**PROBLEMA Nº 164**

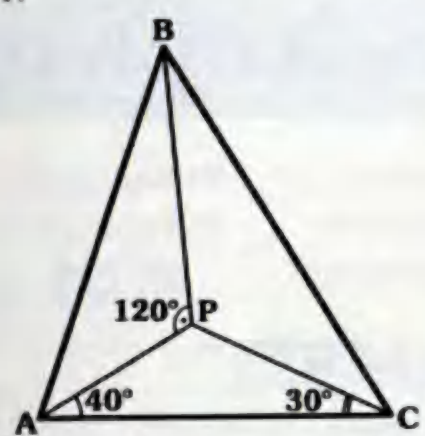
Si AC=BP, indique que punto notable es P de ABC.

A) Incentro
B) Ortocentro
C) Baricentro
D) Circuncentro
E) Punto de Miquel



**PROBLEMA Nº 165**

¿Qué punto notable es P de ABC? si AC=BP.




A) Punto de Brocard B) Baricentro
C) Ortocentro D) Incentro
E) Circuncentro

**PROBLEMA Nº 166**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH y se ubican los incentros $I_1$ y $I_2$ de los ⊿s ABH y BHC respectivamente, luego se prolonga $\overline{I_1I_2}$ hasta que corte a $\overline{BC}$ en P, con centro en B y radio BP trazamos el arco PL, tal que $m\measuredangle HBL=90°$, si $I_1I_2=5$ y $I_2P=4$, calcule $m\measuredangle I_1LH$.

A) 8° B) 14° C) 15°
D) 30° E) 37°

**PROBLEMA Nº 167**

Dado el triángulo ABC, de incentro I y excentro relativo a $\overline{AB}$ E, si la diferencia entre exradio relativo a AB y el inradio es el doble de la distancia de B a $\overline{IE}$ y $m\measuredangle BAC=30°$, calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 30° B) 37° C) 53°
D) 45° E) 60°

**PROBLEMA Nº 168**

En el triángulo ABC, de ortocentro H y $m\measuredangle BAC=115°$, en la región exterior y relativa a $\overline{AC}$ se ubica S, de modo que $m\measuredangle HSC=m\measuredangle HBC$, calcule $m\measuredangle ASH$.

A) 15° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 60°

**PROBLEMA Nº 169**

En un triángulo ABC, de baricentro G, las medianas AM, BN y CL miden $3\sqrt{3}$, 3 y 6 respectivamente, calcule $m\measuredangle BGL$.

A) 15° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

**PROBLEMA Nº 170**

Se tiene el triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, trazamos la ceviana interior AQ luego ubicamos el incentro I de ABQ, si $m\measuredangle ICA=40°$, calcule $m\measuredangle BQA$.

A) 40° B) 50° C) 60°
D) 70° E) 80°

**PROBLEMA Nº 171**

Dado el cuadrado ABCD, de centro O, se ubican los puntos P y Q en las prolongaciones de $\overline{DA}$ y $\overline{CB}$ respectivamente, tal que $m\measuredangle QPA=90°$, luego trazamos $\overline{PO}$ que corta a $\overline{AB}$, si PQ=QM, calcule $m\measuredangle OPD$.

A) 60° B) 30° C) 15°
D) 45°/2 E) 53°/2

**PROBLEMA Nº 172**

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH, si $E_1$ y $E_2$

son excentros de los $\Delta_s$ ABH y BHC relativa a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, calcule la medida del ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{E_1E_2}$.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 90°

**PROBLEMA Nº 173**

En un triángulo isósceles ABC, de base AC en el cual M es punto medio de $\overline{AC}$, luego ubicamos S y N en $\overline{BC}$ y $\overline{MS}$, tal que $m\measuredangle MSC = 90°$ y MN=NS, calcule la medida del ángulo entre $\overline{BN}$ y $\overline{AS}$.

A) 90° B) 75° C) 60°
D) 45° E) 30°

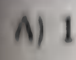
**PROBLEMA Nº 174**

Se tiene el triángulo ABC, donde I es incentro y E es el excentro relativo a $\overline{AB}$, se traza $\overline{AP}$ perpendicular a $\overline{EB}$ $(P \in \overline{EB})$, si $\overline{AP}$ biseca a $\overline{EI}$ y la longitud de la bisectriz interior AF es 10, calcule el exradio relativo a AB.

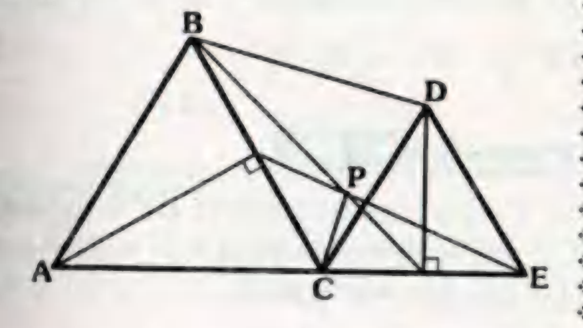
A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 16

**PROBLEMA Nº 175**

Si ABC y CDE son equiláteros, calcule BD/CP.



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5




**PROBLEMA Nº 176**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH, $I_1$ y $I_2$ son incentros de ABH y BHC, $\overleftrightarrow{I_1I_2}$ corta a la prolongación de $\overline{CA}$ en P, si AB=a, BC=b y AC=c, calcule PA.

A) $a+b-c$ B) $2a+b-c$

C) $3a+b-c$ D) $\dfrac{a(c+b)}{b-a}$

E) $\dfrac{a(c-b)}{b-a}$

**PROBLEMA Nº 177**

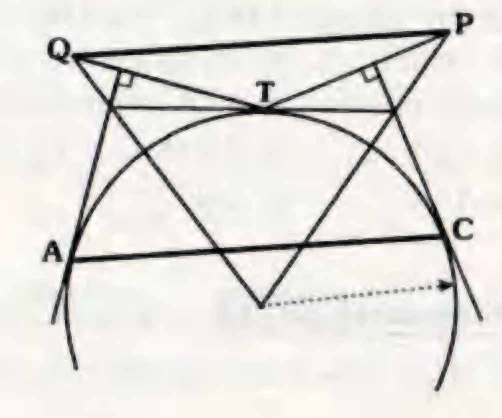
En un triángulo ABC, $\overline{BL}$ es altura, M es punto medio de $\overline{AB}$, H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC respectivamente, si $m\measuredangle BAC = 70°$ y $m\measuredangle MLO = 90°$, calcule $m\measuredangle BMH$.

A) 35° B) 40° C) 45°
D) 50° E) 55°

**PROBLEMA Nº 178**

Si A, T y C son puntos de tangencia, calcule QP/AC.

A) 0,5
B) 1
C) 1,5
D) 2
E) 2,5



**PROBLEMA Nº 179**

:xteriormente al triángulo isósceles ABC le base AC se construye el cuadrado 3CDE, M es el ortocentro de ACE, si 3E = $\sqrt{2}$ , calcule AM.

A) 1 B) 1,5 C) 2
)) 2,5 E) 3

**PROBLEMA Nº 180**

)ado un triángulo ABC, I y E son el ncentro y excentro relativo a $\overline{BC}$ respec-ivamente, si AC − AB = 10 y la suma del nradio con el exradio relativo a $\overline{BC}$ de \BC es 24, calcule EI.

\) 26 B) 24 C) 22
)) 20 E) 18

**PROBLEMA Nº 181**

:alcule x.

\) 150°
3) 145°
:) 140°
)) 137°
:) 135°

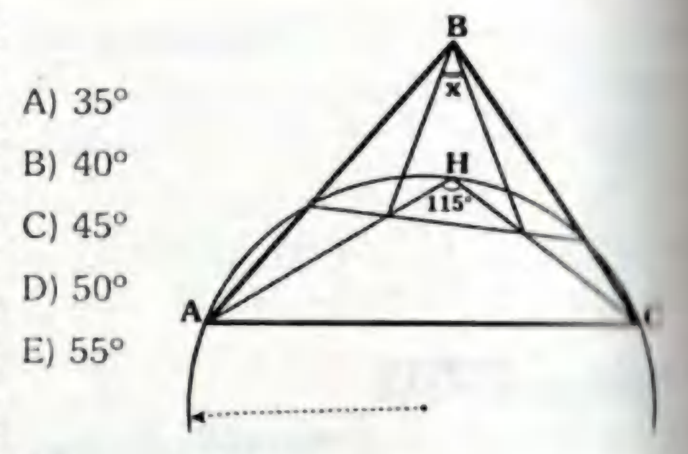
**PROBLEMA Nº 182**

:n un triángulo ABC, m∡ABC = 120°, I s incentro O es circuncentro y E es el xcentro relativo a BC, calcule m∡IEO .

\) 15° B) 30° C) 37°
)) 45° E) 60°

**PROBLEMA Nº 183**

i H es ortocentro de ABC, calcule x.




A) 35°
B) 40°
C) 45°
D) 50°
E) 55°

**PROBLEMA Nº 184**

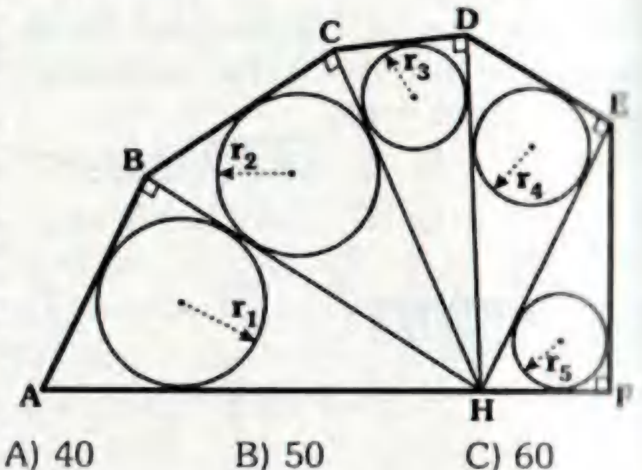
Dado un triángulo ABC, m∡ABC = 120°, si AB+BC=12, calcule la distancia entre su circuncentro y ortocentro.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

**PROBLEMA Nº 185**

Si : $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = AH = 10$

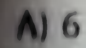
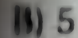
Calcule el perímetro de la región hexagonal ABCDEF.



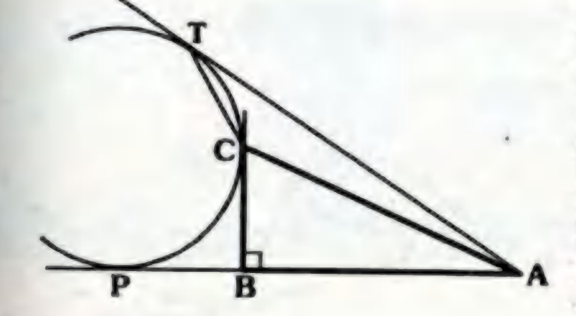

A) 40 B) 50 C) 60
D) 70 E) 80

**PROBLEMA Nº 186**

Si P, C y T son puntos de tangencia y CT=6, calcule el máximo valor entero del inradio del ΔABC .

A) 6
B) 5
C) 4
D) 3
E) 2




**PROBLEMA Nº 187**

Que tipo de cuadrilátero es ABCD, si las circunferencias inscritas en los triángulos ABC y ACD son tangentes a $\overline{AC}$ en el mismo punto.

A) Trapecio B) Paralelogramo
C) Inscriptible D) Circunscriptible
E) Bicentrico

**PROBLEMA Nº 188**

Que tipo de cuadrilátero se forma al unir los centros de cuatro circunferencias tangentes exteriores dos a dos.

A) Inscriptible B) Circunscriptible
C) Trapecio D) Paralelogramo
E) Exinscriptible

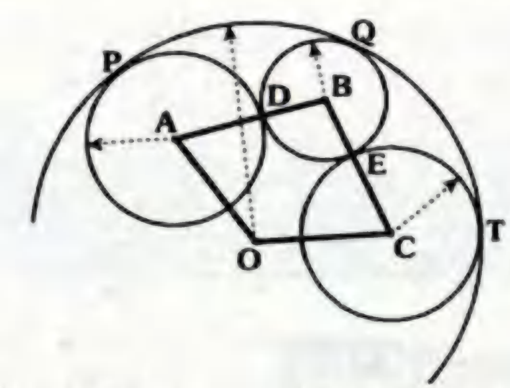
**PROBLEMA Nº 189**

Se tiene el cuadrilátero circunscrito E, P, F y Q pertenecen a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente, tal que al trazar $\overline{PQ}$ y $\overline{EF}$ forman cuatro cuadriláteros parciales circunscritos, si PQ=a, calcule EF.

A) a/2 B) 3a/2 C) 2a
D) a E) 3a

**PROBLEMA Nº 190**

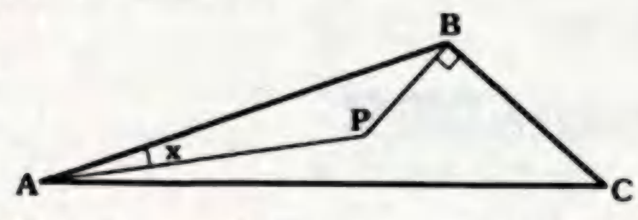
Si P, Q, T, E y D son puntos de tangencia, ¿Qué tipo de cuadrilátero es OABC?




A) Inscriptible B) Circunscriptible
C) Exinscriptible D) Bicentrico
E) Trapecio

**PROBLEMA Nº 191**

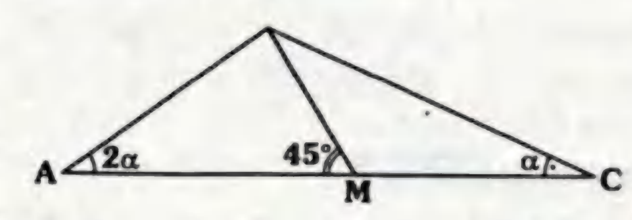
Si P es baricentro de ABC y AP=PB+BC, calcule x.




A) 10,5° B) 12° C) 14°
D) 15° E) 16,5°

**PROBLEMA Nº 192**

Si AM=MC, calcule $\alpha$.




A) 14° B) 15° C) 18°
D) 30° E) $\frac{37°}{2}$

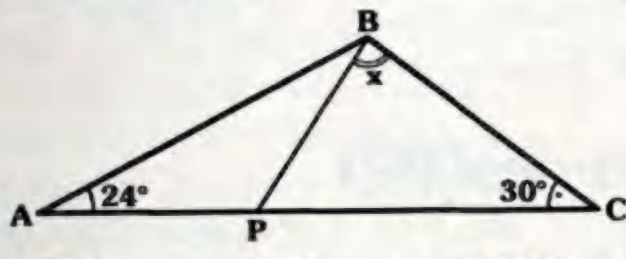
**PROBLEMA Nº 193**

Si AB=AD, calcule $\theta$.

A) 8°
B) 10°
C) 12°
D) 14°
E) 16°

**PROBLEMA Nº 194**

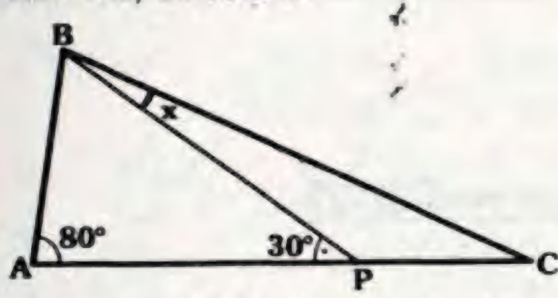
Si AB=PC, calcule x.




A) 90° B) 92° C) 96°
D) 98° E) 120°

**PROBLEMA Nº 195**

Si AB=PC, calcule x.

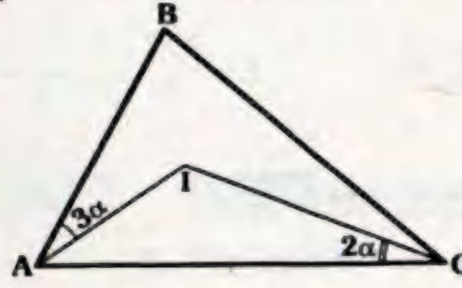



A) 20° B) 15° C) 25°
D) 10° E) 22,5°

**PROBLEMA Nº 196**

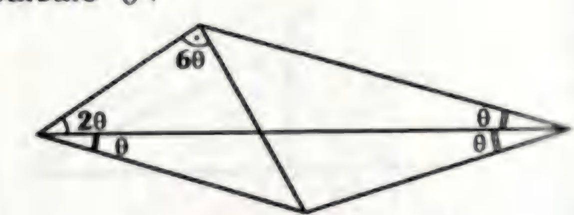
Del gráfico I es incentro de ABC, AB=IC, calcule $\alpha$.

A) 20°
B) 18°
C) 16°
D) 15°
E) 10°

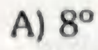



**PROBLEMA Nº 197**

Calcule $\theta$.




A) 15° B) 10° C) 16°
D) 18° E) 6°



**PROBLEMA Nº 198**

Si AB=PC, calcule $\alpha$.

A) 8°
B) 9°
C) 10°
D) 11°
E) 12°

**PROBLEMA Nº 199**

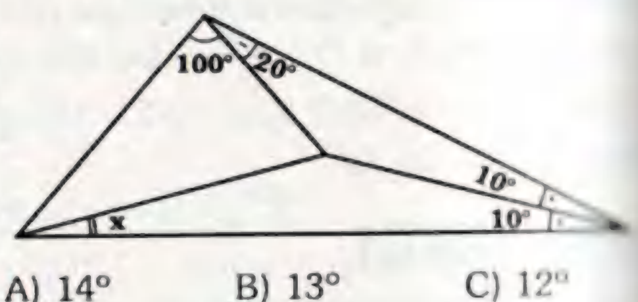
Si AD=BC, calcule $\theta$.

A) 15°
B) 16°
C) 10°
D) 18°
E) 20°

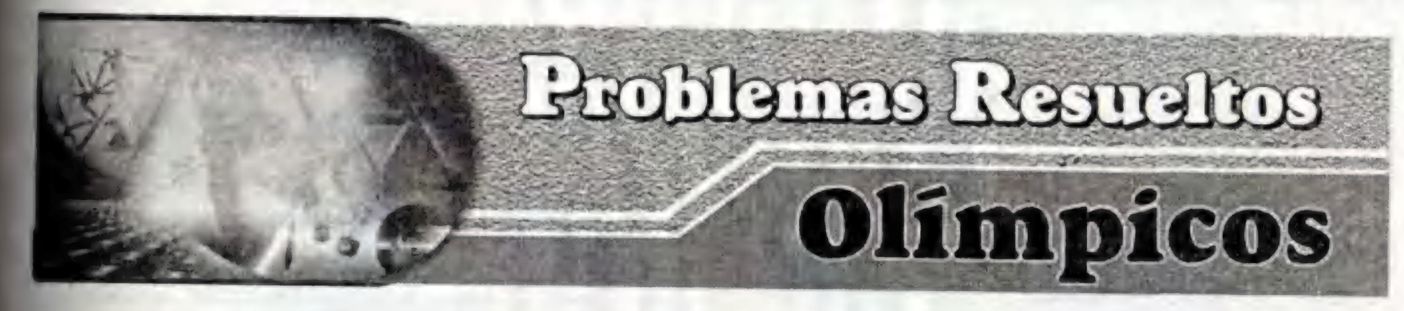



**PROBLEMA Nº 200**

Calcule x.




A) 14° B) 13° C) 12°
D) 11° E) 10°




**PROBLEMA Nº 201**

*(Olimpiada Argentina - 1997 - 3er Nivel)*

Sea ABCD un paralelogramo y P en su interior tal que :

$$m\measuredangle ABP = 2(m\measuredangle ADP) \quad y$$

$$m\measuredangle PCD = 2(m\measuredangle PAD)$$

Demostrar AB=BP=CP

**PROBLEMA Nº 202**

*(16° Olimpiada Colombiana - 2002)*

Sea ABCD un paralelogramo y $\mathscr{C}$ la circunferencia circunscrita al triángulo ABD, sean E y F las intersecciones de $\mathscr{C}$ con los lados BC y CD respectivamente (o sus prolongaciones). Demostrar que el circuncentro del triángulo CEF está sobre $\mathscr{C}$.

**PROBLEMA Nº 203** *10° IMO - 2002*

Sea el triángulo ABC, se ubica D en el lado BC, A es equidistante del incentro de ABD y del excentro de ABC que en la bisectriz ángular de B. Demostrar CA=DC.

**PROBLEMA Nº 204**

*(38° Olimpiada internacional - 1997 Argentina)*

En un triángulo isósceles ABC(AB=BC) se traza la bisectriz interior CF, luego por el circuncentro O del triángulo ABC se traza una recta perpendicular a $\overline{CF}$ que intersecta a $\overline{BC}$ en P, por P se traza una paralela a $\overline{CF}$ que interseca a $\overline{AB}$ en R.

Demostrar que FR=BP.

**PROBLEMA Nº 205** *4° Olimpiada Rusa -1996*

Sea el triángulo ABC (CA=CB), O es circuncentro, I es incentro, D es un punto en $\overline{BC}$ tal que $\overline{DO}$ es perpendicular a $\overline{BI}$. Demostrar que $\overline{DI}$ es paralelo a $\overline{CA}$.

**PROBLEMA Nº 206**

*(XI Olimpiada de matemáticas Rioplatence 2002)*

Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia circunscrita y O circuncentro del triángulo ABC con $AC \neq BC$. La recta tangente a $\mathscr{C}$ trazada por C corta a $\overline{AB}$ en M. La recta perpendicular a $\overline{OM}$ trazada por M corta a las rectas BC y AC en P y Q respectivamente.

Demostrar que PM=MQ.

**PROBLEMA Nº 207**

*(XI Olimpiada de matemáticas Rioplatence 2002)*

Sea ABC un triángulo tal que $m\measuredangle BAC = 45°$. Sean P y Q puntos inte-

riores al triángulo ABC tal que:

$$m\measuredangle ABQ = m\measuredangle QBP = m\measuredangle PBC \quad y$$

$$m\measuredangle ACQ = m\measuredangle QCP = m\measuredangle PCB$$

Sean D y E los pies de las perpendiculares trazadas desde P a los lados CA y AB respectivamente. Demostrar que Q es ortocentro del triángulo ADE.

**PROBLEMA Nº 208**

***(Shariguin 1989 - problemas de planimetría - Editorial MIR. Moscú)***

Demostrar que si en un triángulo un ángulo interior mide 120°, el triángulo que tiene como vértices, los pies de las bisectrices interiores, es triángulo rectángulo.

**PROBLEMA Nº 209**

***(19º Olimpiada Iberoamericana, España 2004)***

Se ubica en un plano un punto P y una circunferencia. Hallar el lugar geométrico del circuncentro del triángulo APB, donde $\overline{AB}$ es diámetro de $\mathscr{C}$.

**PROBLEMA Nº 210**

$\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias tangentes exteriores en T, se ubica A en $\mathscr{C}_1$ ($A \neq T$) desde el cual se trazan las tangentes AP y AQ a $\mathscr{C}_2$ (P y Q puntos de tangencia) las cuales cortan a $\mathscr{C}_1$ en B y C respectivamente. Demostrar que el punto medio del segmento PQ es excentro del triángulo ABC.



# SOLUCIONARIO

## Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

Puntos Notables

Geometría

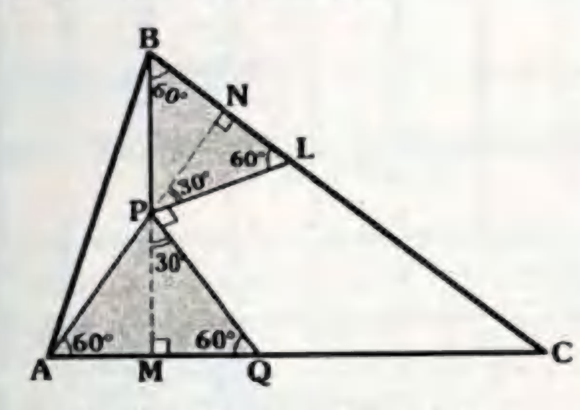




# Solucionario

## Ciclo Anual

## RESOLUCIÓN N° 01




- $\Delta BLP$ : Por ángulo exterior:

  $m\measuredangle LPM = 120°$

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle MPQ = 30°$

- Se nota : $m\measuredangle PMQ = 90°$

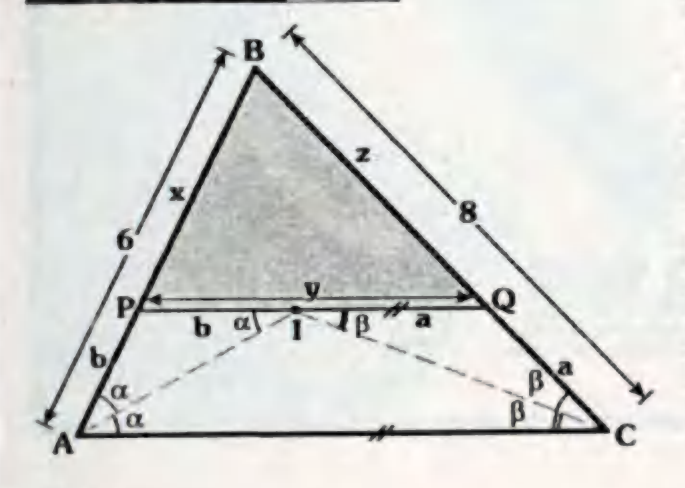
  $\Rightarrow \quad \overline{BM}$ es altura

- Del mismo modo $\overline{AN}$ es altura

  $\therefore$ **P es ortocentro del $\Delta ABC$.**

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 02




- Como "I" es incentro :

  $m\measuredangle BAI = m\measuredangle CAI = \alpha$ y

  $m\measuredangle BCI = m\measuredangle ACI = \beta$

- Por ángulos alternos internos :

  $m\measuredangle PIA = \alpha$ y $m\measuredangle QIC = \beta$

- $\Delta API$ : Isósceles $\Rightarrow$ $AP = PI = b$

- $\Delta IQC$ : Isósceles $\Rightarrow$ $CQ = QI = a$

- $\text{Perím.}_{\Delta BQP} = x + y + z$ ... (I)

- Se observa :

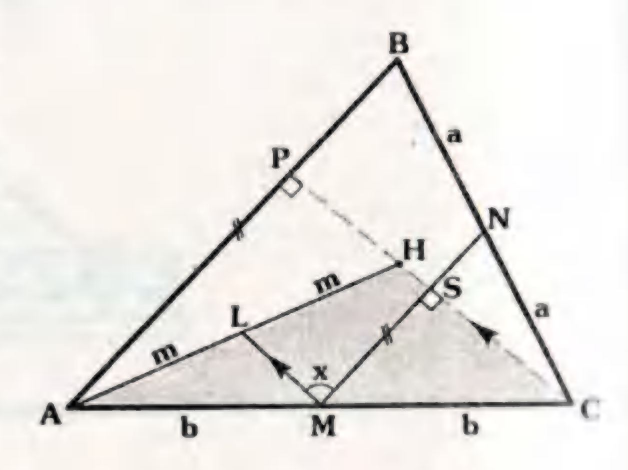
$$\begin{array}{r} b + x = 6 \\ \underline{a + z = 8} \\ \underbrace{a + b}_{y} + x + z = 14 \end{array} \quad (+)$$

- En (I):

  $\therefore$ **$\text{Perím.}_{\Delta BQP} = 14$**

**Clave [illegible]**

## RESOLUCIÓN N° 03



- Como "H" es ortocentro $\Rightarrow \overline{CP}$ es altura
- $\overline{MN}$ : Base media del $\Delta ABC$

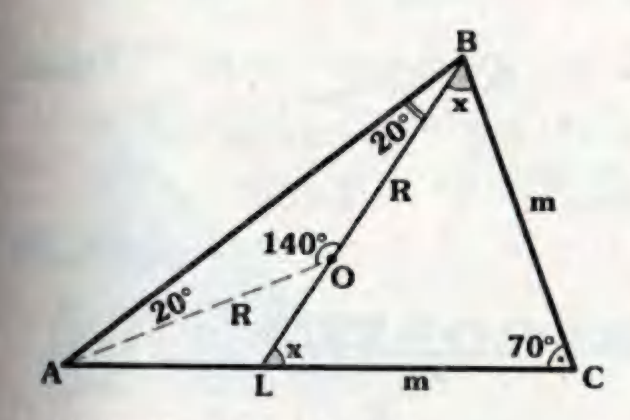
  $\Rightarrow \overline{MN} // \overline{AB} \Rightarrow m\measuredangle MSC = 90°$
- $\overline{LM}$ : Base media del $\Delta AHC$

  $\Rightarrow \overline{LM} // \overline{HC}$

  $\therefore$ **x = 90°**

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 04




- Como O es circuncentro

  $\Rightarrow AO = OB = R$

  y $m\measuredangle AOB = 140°$
- Por teorema fundamental :

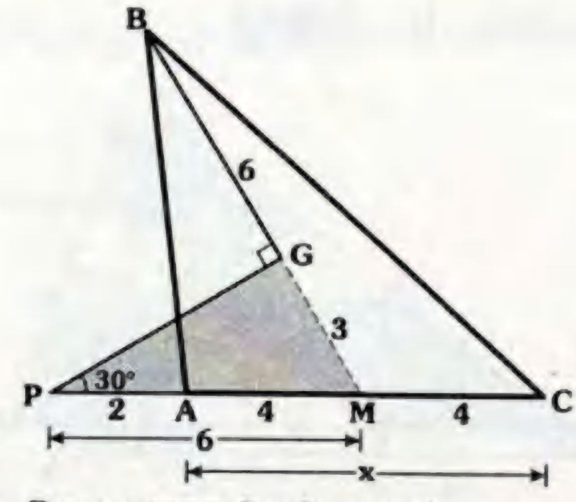
  $$m\measuredangle BCA = \frac{140°}{2} = 70°$$
- $\Delta LBC$: $x + x + 70° = 180°$

  $\therefore$ **x = 55°**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 05

- Prolongamos $\overline{BG}$ hasta que corte a $\overline{AC}$ en M, como G es baricentro: $AM = MC$.




- Por teorema fundamental :

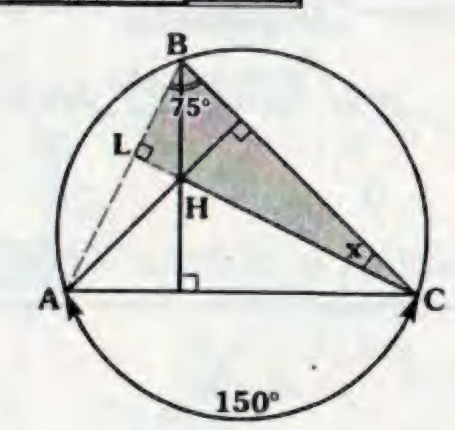
  $$GM = \frac{6}{2} = 3$$
- $\triangle PGM$ :

  Notable de 30° y 60° $\Rightarrow PM = 6$
- $AM = 6 - 2 = 4$

  $\therefore$ **x = 8**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 06



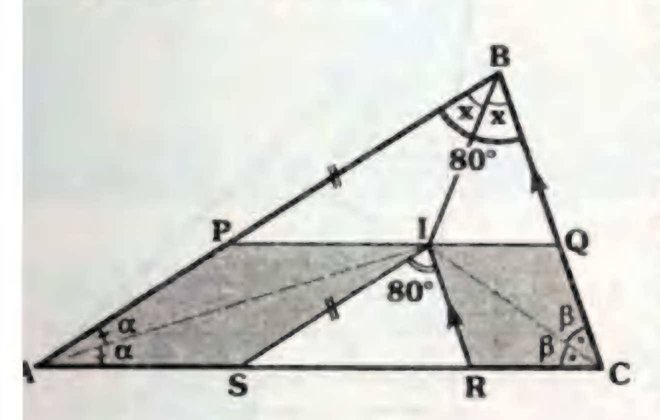

- Al trazar $\overline{AB}$, por ángulo inscrito :

  $m\measuredangle ABC = 75°$
- Se observa que H es el ortocentro del $\Delta ABC \Rightarrow \overline{CL}$ es altura
- $\triangle LBC$ : $x + 75° = 90°$

  $\therefore$ **x = 15°**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 07



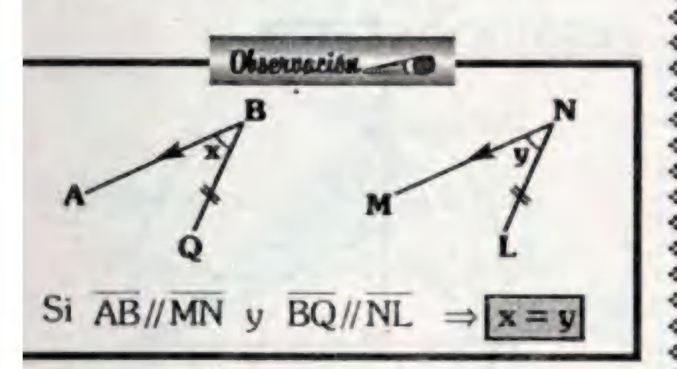

Recordar que en el rombo la diagonal es parte de la bisectriz interior :

$\Rightarrow$ $m\measuredangle PAI = m\measuredangle IAS = \alpha$ y

$m\measuredangle QCI = m\measuredangle ICR = \beta$

Luego : I es incentro del $\Delta ABC$

$\Rightarrow$ $m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBC = x$




Si $\overline{AB} // \overline{MN}$ y $\overline{BQ} // \overline{NL}$ $\Rightarrow$ $x = y$

$\overline{AB} // \overline{IS}$ y $\overline{BC} // \overline{IR}$

De la observación :

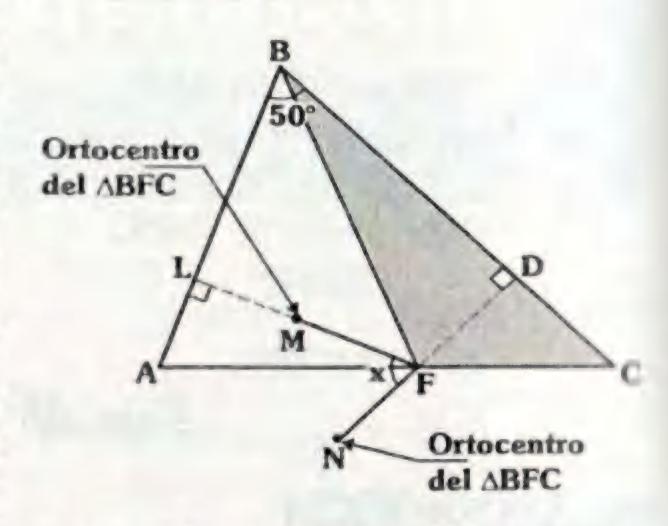
$m\measuredangle ABC = m\measuredangle SIR = 80°$

En "B" : $x + x = 80°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 40°}$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 08

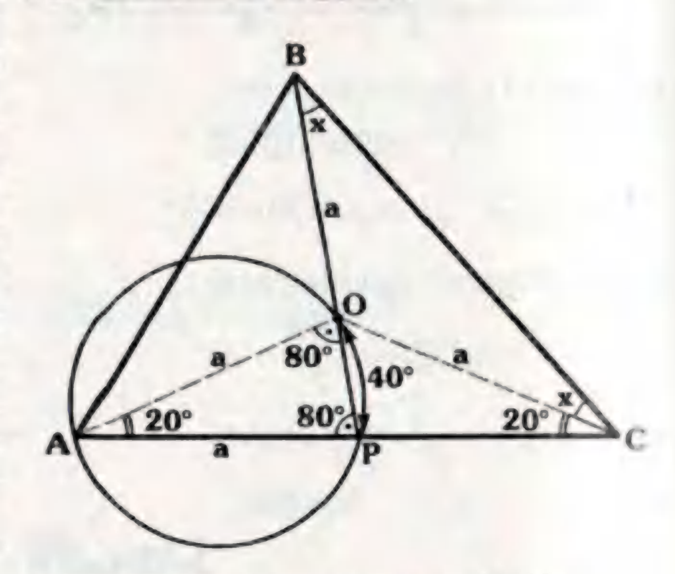



- M : Ortocentro $\Rightarrow$ $\overline{FL}$ : Altura.
- N : Ortocentro $\Rightarrow$ $\overline{FD}$ : Altura.
- ⌂LBDF : Inscriptible

$\therefore$ $\mathbf{x = 50°}$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 09




- O : Circuncentro del $\Delta ABC$

$\Rightarrow$ $AO = BO = CO = a$

- $\Delta AOC$ : Isósceles

$\Rightarrow$ $m\measuredangle OCA = 20°$

- $\Delta AOP$ : Isósceles

  $\Rightarrow m\measuredangle OPA = m\measuredangle AOP = 80°$

- $\Delta BOC$ : Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle OCB = x$

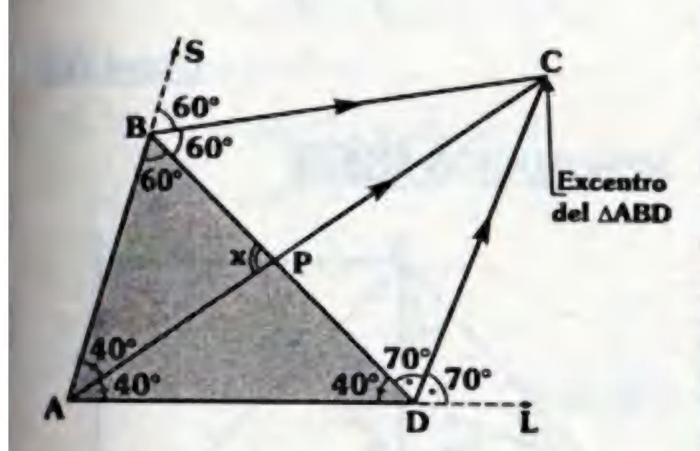
- $\Delta BPC$: Por ángulo exterior

  $\Rightarrow x + x + 20° = 80°$

  $\therefore$ **x = 30°**

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 10




- Del gráfico :

  $m\measuredangle SBC = 60°$ y $m\measuredangle CDL = 70°$

- $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{DC}$ son bisectriz exteriores

  $\Rightarrow \overrightarrow{AC}$ : Bisectriz del $\measuredangle BAD$

- Como:

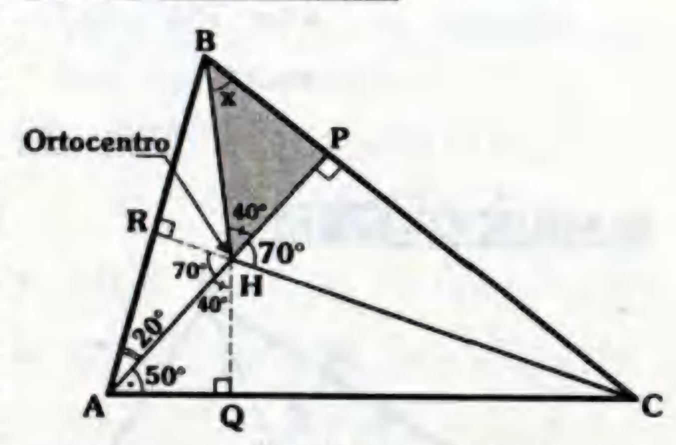
  $m\measuredangle BAD = 80° \Rightarrow m\measuredangle CAD = 40°$

- $\Delta APD$ : $40° + 40° = x$

  $\therefore$ **x = 80°**

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 11




- Prolongamos $\overline{CH}$ hasta que corte a $\overline{AB}$ en R, con lo cual nos damos cuenta que $\overline{CR}$ es altura $\Rightarrow$ H es ortocentro del $\Delta ABC$.

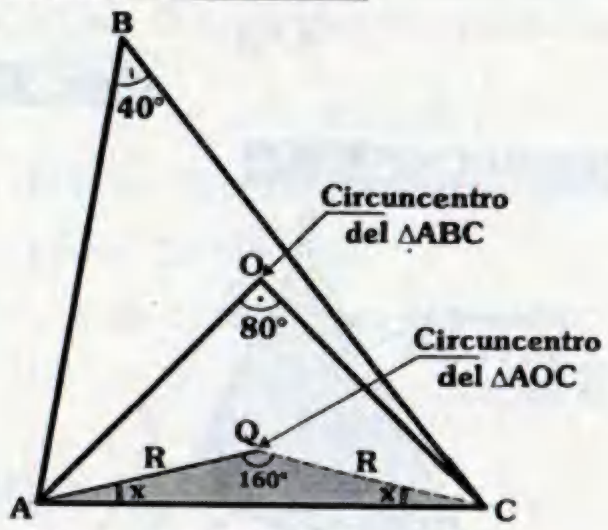
- Por el criterio principal: $\overline{BQ}$ es altura.

- En $\triangle HPB$: $x + 40° = 90°$

  $\therefore$ **x = 50°**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 12




- Por teorema fundamental :

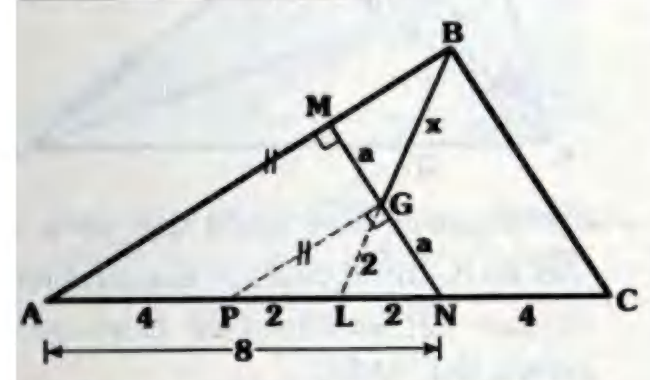
  $\Delta ABC$: $m\measuredangle AOC = 2(40°) = 80°$

  $\Delta AOC$: $m\measuredangle AQC = 2(80°) = 160°$

- $\Delta AQC$ :
  Isósceles $\Rightarrow$ $x+x+160° = 180°$
  $\therefore$ **$x = 10°$**

**Clave D**

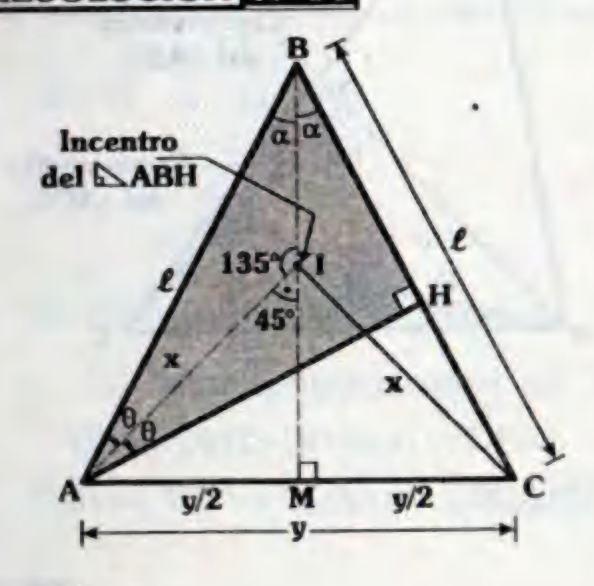
## RESOLUCIÓN N° 13




- Al prolongar $\overline{BG}$, $\overline{BL}$ es mediana
  $\Rightarrow$ $AL = LC = 6$
- $\overline{GP}$ : Base media ⊾AMN
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle PGN = 90°$ y $AP=PN=4$
- ⊾PGN : Como $PN=LN$ $\Rightarrow$ $GL = 2$
- Por teorema fundamental : $x=2(GL)$
  $\therefore$ **$x = 4$**

**Clave C**

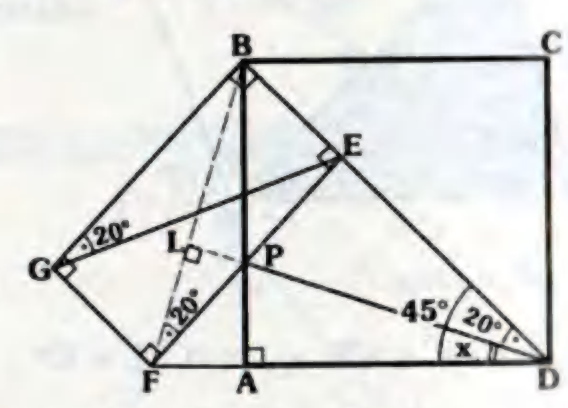
## RESOLUCIÓN N° 14




- I : Incentro $\Rightarrow$ $\overline{BI}$ bisectriz y
  $$m\measuredangle AIB = 90° + \frac{90°}{2} = 135°$$
  *(Teorema Fundamental)*
- Como el $\Delta ABC$ es isósceles
  $\Rightarrow$ $AM = MC = \frac{y}{2}$ y $AI = x$
- ⊾AMI : Notable $\Rightarrow$ $x = \frac{y\sqrt{2}}{2}$
  $$\therefore \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Clave D**

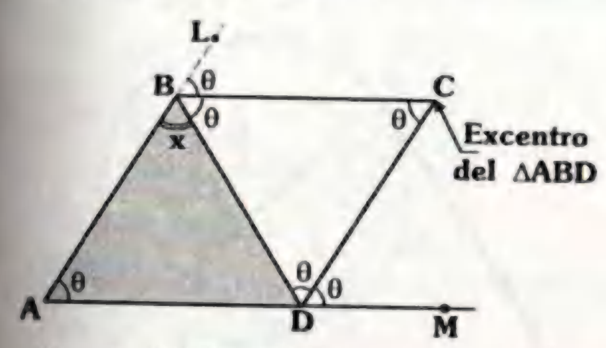
## RESOLUCIÓN N° 15




- BEFG : Rectángulo
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle BFE = m\measuredangle BGE = 20°$
- P : Ortocentro del $\Delta FBD$
  $\Rightarrow$ $\overline{DL}$ es altura
- ABCD: Cuadrado $\Rightarrow$ $m\measuredangle BDA = 45°$
- En "D" : $x + 20° = 45°$
  $\therefore$ **$x = 25°$**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 16




- Como ABCD es un paralelogramo :

$$m\measuredangle LBC = m\measuredangle BAD = m\measuredangle BCD = \theta$$

- C es excentro del ΔABD

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle LBC = m\measuredangle CBD = \theta$$

- En forma análoga :

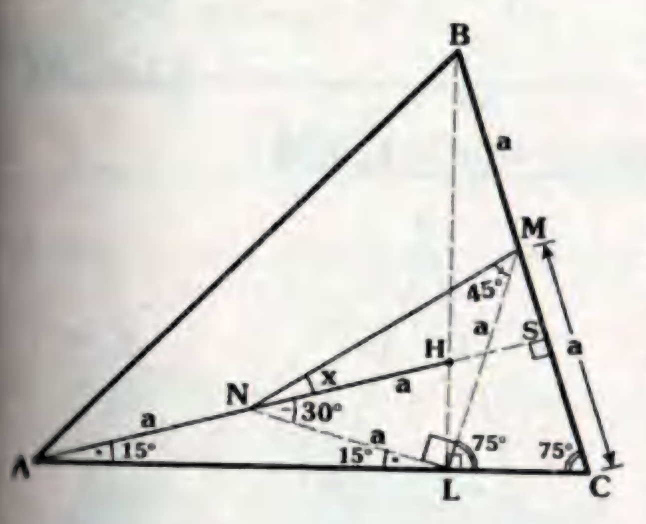
$$m\measuredangle MDC = m\measuredangle CDB = \theta$$

- ΔCBD : θ=60°
- En "B" : θ+θ+x = 180°

$$\therefore\ \mathbf{x = 60^\circ}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 17




- Como H es ortocentro : $\overline{AS}$ y $\overline{BL}$ son alturas.
- ◺ASC : m∡SAC = 15°
- Por el teorema de la mediana relativa a la hipotenusa en :

◺AHL : AN=NH=NL=a

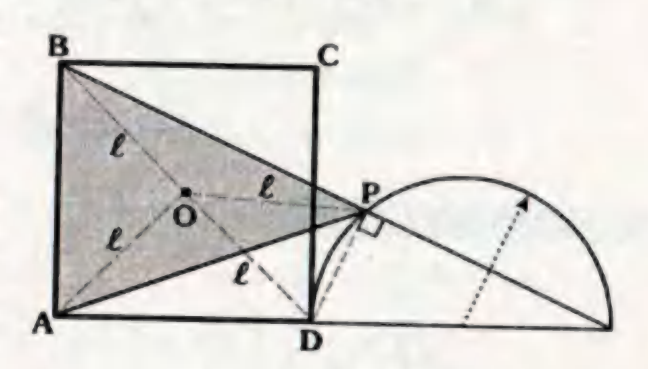
◺BLC : BM=MC=ML=a

- ΔANL: Isósceles ⇒ m∡ALN=15°
- ΔNLM: Notable ⇒ x + 30°=45°

$$\therefore\ \mathbf{x = 15^\circ}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 18




- Como O es centro del cuadrado ABCD

$$\Rightarrow \quad AO=BO=DO=\ell$$

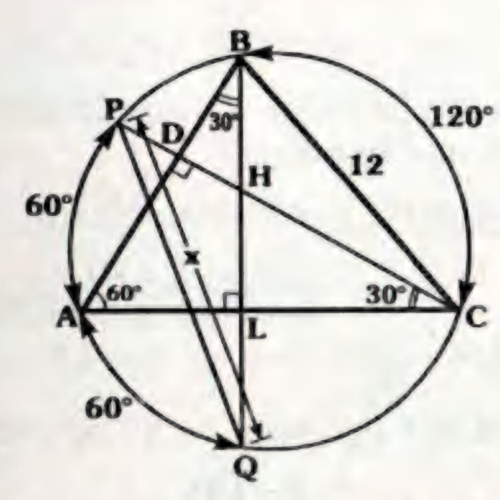
- ◺BPD: Teorema de la ◺ ⇒ OP=ℓ
- Como OA=OB=OP

∴ **O es circuncentro del ΔABP**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 19

- $\overline{BL}$ y $\overline{CD}$ son alturas
- Por ángulo inscrito : $m\widehat{BC} = 120^\circ$
- ◺ABL : m∡ABL = 30°




- Por ángulo inscrito : $m\widehat{AQ} = 60^\circ$

  $m\widehat{AP} = 60^\circ$

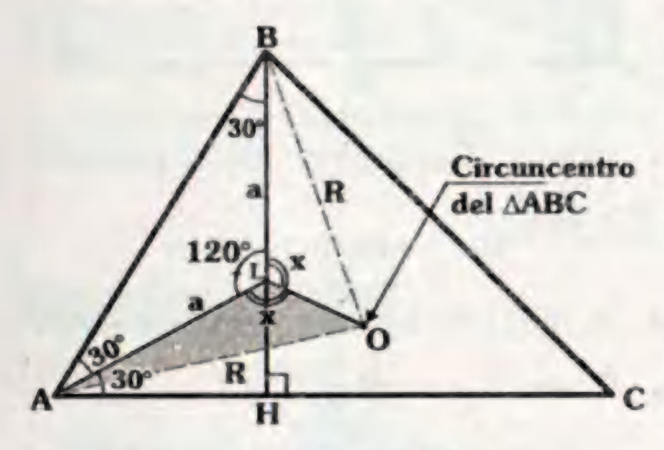
- Como :

  $m\widehat{BC} = m\widehat{PQ} = 120^\circ \Rightarrow PQ = QC$

  $\therefore$ **x = 12**

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 20




- $\Delta ABH$ : $m\measuredangle ABH = 30^\circ$
- $\Delta ABL$ : Isósceles $\Rightarrow AL = LB = a$
- $\Delta ALO \cong \Delta BOL$ (L.L.L.)

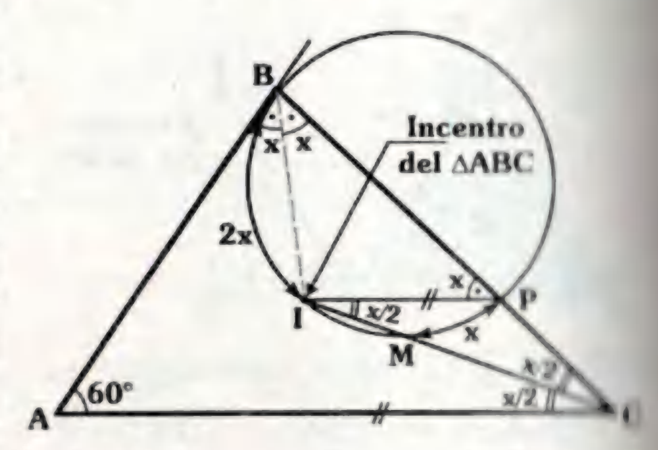
  $\Rightarrow m\measuredangle ALO = x$

- En "L" : $x + x + 120^\circ = 360^\circ$

  $\therefore$ **x = 120°**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 21




- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle PIM = x/2$
- $\overline{IP} // \overline{AC} \Rightarrow m\measuredangle ICA = x/2$

  *(ángulos alternos internos)*

- Como I es incentro $\Rightarrow m\measuredangle BCI = x/2$
- Por ángulos correspondientes :

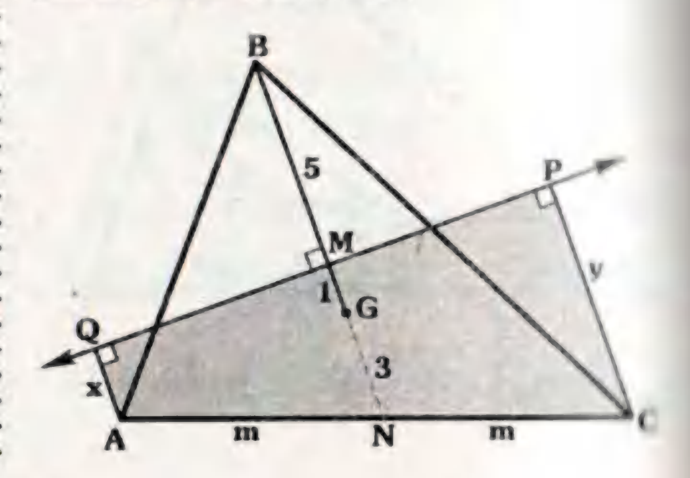
  $m\measuredangle IPB = x$

- Por ángulo semiincrito : $m\measuredangle ABI = x$
- I : Incentro $\Rightarrow m\measuredangle ABI = m\measuredangle CBI = x$
- $\Delta ABC$: $60^\circ + 2x + x = 180^\circ$

  $\therefore$ **x = 40°**

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 22



- Prolongamos $\overline{BG}$ hasta que corte a $\overline{AC}$ en N, entonces AN=NC=m.
- Por teorema fundamental :

$$GN=\frac{6}{2}=3$$

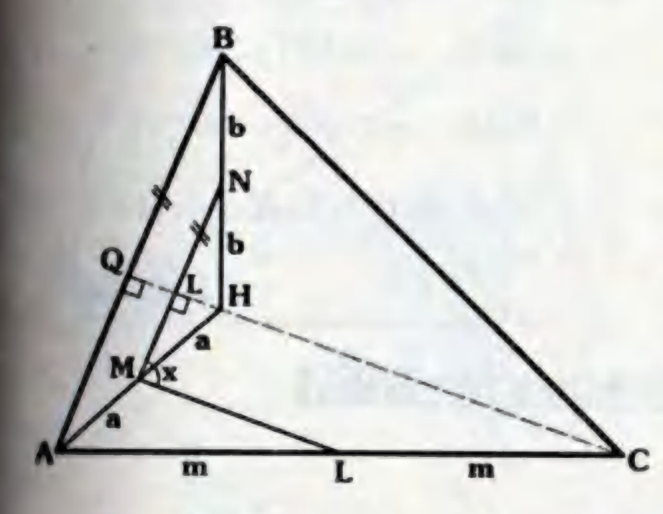
- $\overline{MN}$ es base media del trapecio AQPC :

$$\frac{x+y}{2}=4$$

$$\therefore\ \mathbf{x+y=8}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 23




- Como H es ortocentro : $\overline{CQ}$ es altura
- $\overline{MN}$ : Base media del $\Delta ABH$

$$\Rightarrow\ \overline{CL}\perp\overline{MN}$$

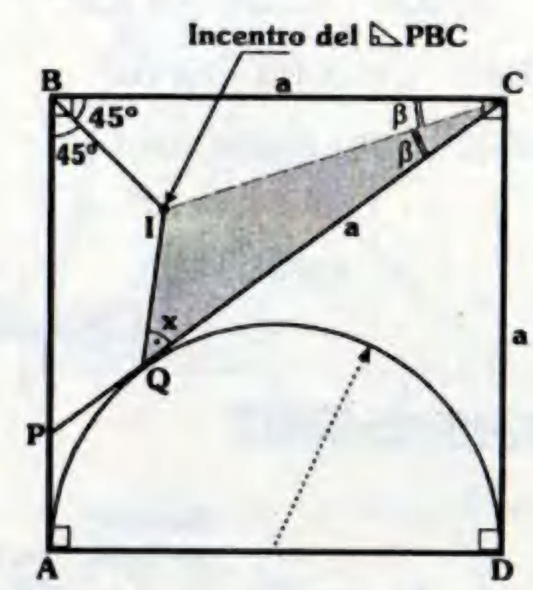
- $\overline{ML}$ : Base media del $\Delta AHC$

$$\Rightarrow\ \overline{ML}\,//\,\overline{CH}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=90^\circ}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 24




- Como I es incentro :

$$m\measuredangle PBI=m\measuredangle IBC=45^\circ$$

$$m\measuredangle BCI=m\measuredangle ICQ$$

- Como $\overline{CQ}$ y $\overline{CD}$ son tangentes

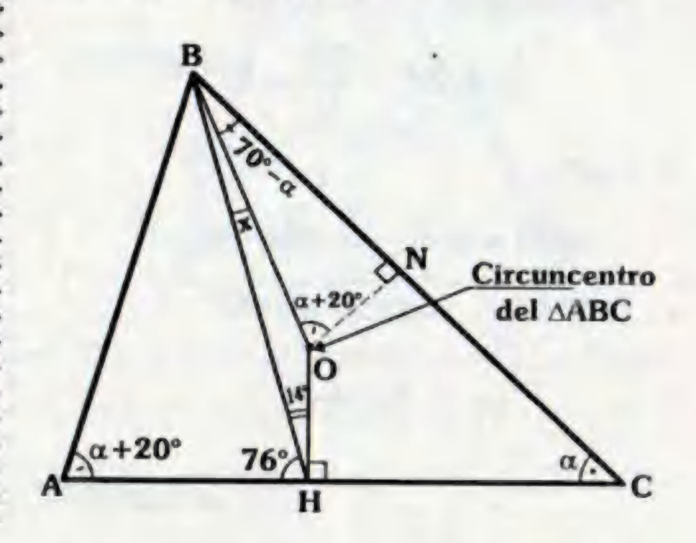
$$\Rightarrow\ CQ=CD=a$$

- $\Delta BCI\cong\Delta QCI$ (L.A.L.)

$$\therefore\ \mathbf{x=45^\circ}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 25



- Por teorema fundamental :

$$m\measuredangle BON = m\measuredangle BAC = \alpha + 20^\circ$$

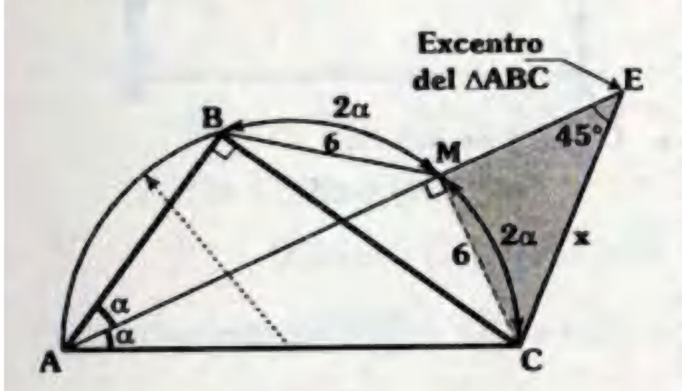
- $\Delta BNO$ : $m\measuredangle OBN = 70^\circ - \alpha$
- $\Delta BHC$ : Por ángulo exterior

$$\Rightarrow \quad 76^\circ = \alpha + x + 70^\circ - \alpha$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 6^\circ}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 26




- Por teorema :

$$\Rightarrow m\measuredangle ABC = m\measuredangle AMC = 90^\circ$$

- E : Excentro del ⊿ABC :

$$\Rightarrow m\measuredangle BAE = m\measuredangle EAC = \alpha$$

- Por teorema fundamental :

$$m\measuredangle AEC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

- Como :

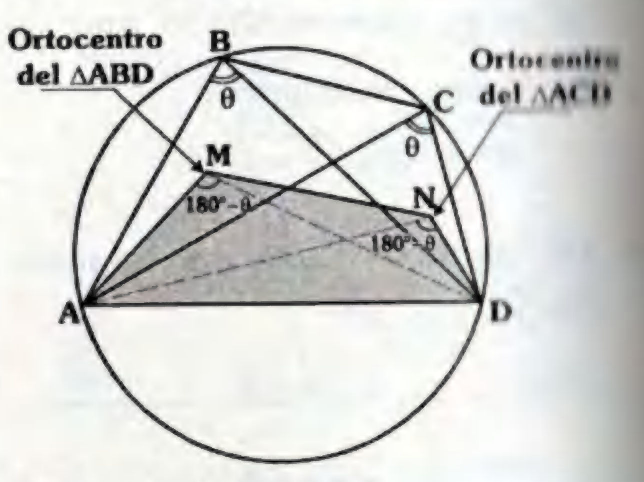
$$m\widehat{BM} = m\widehat{MC} \Rightarrow BM = MC = 6$$

- ⊿EMC : Notable de 45°

$$\therefore \quad \mathbf{x = 6\sqrt{2}}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 27




- Por ángulo inscrito :

$$m\measuredangle ABD = m\measuredangle ACD = \theta$$

- Como M y N son ortocentros, por teorema fundamental :

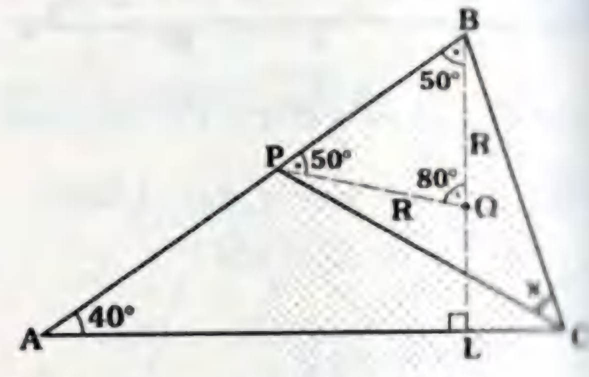
$$\Delta ABD: \quad m\measuredangle AMD = 180^\circ - \theta$$

$$\Delta ACD: \quad m\measuredangle AND = 180^\circ - \theta$$

$$\therefore \quad \square \mathbf{AMND : Inscriptible}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 28




- O : Ortocentro del $\Delta ABC$

$\Rightarrow \overline{BL}$ es altura y en ⊿ALB :

$$m\measuredangle ABL = 50^\circ$$

- O : Circuncentro del $\Delta PBC$

  $\Rightarrow \quad BO = OP = R$

- $\Delta PBO$: Isósceles

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle BPO = 50^\circ$ y

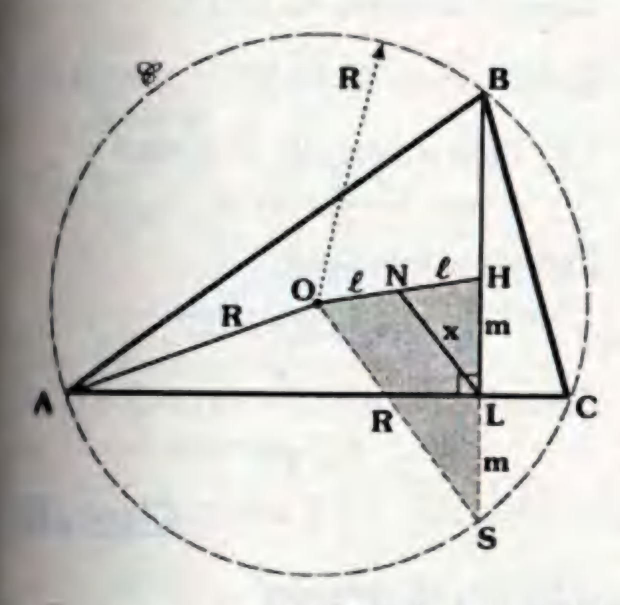
  $m\measuredangle BOP = 80^\circ$

- Por teorema fundamental de circuncentro en $\Delta PBC$ :

$$\therefore \quad x = \frac{80^\circ}{2}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 29




- Se observa que R es el circunradio del :

  $\Delta ABC \Rightarrow OS = R$

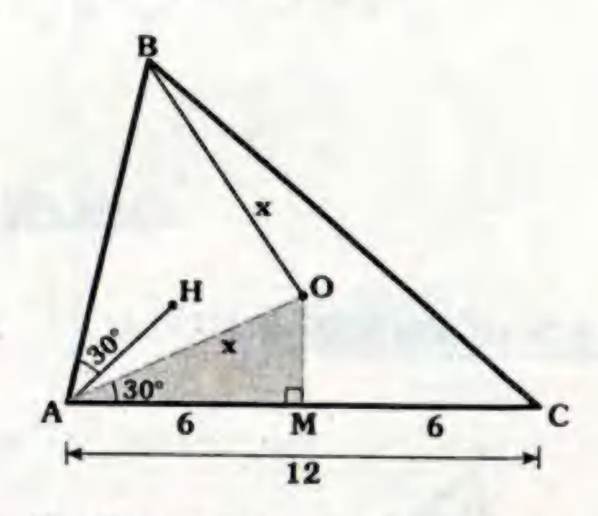
- Teorema 9.5. : $HL = LS = m$

- $\overline{NL}$ : Base media del $\Delta OHS$

$$\therefore \quad \frac{R}{x} = 2$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 30




- O : Circuncentro $\Rightarrow OA = OB = x$

- Por el teorema 9.4 :

  $m\measuredangle OAC = m\measuredangle HAB = 30^\circ$ y

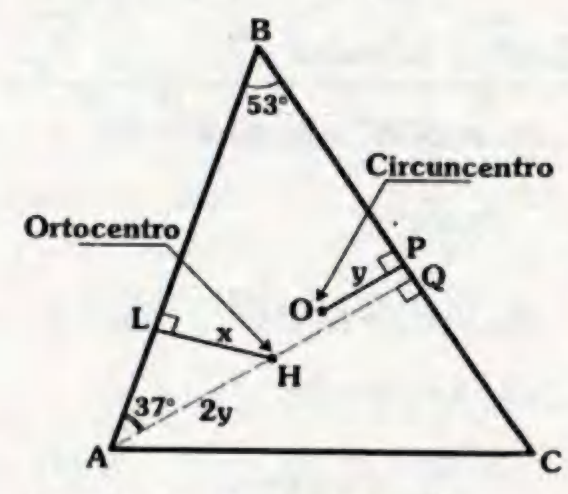
  $AM = MC = 6$

- $\triangle OMA$ : Notable 30° y 60°

$$\therefore \quad x = 4\sqrt{3}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 31




- Como H es ortocentro $\Rightarrow \overline{AQ}$ es altura

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle BAQ = 37^\circ$

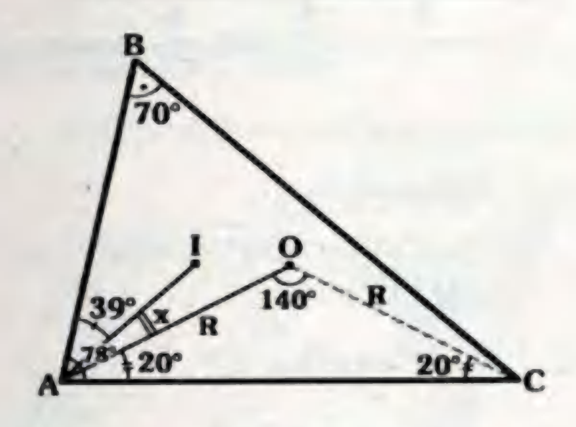
- Por el teorema 9.6: $AH = 2(OP) = 2y$

- $\triangle$ALH : Notable $\Rightarrow$ $\dfrac{x}{2y}=\dfrac{3}{5}$

$$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{6}{5}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 32




- Como O es circuncentro por teorema fundamental :

$$m\measuredangle AOC=140^\circ$$

- $\Delta$AOC : Isósceles

$$\Rightarrow\ m\measuredangle OAC=m\measuredangle OAC=20^\circ$$

- I : Incentro

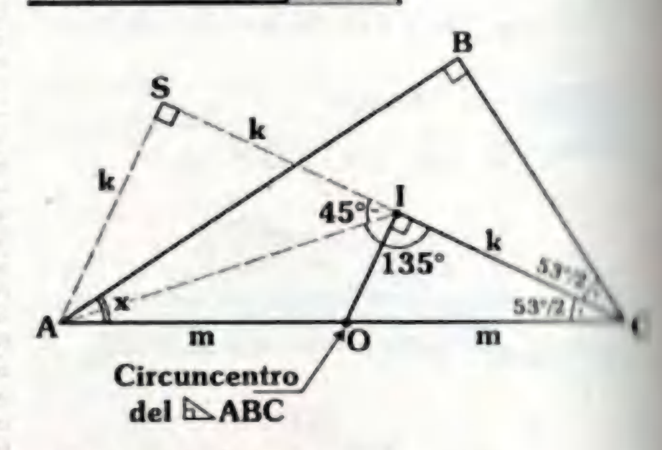
$$\Rightarrow\ m\measuredangle BAI=m\measuredangle IAC=39^\circ$$

$$\Rightarrow\ x+20^\circ=39^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x=19^\circ}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 33




- Por teorema fundamental :

$$m\measuredangle AIC=90^\circ+\frac{90^\circ}{2}=135^\circ$$

- Luego, trazamos $\overline{AS}\perp\overleftrightarrow{CI}$ .
- $\triangle$ASI : Notable de 45° $\Rightarrow$ AS=SI=k
- $\overline{OI}$ : Base media del $\triangle$ASC

$$\Rightarrow\ SI=IC=53^\circ/2$$

- $\triangle$ASC : Notable

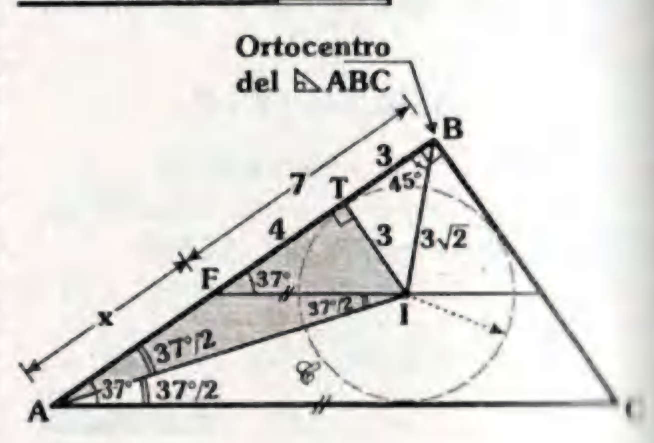
$$\Rightarrow\ m\measuredangle ACS=53^\circ/2$$

- Como I es incentro $\Rightarrow$ $m\measuredangle BCI=53^\circ/2$

$$\therefore\ \mathbf{x=37^\circ}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 34

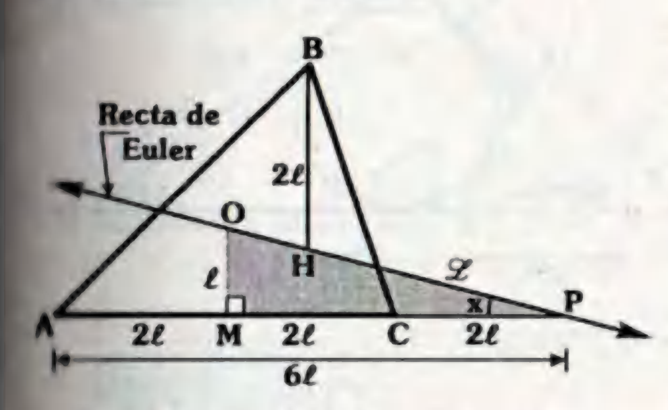


- Al trazar la circunferencia inscrita :
  IT=BT=3
- ◺FTI : Notable ⇒ m∡TFI=37°
- Como $\overline{AC}//\overline{FI}$ ⇒ m∡BAC=37°
- I : Incentro
  ⇒ m∡BAI = m∡IAC = 37°/2
- ◺ATI : Notable de 37°/2 ⇒ AT = 9

∴ **x = 5**

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 35



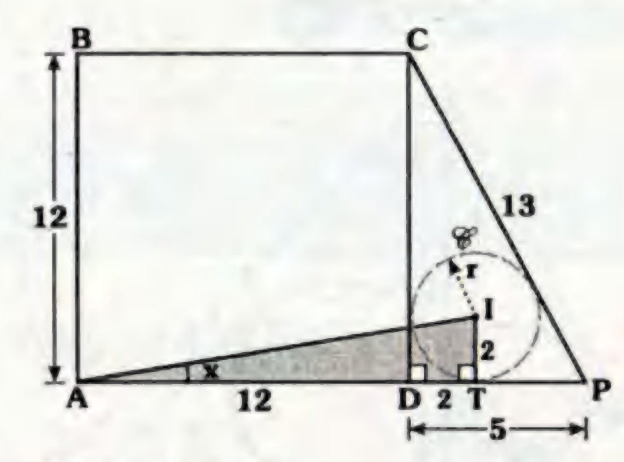

- Por el teorema 9.6: OM = ℓ
- Por el teorema 9.4: AM = MC = 2ℓ
- ◺OMP : Notable: MP=4(OM)

∴ **x = 14**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 36

- ◺CDP : $(CD)^2 = 13^2 - 5^2$
  ⇒ CD = 12
- ◺CDP : Teorema de Poncelet
  ⇒ 5+12=13+2r ⇒ r=2

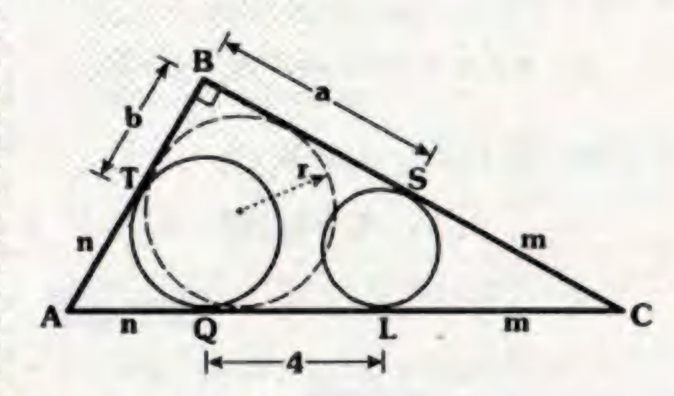



- Por teorema :
  DT=TI=2
- ◺ATI : Notable : AT=7(IT)

∴ **x=8°**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 37

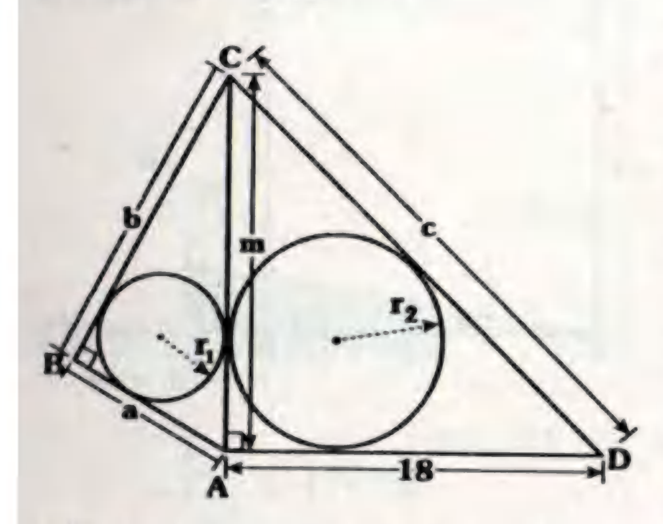



- Por teorema:
  AT=AQ=n y CS=CL=m
- ◺ABC : Teorema de Poncelet
  ⇒ b+~~n~~+a+~~m~~=~~m~~+~~n~~+4+2r
- Pero : a + b = 10 (dato)
  ⇒ 10 = 4+2r

∴ **r = 3**

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 38




- $\triangle$ABC : Teorema de Poncelet :

$$a+b=m+2r_1 \quad \dots (I)$$

- $\triangle$CAD : Teorema de Poncelet :

$$m+18=c+2r_2 \quad \dots (II)$$

- (I) + (II) :

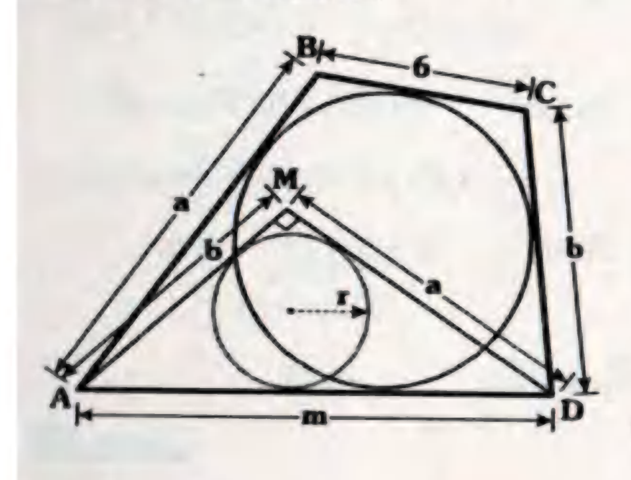
$$a+b+\cancel{m}+18=\cancel{m}+2r_1+c+2r_2$$

- Pero del dato : $a+b=c$

$$\therefore \ r_1+r_2=9$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 39




- $\square$ABCD : Teorema de Pitot

$$\Rightarrow a+b=6+m \quad \dots (I)$$

- $\triangle$AMD: Teorema de Poncelet

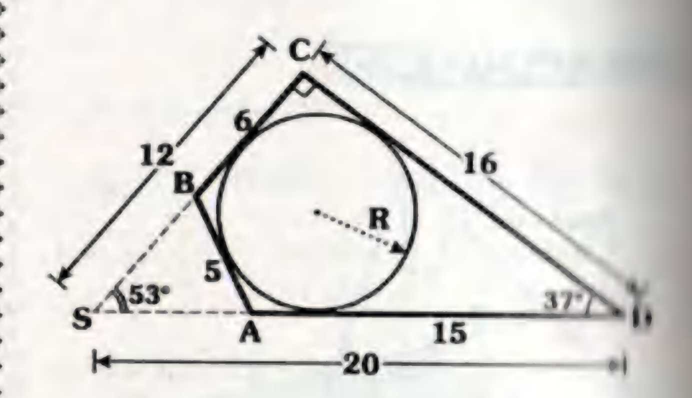
$$\Rightarrow a+b=m+2r \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II) : $6+m=m+2r$

$$\therefore \ r=3$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 40




- $\square$ABCD : Teorema de pitot

$$\Rightarrow CD+5=6+15$$

$$\Rightarrow CD=16$$

- Prolongamos $\overline{CB}$ y $\overline{CA}$ hasta que se corten en "S".

- $\triangle$SCD : es notable de 37° y 53°

$$\Rightarrow SC=12 \ \text{ y } \ SD=20$$

- $\triangle$SCD : Teorema de Poncelet

$$\Rightarrow 12+16=20+2R$$

$$\therefore \ R=4$$

**Clave B**

# Solucionario

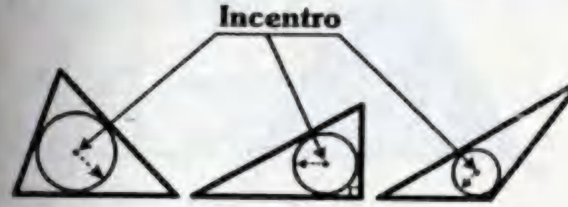
## Ciclo Cepre-Uni

## RESOLUCIÓN N° 41

**I.** Proposición Falsa

Por teorema el baricentro de un triángulo es el baricentro de su respectivo triángulo mediano. (Ver teorema 11.2).

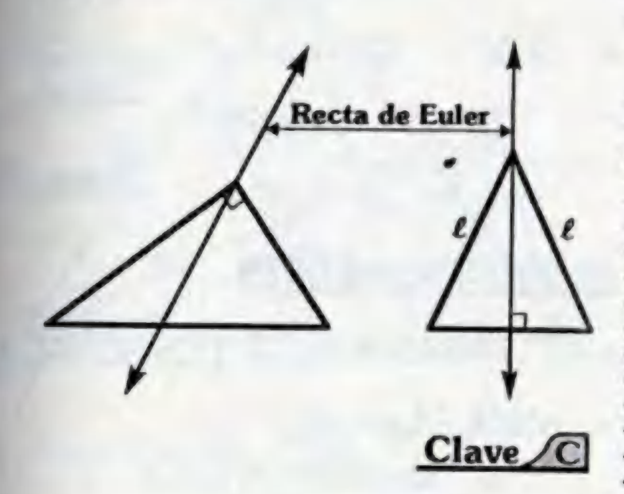
**II.** Proposición Verdadera




Se nota que el incentro siempre es un punto interior al triángulo.

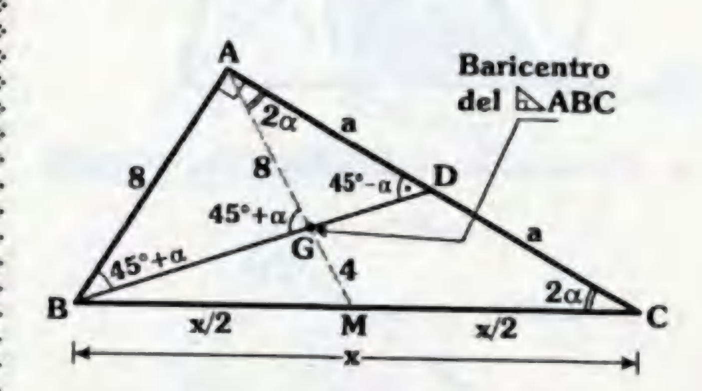
**III.** Proposición Falsa

La recta de Euler pasa por un vértice en los triángulos isósceles y rectángulo.




**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 42




- Trazamos la mediana AM.
- ◺: BM=MC=AM=x/2
- $\Delta$AMC : Isósceles

  $\Rightarrow m\measuredangle MAC=2\alpha$
- Se observa :

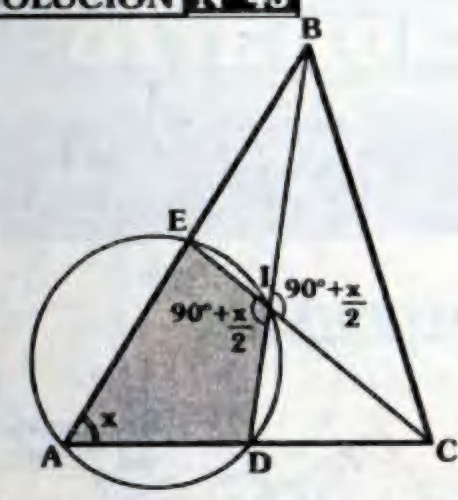
  $m\measuredangle AGB = 2\alpha + 45° - \alpha = 45° + \alpha$
- $\Delta$ABG : Isósceles $\Rightarrow$ AG=8
- G : Baricentro del ◺ABC

  $\Rightarrow GM=\dfrac{8}{2}=4$
- Pero : $\dfrac{x}{2}=12$

  $\therefore$ **x = 24**

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 43




Por teorema fundamental del incentro:

$$m\measuredangle BIC = 90° + \frac{x}{2}$$

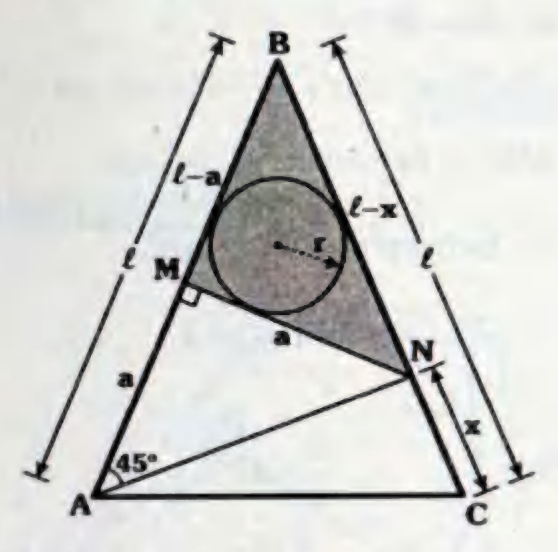
⏢AEID : Inscrito

$$\Rightarrow \quad x + 90° + \frac{x}{2} = 180°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 60°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 44




◺AMN : Notable de 45°

$$\Rightarrow \quad AM = MN = a$$

- Por diferencia :

$$BN = \ell - x \quad y \quad BM = \ell - a$$

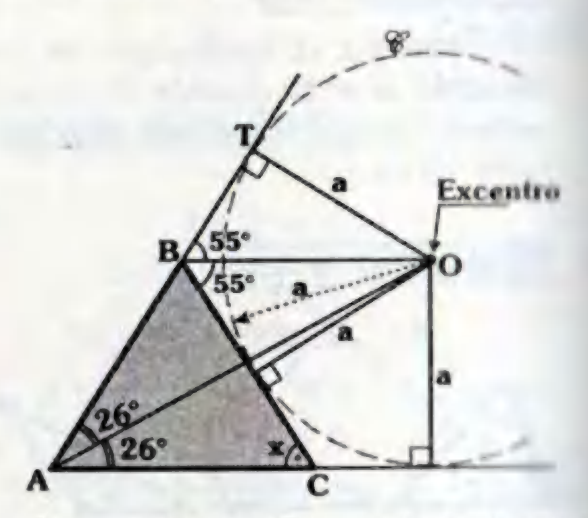
- ◺BMN : Teorema de Poncelet

$$\Rightarrow \quad \ell - a + a = \ell - x + 2r$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 2r}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 45




- Con centro en O y radio "a", trazamos la circunferencia 𝒞.
- Notamos que O es excentro, se cumple :

$$m\measuredangle CAO = m\measuredangle BAO = 26° \quad y$$

$$m\measuredangle TBO = m\measuredangle OBC = 55°$$

- ΔABC : $52° + x = 110°$

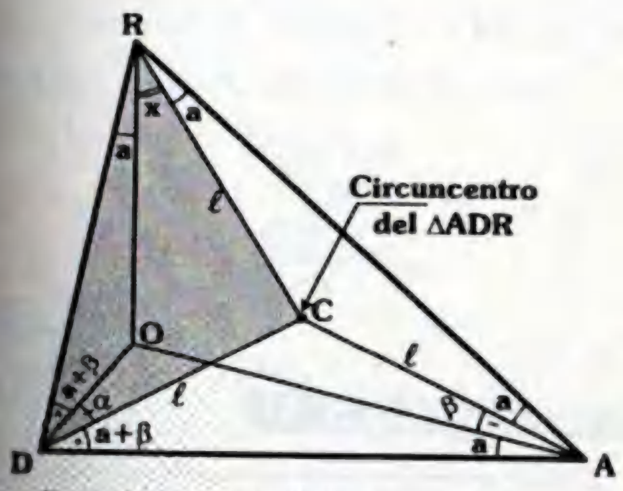
$$\therefore \quad \mathbf{x = 58°}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 46

- C : Circuncentro $\Rightarrow$ DC=RC=AC=ℓ
- ΔRCA : Isósceles

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle CRA = m\measuredangle CAR = a$$




- Por el teorema 9.4 :

$m\measuredangle ORD = a$ y $m\measuredangle OAD = a$

- $\Delta DCA$ : Isósceles

$\Rightarrow \quad m\measuredangle CDA = a + \beta$

- Por el teorema 9.4: $m\measuredangle RDO = a + \beta$

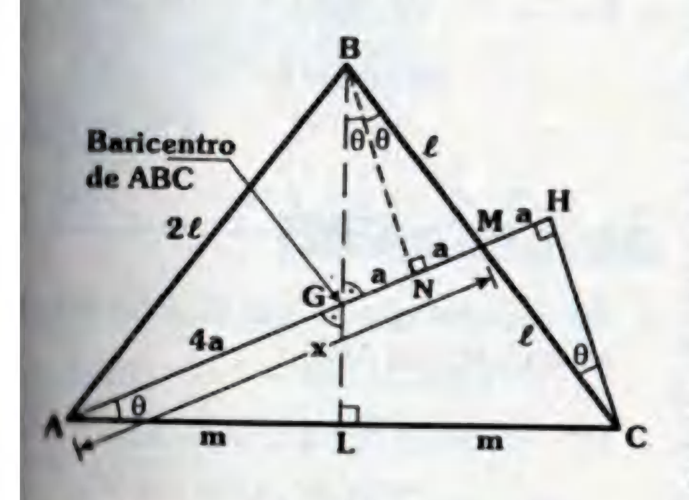
- $\Delta CDR$ : Isósceles

$\Rightarrow \quad a + x = a + \underbrace{\beta + \alpha}_{38^\circ}$

$\therefore \quad \mathbf{x = 38^\circ}$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 47




- Trazamos $\overline{BN} \perp \overline{AM}$

- $\Delta BNM \cong \Delta MHC$ (ALA)

$\Rightarrow \quad MN = a$ y $m\measuredangle MBN = \theta$

- Se observa que $\overline{BN}$ es altura y bisectriz

$\Rightarrow \quad GN = NM = a$

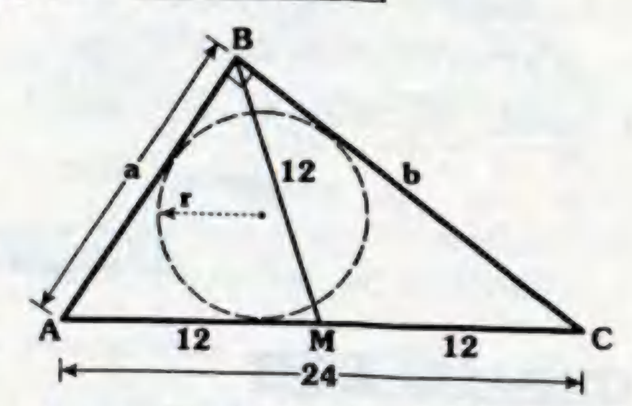
- G : Baricentro de ABC

$\Rightarrow \quad AG = 2(2a) = 4a$

$\therefore \quad \mathbf{x = 6a}$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 48




- Sabemos que la mediana de menor longitud es la mediana relativa a la hipotenusa.

- △: $AM = MC = 12 \Rightarrow AC = 24$

- ◺ABC : Teorema de Poncelet

$\Rightarrow \quad \underbrace{a + b}_{32\ (\text{dato})} = 24 + 2r$

$\therefore \quad \mathbf{r = 4}$

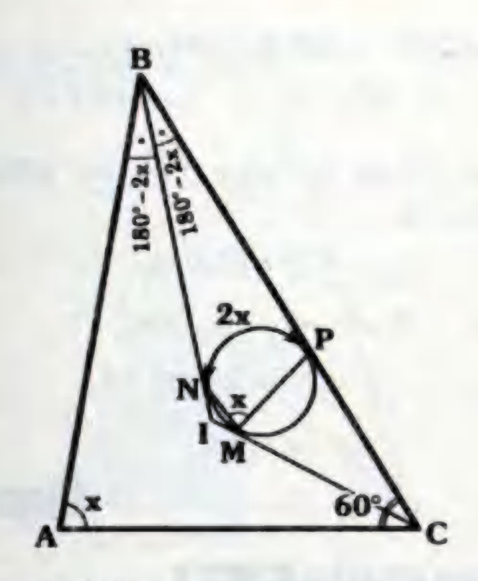
**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 49

- Por ángulo inscrito : $m\widehat{NP} = 2x$

- $m\measuredangle NBP + 2x = 180^\circ$ (teorema de circunferencia)

$\Rightarrow \quad m\measuredangle NBP = 180^\circ - 2x$




- I : Incentro

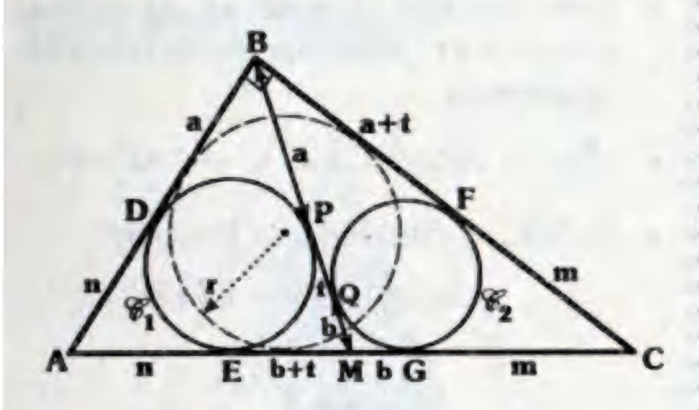
 $\Rightarrow m\measuredangle ABI = m\measuredangle CBI = 180° - 2x$

- $\Delta ABC: \; x + 360° - 4x + 60° = 180°$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 80°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 50




- Por tangentes :

 En $\mathscr{C}_1$: BD=a , AD=AE=n y MP=ME=b+t

 En $\mathscr{C}_2$: BF=a+t , MG=b y CF=CG=m

- $\triangle$ABC : Teorema de Poncelet

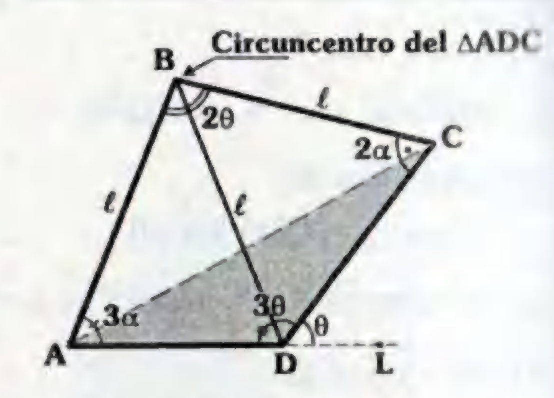
 $\Rightarrow a + \cancel{n} + a + \cancel{t} + \cancel{m} = \cancel{n} + b + \cancel{t} + \cancel{m} + 2r$

$$\underbrace{2(a-b)}_{\ell} = 2r$$

$$\therefore \quad \mathbf{r = \ell}$$

**Clave ...**

## RESOLUCIÓN N° 51




- Como $AB = BD = BC = \ell$ :

 $\Rightarrow$ B: Circuncentro de ADC

- Por teorema fundamental :

$$m\measuredangle CDL = \frac{2\theta}{2} = \theta$$

- En "D" : $3\theta + \theta = 180° \;\; \Rightarrow \;\; \theta = 45°$

$$\therefore \quad \mathbf{3\theta - 2\theta = 45°}$$

**Clave C**

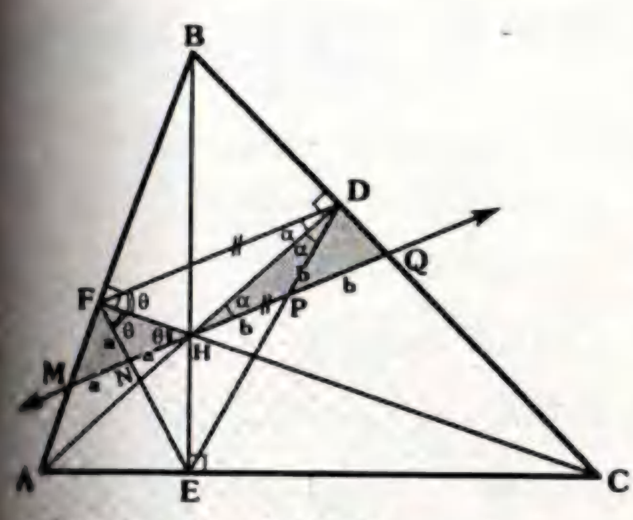
## RESOLUCIÓN N° 52

- Se observa que el $\Delta EFD$ es el triángulo órtico de ABC.

- H : Incentro del $\Delta EFD$ (Teorema 11.6)

 $\Rightarrow m\measuredangle DFH = m\measuredangle EFH = \theta$ y

 $m\measuredangle FDH = m\measuredangle EDH = \alpha$




- Por ángulos alternos :

  $m\measuredangle FHM = \theta$ y $m\measuredangle DHQ = \alpha$

- Por el teorema:

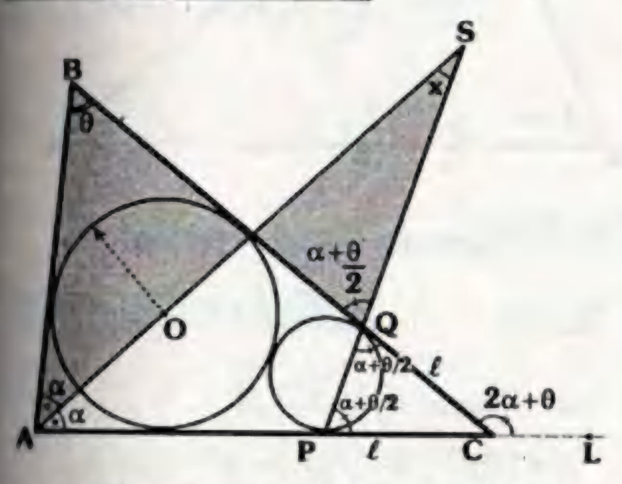
  $\Delta FMH$ : $MN=NH=a$

  $\Delta HDQ$ : $HP=PQ=b$

  $\therefore$ $\mathbf{MQ = 2(a+b)}$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 53




- Se sabe : $m\measuredangle BAO = m\measuredangle CAO = \alpha$
- $\Delta ABC$ : Por ángulo exterior

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle BCL = 2\alpha+\theta$

- $\Delta PQC$ : Isósceles

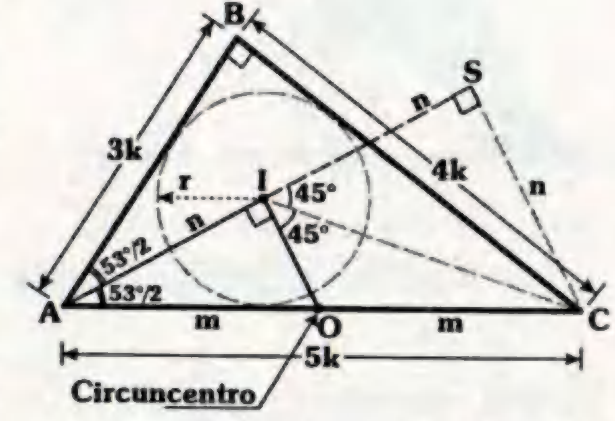
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle PQC = m\measuredangle QPC = \alpha + \frac{\theta}{2}$

- ⋈: $\alpha+\theta = x+\alpha+\frac{\theta}{2}$

  $\therefore$ $\mathbf{x = \frac{\theta}{2}}$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 54




- Sabemos que el punto medio O de $\overline{AC}$ es el circuncentro del ◺ABC.
- Por teorema fundamental :

  $m\measuredangle AIC = 90° + \frac{90°}{2}$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle OIC = 45°$

- Luego prolongamos $\overline{AI}$ hasta S, tal que: $m\measuredangle ISC = 90°$
- $\overline{OI}$ : Base media del ◺ASC

  $\Rightarrow$ $AI = IS = n$

- ◺ISC : Notable $\Rightarrow$ $IS = SC = n$
- ◺ASC : Notable $\Rightarrow$ $m\measuredangle SAC = \frac{53°}{2}$
- ◺ABC : Notable

  $\Rightarrow$ $AB = 3k$ , $BC=4k$ y $AC=5k$

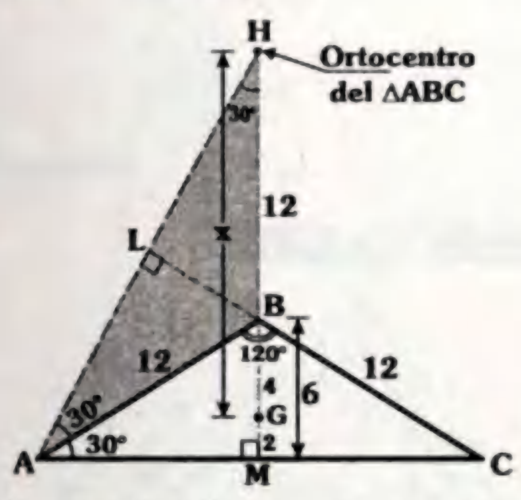
- Teorema de Poncelet :

  $3k+4k = 5k+2r$ $\Rightarrow$ $k=r$

  $\therefore$ **Perím.** $_{◺ABC}$ $\mathbf{= 12r}$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 55




Como el triángulo es isósceles

$\Rightarrow$ H, B y G son colineales, además $\overline{HG} \perp \overline{AC}$.

◺ABM : Notable $\Rightarrow$ BM=6

G : Baricentro $\Rightarrow$ BG = 2(GM) = 4

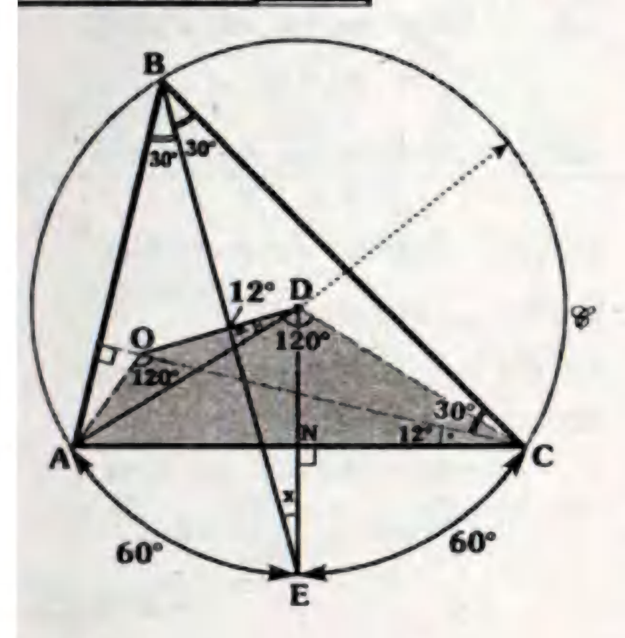
H : Ortocentro $\Rightarrow$ $\overline{AL}$ es altura

ΔABH: Isósceles $\Rightarrow$ BH=12

$\therefore$ **x = 16**

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 56




- Sabemos :

$$m\widehat{AE} = m\widehat{EC} = 60°$$

- Por teoremas fundamentales :

$$m\measuredangle AOC = 180° - 60° = 120° \quad y$$

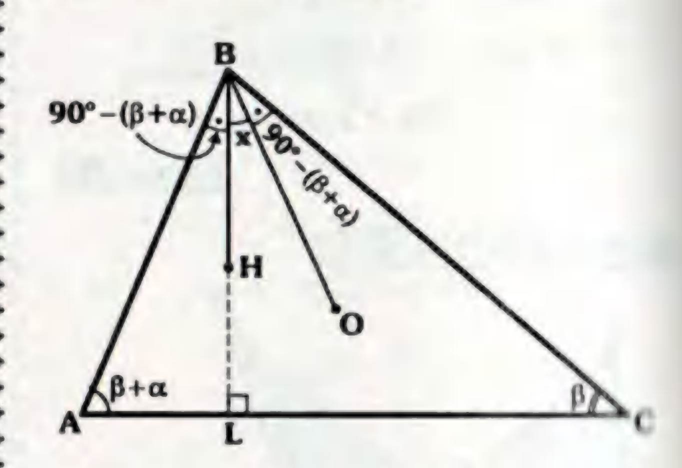
$$m\measuredangle ADC = 2(60°) = 120°$$

- ⏢AODC:Inscriptible $\Rightarrow$ m∡OCA = 12°
- ◺BLC : m∡BCL = 30°
- ⊳BCNE : 30°+42°+x = 90°

$\therefore$ **x = 18°**

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 57




- H: Ortocentro $\Rightarrow$ $\overline{BL}$ es altura.
- ◺ALB : m∡ABL = 90° − (β + α)
- Por el teorema 9.1:

$$m\measuredangle OBC = m\measuredangle ABL = 90° - (\beta + \alpha)$$

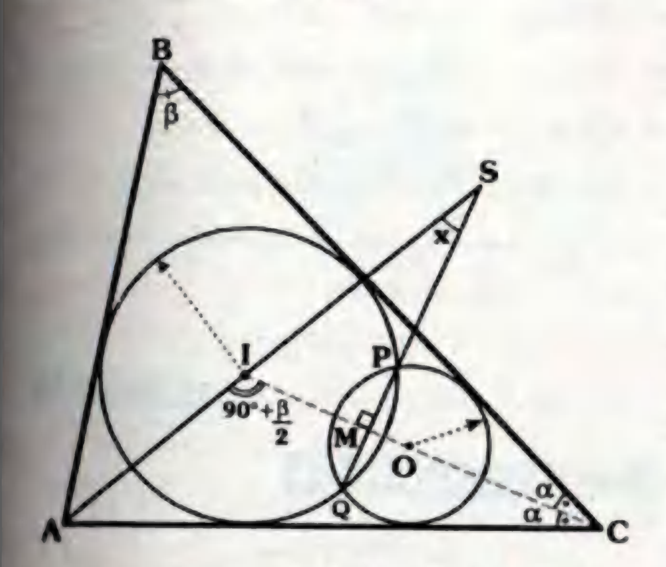
- ◺BLC:

$$x + 90° - (\beta + \alpha) + \beta = 90°$$

$\therefore$ **x = α**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 58




- Del gráfico : $m\measuredangle BCI = m\measuredangle ACI = \alpha$
- $m\measuredangle AIC = 90° + \dfrac{\beta}{2}$ *(teorema fundamental)*
- Por teorema de circunferencia :

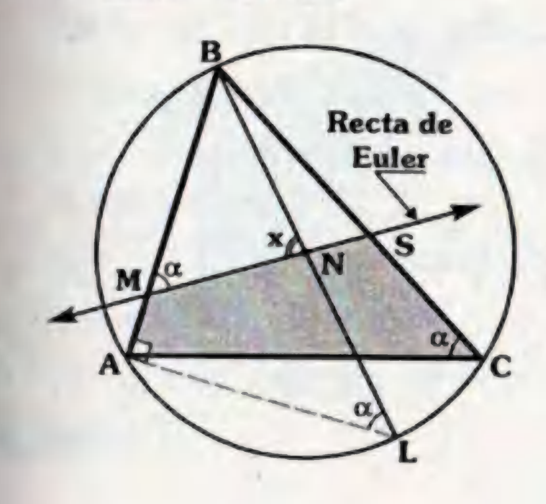
  $\overline{PQ} \perp \overline{OI}$

- $\triangle$SMI : $90° + \dfrac{\beta}{2} = 90° + x$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{\beta}{2}}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 59




- $\overline{BL}$ : Diámetro $\Rightarrow m\measuredangle BAL = 90°$
- ⌂AMSC: Inscriptible

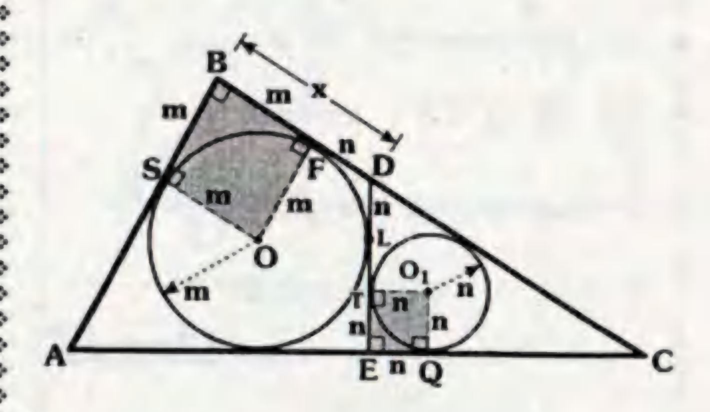
  $\Rightarrow m\measuredangle SCA = m\measuredangle SMB = \alpha$

- Por ángulo inscrito $\Rightarrow m\measuredangle BLA = \alpha$
- ⌂AMNL : Inscriptible

$$\therefore \quad \mathbf{x = 90°}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 60




- OSBF y $O_1$TEQ : Cuadrados

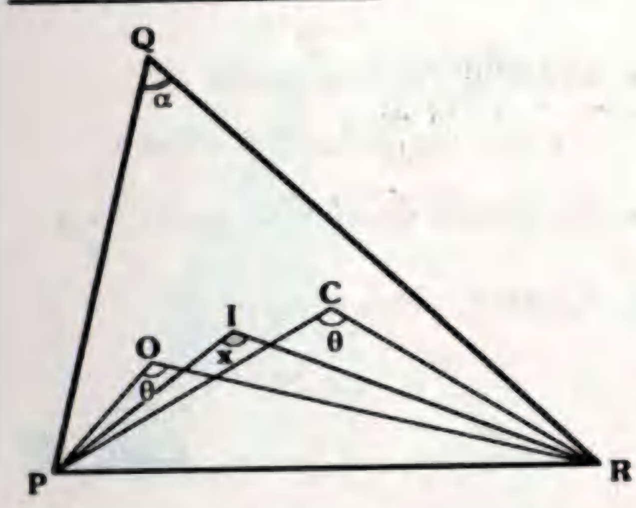
  $\Rightarrow BF = m \;\; y \;\; TE = n$

- Por teorema : $DL = TE = n$
- $DF = DL = n$
- Se observa : $x = m + n$
- Por dato : $m + n = 10$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 10}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 61




- O : Ortocentro

  $\Rightarrow \quad \theta + \alpha = 180°$ ... (I)

- C : Circuncentro $\Rightarrow \theta = 2\alpha$ ... (II)

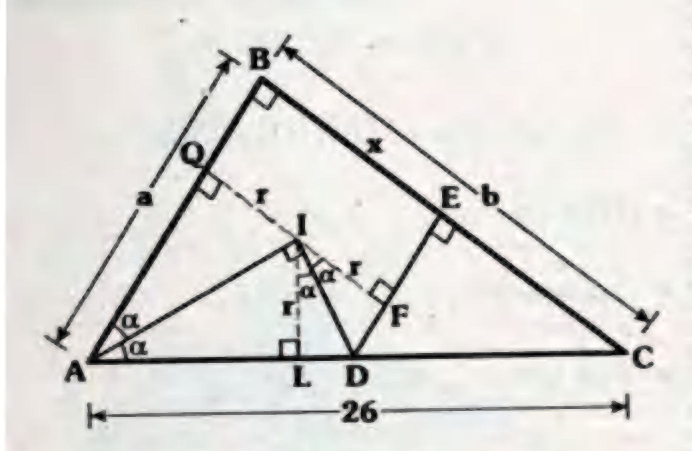
- De (I) y (II) : $\alpha = 60°$

- I : Incentro $\Rightarrow \quad x = 90° + \dfrac{60°}{2}$

  $\therefore \quad \mathbf{x = 120°}$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 62




- Como I es incentro, entonces :
  $m\measuredangle BAI = m\measuredangle CAI = \alpha$ e $IL = IQ = r$ (inradio)

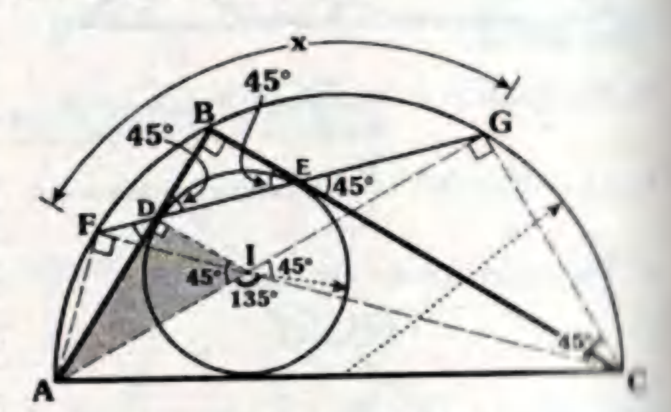
- ⊿AID : $m\measuredangle LID = \alpha$
- ⊿AQI : $m\measuredangle AIF = 90° + \alpha$
- ID : Bisectriz del $\measuredangle LIF \Rightarrow IF = r$
- QBEF : Rectángulo $\Rightarrow x = 2r$
- ⊿ABC : Teorema de poncelet

  $\Rightarrow \underbrace{a + b}_{34 \text{ (dato)}} = 26 + 2r$

  $\therefore \quad \mathbf{x = 8}$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 63




- Sea I : Incentro de ABC.
- Por teorema : $m\measuredangle AIC = 90° + \dfrac{90°}{2}$

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle AIC = 135°$

- △AFDI : inscriptible

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle FDA = m\measuredangle FIA = 45°$

- Como $\quad m\measuredangle FIA + m\measuredangle AIC = 180°$

  $\Rightarrow$ F, I y C son colineales

- En forma análoga :

  $\Rightarrow$ A, I y G son colineales

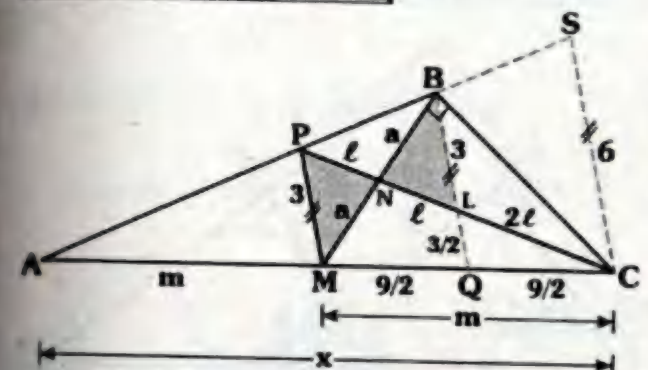
- Por ángulo inscrito :

  $m\widehat{FG} = 2(m\measuredangle FCG)$

  $\therefore \quad \mathbf{x = 90°}$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 64




- Prolongamos $\overline{AB}$ hasta S, tal que $\overline{CS} // \overline{MP}$.
- $\overline{PM}$ :Base media de $\Delta ASC \Rightarrow SC = 6$
- Trazamos $\overline{BL} // \overline{PM}$
- $\Delta MNP \cong \Delta BNL$ (ALA)

  $\Rightarrow PN = NL = \ell$ y $BL = 3$
- $\overline{BL}$ : Base media de PSC

  $\Rightarrow PL = LC = 2\ell$
- L : Baricentro de MBC

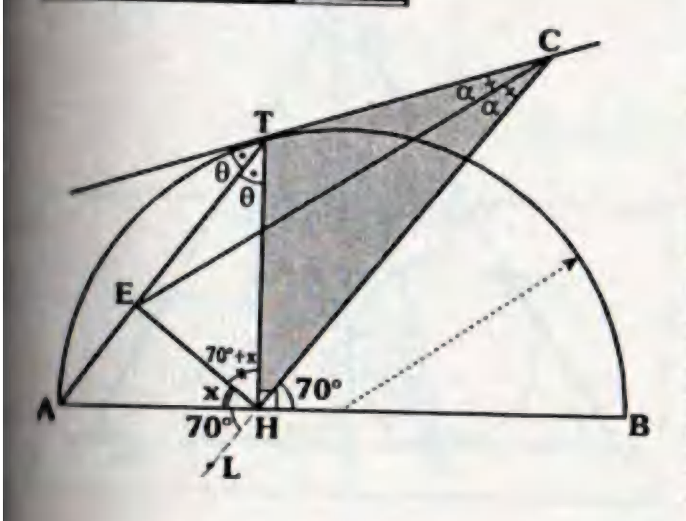
  $\Rightarrow LQ = 3/2$ y

  $MQ = QC = 9/2$ (△)

$\therefore$ **x = 18**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 65



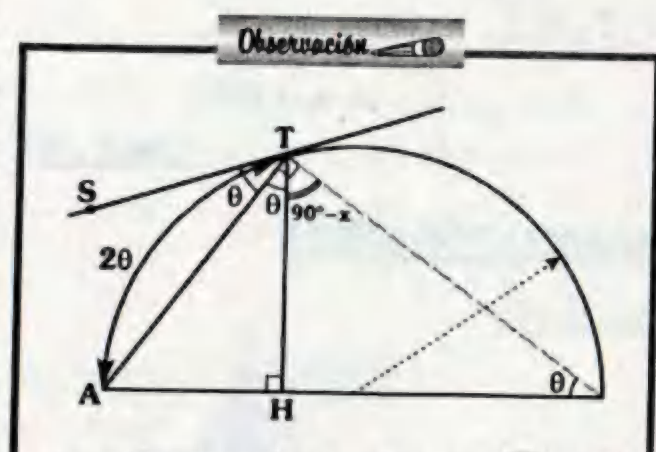

- De la observación $\overline{TA}$ es bisectriz exterior de $\Delta TCH$.
- E : Excentro del $\Delta TCH$

  $\Rightarrow \overline{HE}$ : Bisectriz exterior
- $m\measuredangle LHE = m\measuredangle THE = 70° + x$
- $x + 70° + x = 90°$

$\therefore$ **x = 10°**

**Clave B**

**Observación**

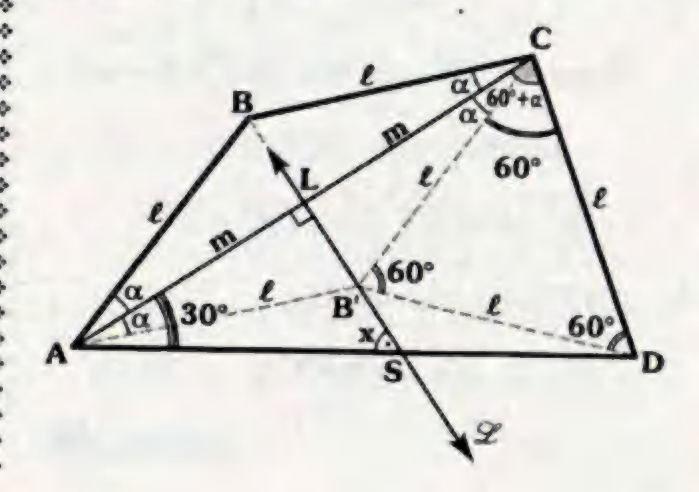



- *Por ángulo inscrito* : $m\overset{\frown}{AT} = 2\theta$
- *Por ángulo semiinscrito* :

  $m\measuredangle STA = \theta$

$\therefore$ **$m\measuredangle STA = m\measuredangle ATH = \theta$**

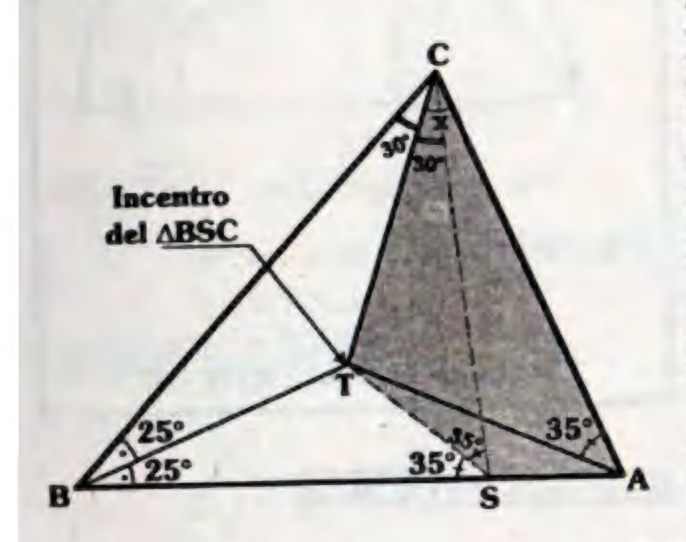
## RESOLUCIÓN N° 66



- Se ubica B' en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, tal que $m\measuredangle ACB' = \alpha$
- $\Delta ABC \cong \Delta AB'C \Rightarrow AB' = B'C = \ell$
- $\Delta CB'D$ : Equilátero
  $\Rightarrow m\measuredangle CB'D = 60^\circ$ y $B'D = \ell$
- B': Circuncentro de ACD
  $$\Rightarrow m\measuredangle CAD = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$
- $\triangle ALS$ : $30^\circ + x = 90^\circ$
  $$\therefore \ \mathbf{x = 60^\circ}$$

**Clave C**

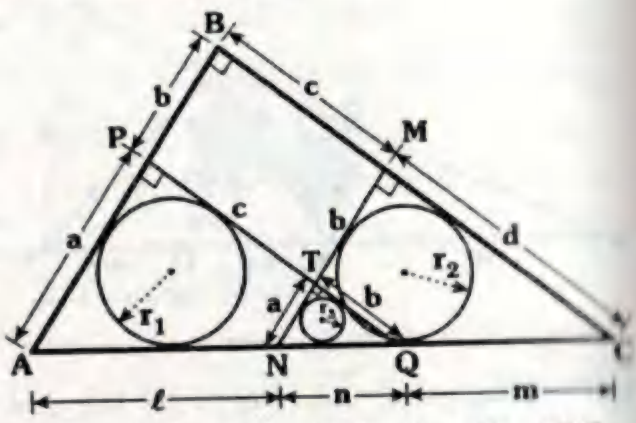
## RESOLUCIÓN N° 67




- Trazamos $\overline{CS}$, tal que $m\measuredangle TCS = 30^\circ$
- T: Incentro de BCS
  $\Rightarrow m\measuredangle CST = m\measuredangle TSB = 35^\circ$
- ⏢CTSA : Inscriptible
  $$\therefore \ \mathbf{x = 35^\circ}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 68




- Sea "x" inradio del triángulo ABC.
- Por el teorema de Poncelet

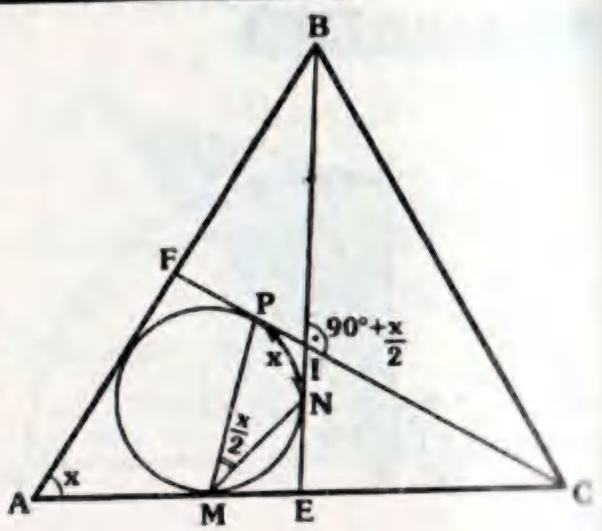
$\triangle APQ$: $a + c + \ell = \ell + n + 2r_1$
$\triangle NMC$: $a + b + d = m + n + 2r_2$
$\triangle TNQ$: $n + 2r_3 = a + \ell$ (+)

$a + b + c + d = 2r_1 + 2r_2 - 2r_3 + m + n + \ell$ ... (I)

- En $\triangle ABC$: Por t. de Poncelet.
  $a + b + c + d = \ell + n + m + 2x$ ... (II)
- Reemplazando (II) en (I) :
  $\ell + m + n + 2x = 2r_1 + 2r_2 - 2r_3 + m + n + \ell$
  $$\therefore \ \mathbf{x = r_1 + r_2 - r_3}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 69



- Por teorema fundamental de incentro:

$$m\measuredangle BIC = 90° + \frac{x}{2}$$

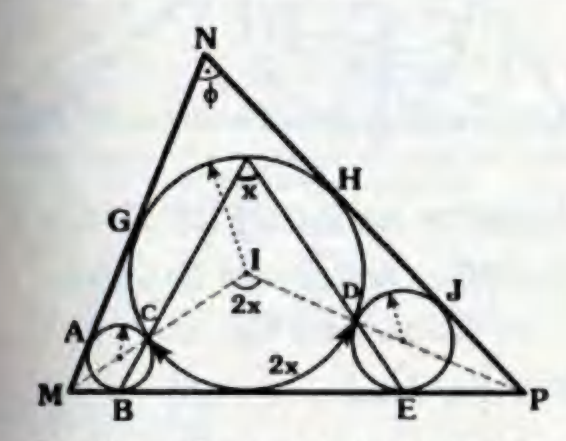
- $m\widehat{NP} = x$ *(ángulo inscrito)*.

- Por teorema: $x + 90° + \frac{x}{2} = 180°$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 60°}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 70



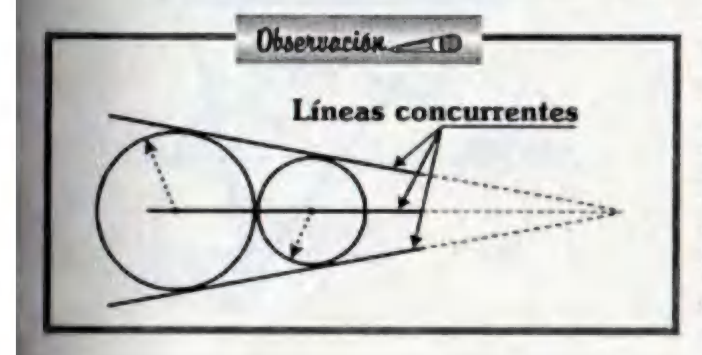

- Se ubica el incentro I del $\Delta ABC$.
- De la observación :

  M, C e I son colineales lo mismo que P, D e I.
- Por ángulo central : $m\measuredangle CID = 2x$
- Por teorema fundamental : $2x = 90° + \frac{\phi}{2}$

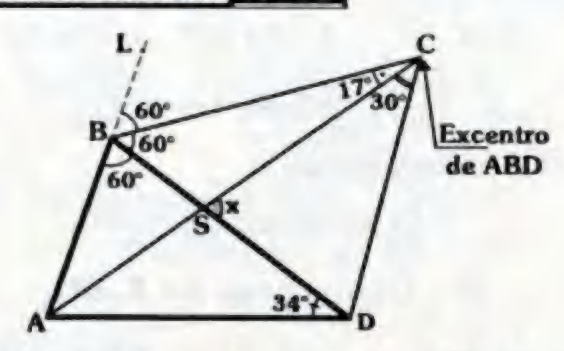
$$\therefore \quad \mathbf{x = 45° + \frac{\phi}{4}}$$

**Clave C**

**Observación**




## RESOLUCIÓN N° 71




- Como : $m\measuredangle BDA = 2(m\measuredangle BCA)$ y

  $m\measuredangle ABD = 2(m\measuredangle ACD)$,

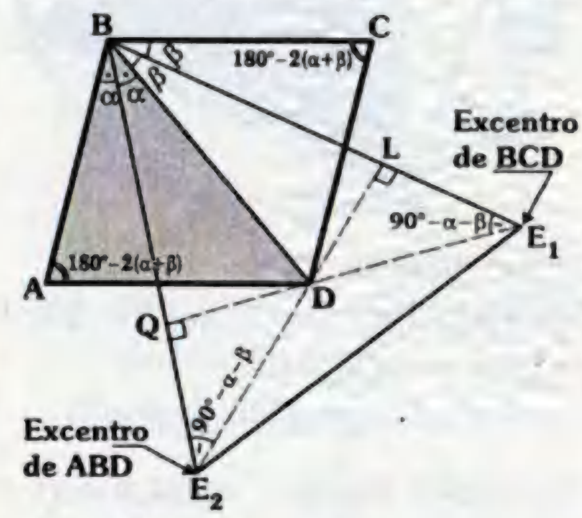
  por el criterio $\Rightarrow$ C : Excentro de ABD
- $\overline{BC}$ : Bisectriz exterior de ABD

  $\Rightarrow m\measuredangle LBC = m\measuredangle CBD = 60°$
- $\Delta BSC$: $x = 60° + 17°$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 77°}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 72




- Por definición :

  $m\measuredangle ABE_2 = m\measuredangle DBE_2 = \alpha$ y

  $m\measuredangle CBE_1 = m\measuredangle E_1BD = \beta$
- $\overline{BC} // \overline{AD} \Rightarrow m\measuredangle BAD = 180° - 2(\alpha + \beta)$
- $\Delta ABC$: Teorema fundamental

$$\Rightarrow m\measuredangle BE_2D = \frac{180° - 2(\alpha + \beta)}{2} = 90° - \alpha - \beta$$

- $\Delta BLE_2$ :

$m\measuredangle E_2LE_1 = \alpha + \beta + 90° - \alpha - \beta = 90°$

$\Rightarrow$ $\overline{E_2L}$ : Altura del $\Delta E_1BE_2$

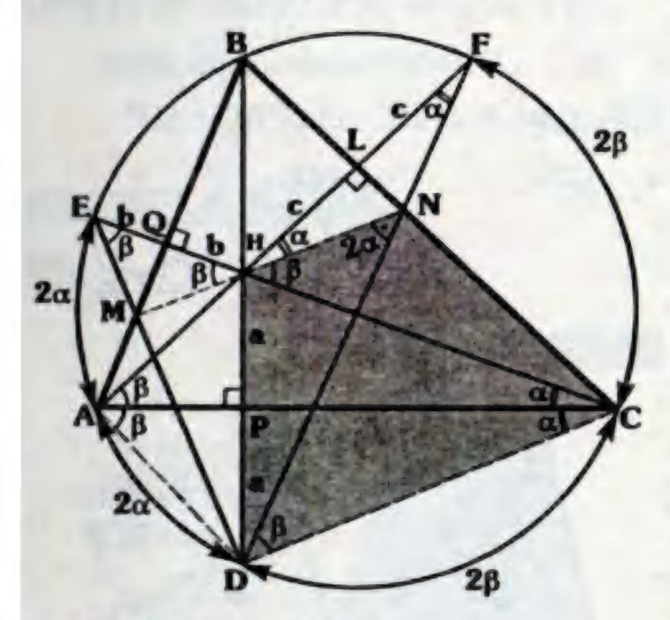
- Del mismo modo :

$\overline{E_1Q}$ es altura de $E_1BE_2$

$\therefore$ **D : Ortocentro de $E_1BE_2$**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 73




- Por el teorema 9.5:
HL=LF=c ; HP=PD=a y QH=QE=b
- $\Delta HFN$ : Isósceles

$\Rightarrow$ $m\measuredangle FHN = m\measuredangle HFN = \alpha$

- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle ACD = \alpha$
- $\Delta DHC$ : Isósceles $m\measuredangle PCH = \alpha$
- $\square HNCD$ : Inscriptible

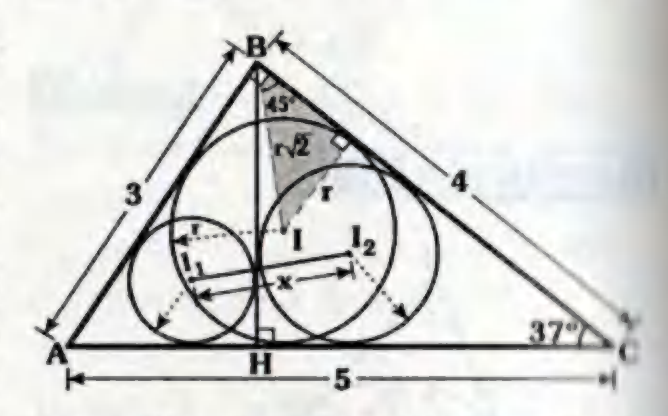
$\Rightarrow$ $m\measuredangle NHC = m\measuredangle NDC = \beta$

- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle FAC = \beta$
- $\Delta ADM$ : Isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle PAD = \beta$
- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle DEC = \beta$

- $\Delta MEH$ : Isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle EHM = \beta$
- Como $m\measuredangle EHM = m\measuredangle NHC = \beta$

$\therefore$ **M, H y N son colineales**

## RESOLUCIÓN N° 74




- $\triangle ABC$ : Notable de 37° $\Rightarrow$ AC = 5
- $\triangle ABC$ : Teorema de Poncelet

$\Rightarrow$ $3 + 4 = 5 + 2r \Rightarrow r = 1$

- Por el teorema : $x = r\sqrt{2}$

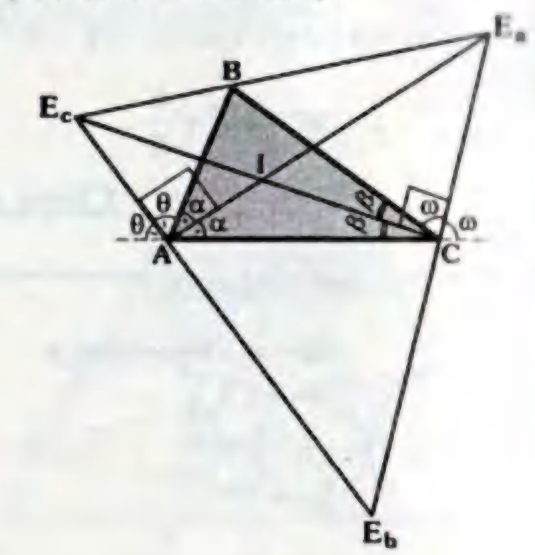
$\therefore$ $\mathbf{x = \sqrt{2}}$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 75

**I.** **Proposición** | **Verdadera**

(*Ver teorema* 11.11)

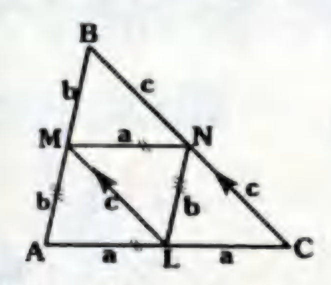


I : Incentro de ABC

$E_a$, $E_b$ y $E_c$ son excentros

$\Rightarrow$ I : Ortocentro del $\Delta E_a E_b E_c$

**II.** Proposición | Verdadera



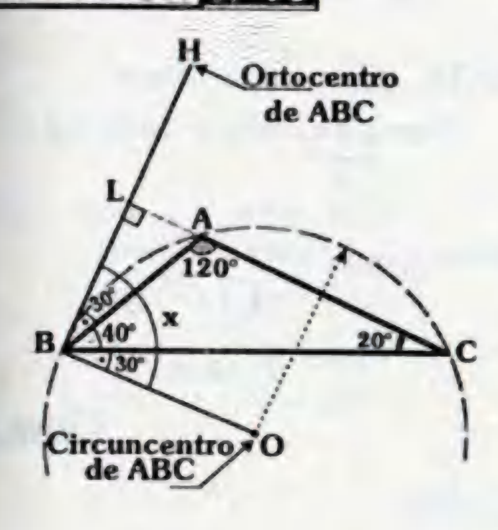

- AMNL : Paralelogramo
  $\Rightarrow$ MN=AL=a y NL=AM=b
- MNCL : Paralelogramo
  $\Rightarrow$ LC=a y NC=ML=c
- MBNL : Paralelogramo
  $\Rightarrow$ MB=b y BN=c
- Se observa M, N y L son puntos medios.

**III.** Proposición | Verdadera

Como el baricentro pertenece a la mediana por lo tanto el baricentro se encuentra en la región interior.

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 76

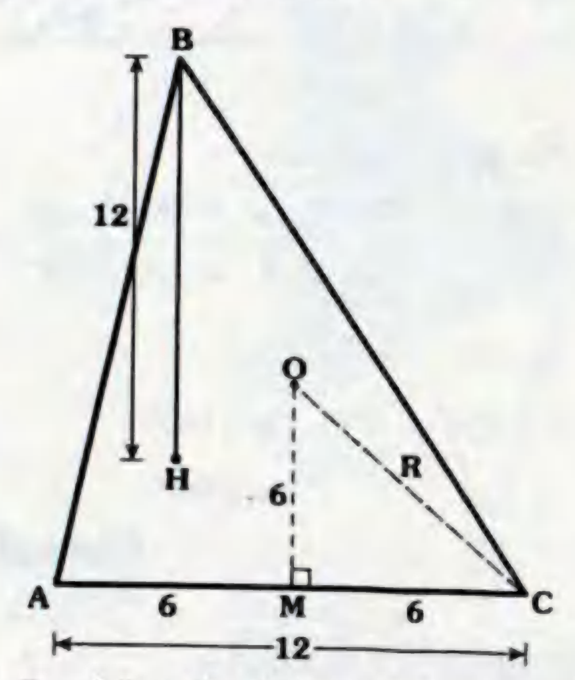



- H : ortocentro $\Rightarrow \overline{BL}$ es altura de ABC.
- ◺ABL : $120° = 90° + m\measuredangle LBA$
  $\Rightarrow m\measuredangle LBA = 30°$
- Por el teorema 9.4:
  $m\measuredangle CBO = m\measuredangle HBA = 30°$

  $\therefore$ **x = 100°**

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 77




- Sea "r" radio de la circunferencia de los 9 puntos del ΔABC ,

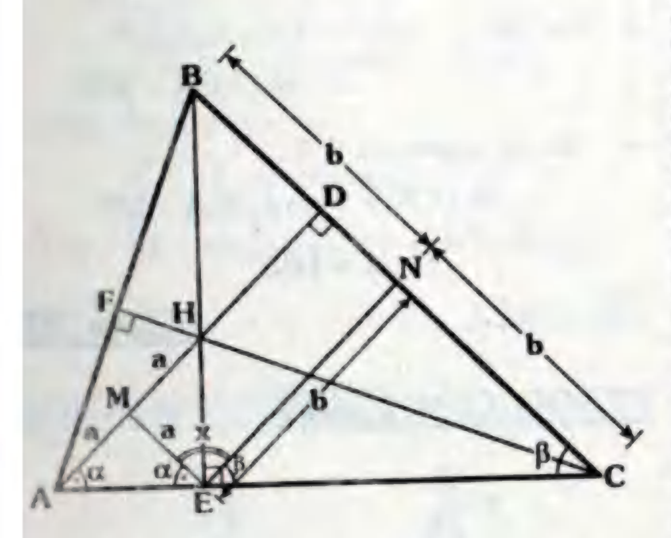
  R circunradio y O circuncentro
- Por teoema : $r = \dfrac{R}{2}$
- Por teorema 9.6 :

  $$OM = \frac{BH}{2} \Rightarrow OM=6$$
- ◺OMC : Notable $\Rightarrow R=6\sqrt{2}$

  $\therefore$ **$r = 3\sqrt{2}$**

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 78




- Por el teorema △:

  △AEH : EM=a y m∡MEA = α

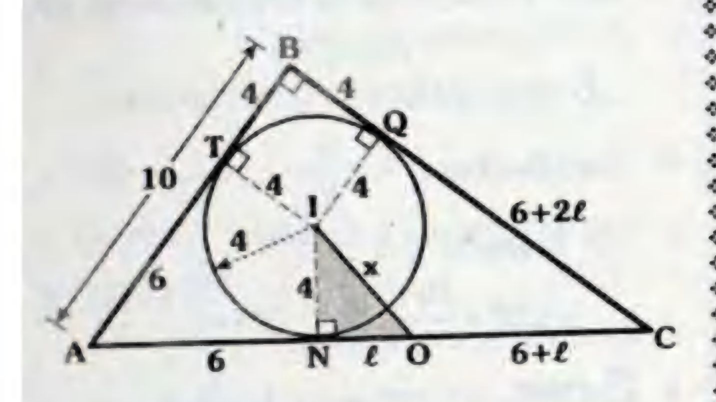
  △BEC : EN=b y m∡NEC = β

- △ADC : $\alpha+\beta=90^\circ$
- En "E" : $\alpha+x+\beta=180^\circ$

  $\therefore$ $\mathbf{x=90^\circ}$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 79




- Se observa, BTIQ : Cuadrado
- Por tangentes : AT=AN=6
- O : Circuncentro $\Rightarrow$ $AO=OC=6+\ell$
- Por tangentes : $CN=CQ=2\ell+6$
- △ABC :

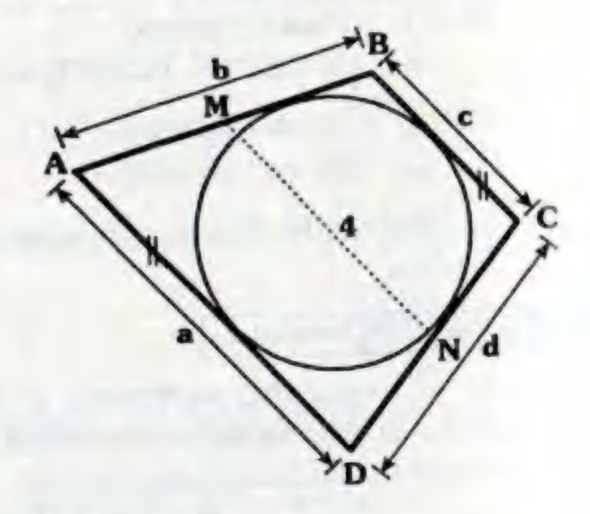
  $$10^2+(10+2\ell)^2=(12+2\ell)^2 \Rightarrow \ell=7$$

- △INO : $x^2=4^2+7^2$

  $\therefore$ $\mathbf{x=\sqrt{65}}$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 80




- $\overline{MN}$ : Base media

  $$\Rightarrow \ 4=\frac{a+c}{2} \ \Rightarrow \ a+c=8$$

- ABCD : Teorema de Pitot

  $$\Rightarrow \underbrace{a+c}_{8}=b+d \Rightarrow b+d=8$$

- $$\text{Perím.}_{\triangle ABCD}=\underbrace{a+c}_{8}+\underbrace{b+d}_{8}$$

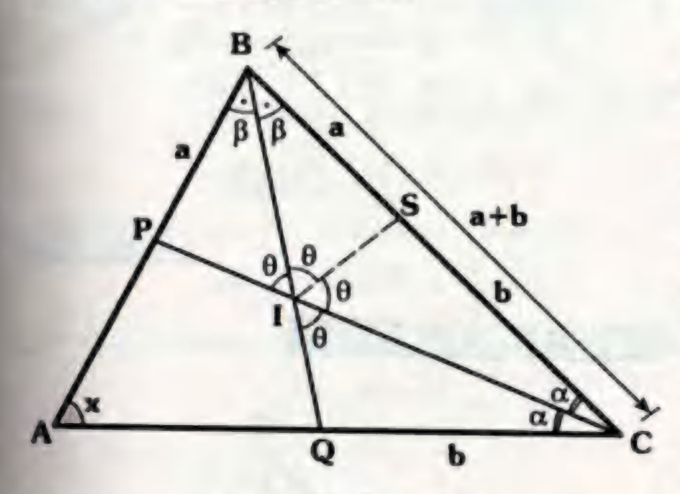
  $$\therefore \ \textbf{Perím.}_{\triangle ABCD}=\mathbf{16}$$

**Clave** [illegible]



# Solucionario Ciclo Semestral

## RESOLUCIÓN N° 81




- Ubicamos S en $\overline{BC}$, tal que :

$$SC = b \Rightarrow BS = a$$

- $\Delta IQC \cong \Delta ISC$ (LAL)

$$\Rightarrow m\measuredangle QIC = m\measuredangle SIC = \theta$$

- $\Delta PBI \cong \Delta BSI$ (LAL)

$$\Rightarrow m\measuredangle BIP = m\measuredangle BIS = \theta$$

- En "I" :

$$\theta + \theta + \theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

- Por teorema fundamental :

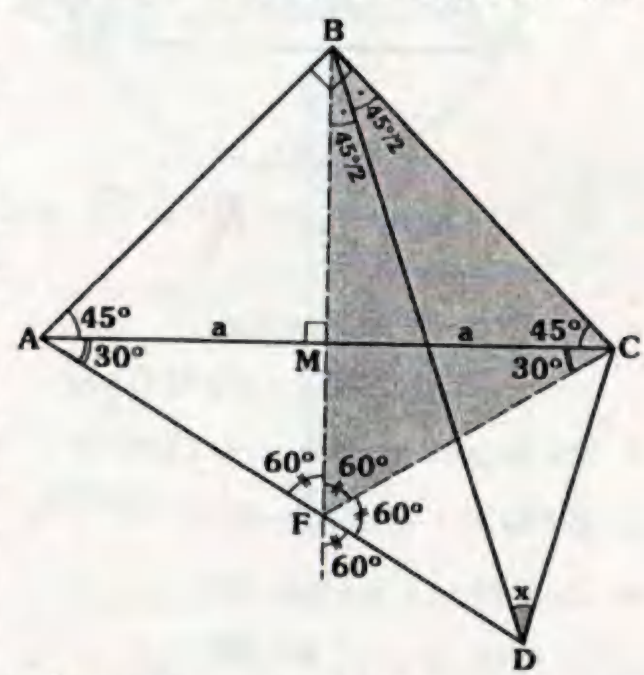
$$m\measuredangle BIC = 120^\circ = 90^\circ + \frac{x}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 60^\circ}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 82

- Ubicamos F en $\overline{AD}$, tal que $\overline{BF} \perp \overline{AC}$.



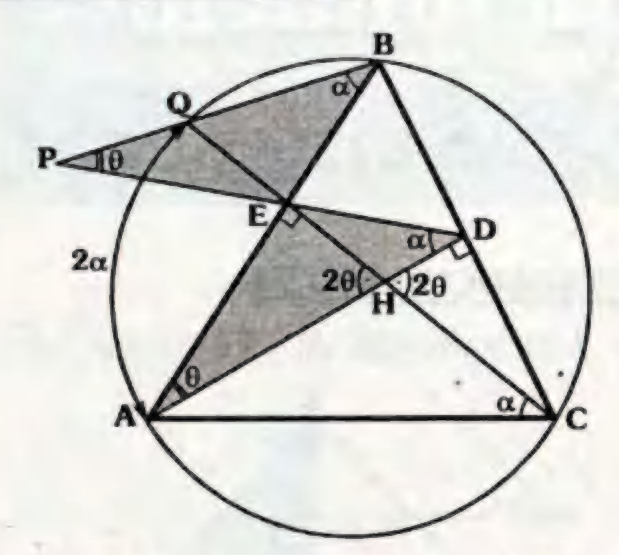

- $\triangle ABC$ : AM=MC=a
- $\Delta AFC$ : $\overline{FM}$ es altura y mediana $\Rightarrow$ $\overline{FM}$ es bisectriz.
- $\Delta BFC$ : $\overline{BD}$ es bisectriz interior y $\overline{FD}$ es bisectriz exterior.
- D : Excentro del $\Delta BFC$.
- Finalmente por teorema fundamental de excentro :

$$x = \frac{60^\circ}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 30^\circ}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 83

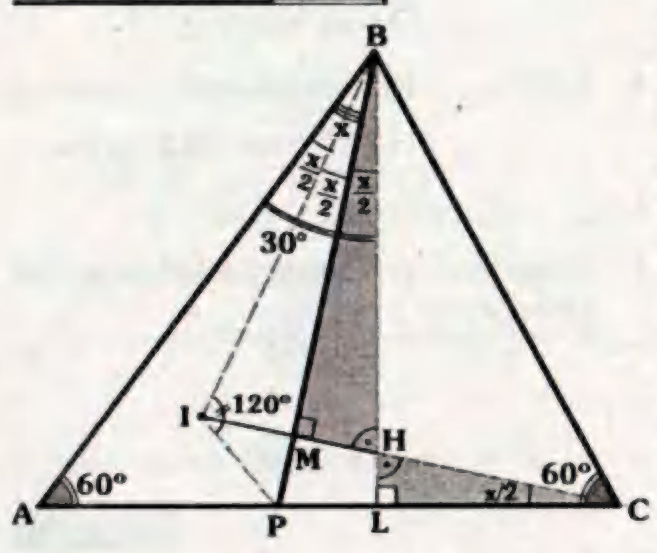



- H : Ortocentro $\Rightarrow$ $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ son alturas.
- ⌂AEDC : Inscriptible
  $\Rightarrow m\measuredangle ACE = m\measuredangle ADE = \alpha$
- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle QBA = \alpha$
- ⧖PBDA : $m\measuredangle EAD = \theta$
- ◺AEH: $\theta + 2\theta = 90°$

$\therefore\ \boldsymbol{\theta = 30°}$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 84

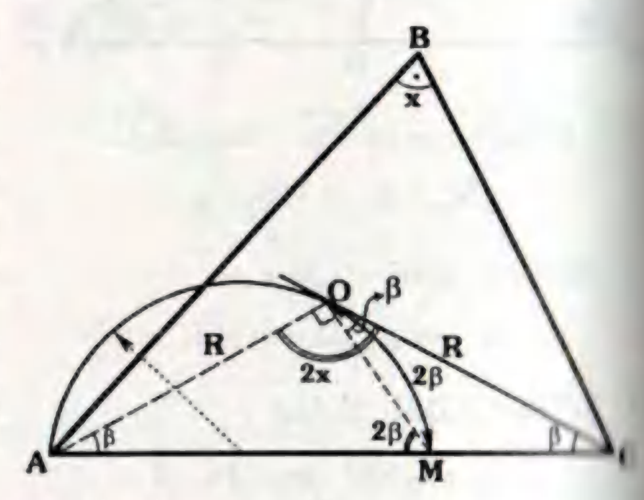



- I : Incentro del $\Delta$ABP
  $\Rightarrow m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBP = \dfrac{x}{2}$ y
  $m\measuredangle BIP = 90° + \dfrac{60°}{2} = 120°$
- ⌂IBCP : Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle ICP = \dfrac{x}{2}$
- En ⧖MBLC : $m\measuredangle MBH = \dfrac{x}{2}$
- ◺ABL : $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2} = 30°$

$\therefore\ \mathbf{x = 20°}$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 85



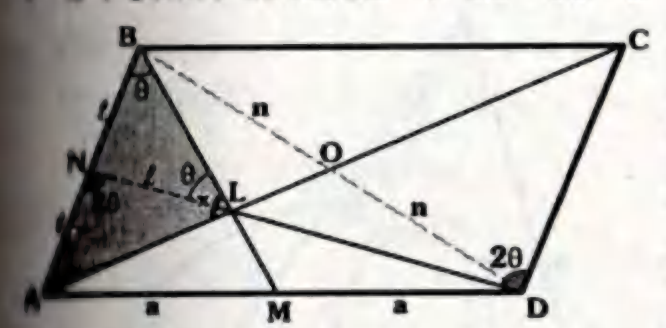

- O : Circuncentro
  $\Rightarrow$ AO=OC=R y $m\measuredangle AOC = 2x$
- Por ángulo inscrito : $m\overset{\frown}{OM} = 2\beta$
- Por ángulo semiinscrito: $m\measuredangle MOC = \beta$
- En ◺AOM : $\beta + 2\beta = 90° \Rightarrow \beta = 30°$
- $2x = 90° + 30°$

$\therefore\ \mathbf{x = 60°}$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 86

- O : Centro de ABCD ⇒ BO=OD=n

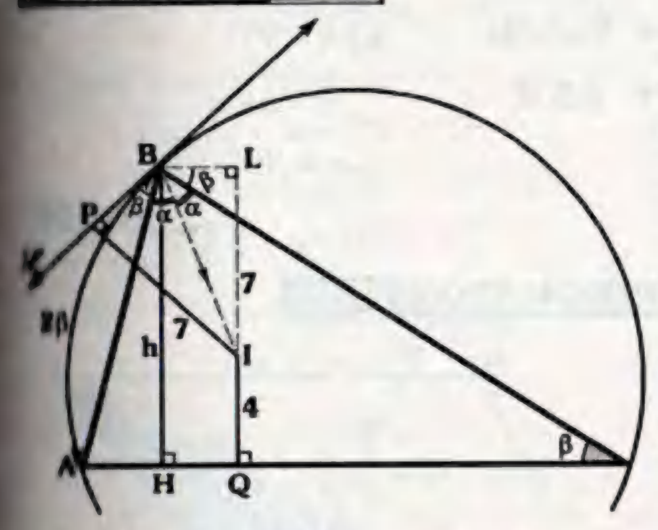



- L : Baricentro del ΔABD
  ⇒ $\overline{DN}$ es mediana
- Por ángulos alternos internos
  ⇒ m∡LNA = 2θ
- Se observa que el ΔNBL es isósceles
  ⇒ NL = ℓ
- ΔABL : AN=NB=NL= ℓ

∴ **x = 90°**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 87

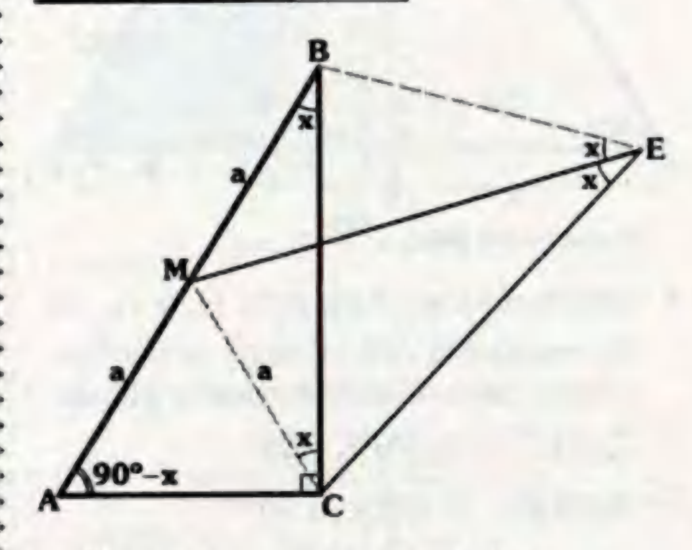



- IQ=4 (*inradio*)
- m∡ABI = m∡IBC = α
- Por ángulo semiinscrito :
  m∡PBA = m∡BCA = β
- Se observa $\overline{BL}//\overline{AC}$ ⇒ m∡LBC=β (ángulo alternos internos).
- $\overrightarrow{BI}$ : Bisectriz del ∡PBL ⇒ IP=IL=7
- Finalmente HBLQ es un rectángulo

∴ **h = 11**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 88



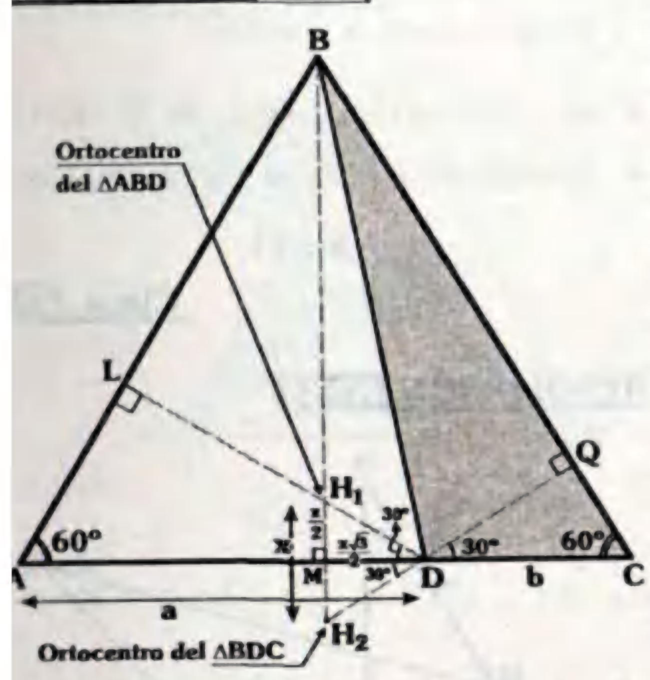

- ◺ACB : m∡BAC = 90°–x
- Trazamos $\overline{CM}$, en el ◺ACB por el teorema △:
  CM=a ⇒ m∡MCB = x
  (ΔCBM : *Isósceles*)
- Como m∡MBC = m∡MEC = x, al trazar $\overline{EB}$ el ◻MBEC es inscriptible
  ⇒ m∡MCB=m∡MEB=x
- Finalmente, por teorema fundamental :

$$2x = 90° - \left(\frac{90° - x}{2}\right)$$

∴ **x = 30°**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 89




- Ubicamos los ortocentros $H_1$ y $H_2$ de los triángulos ABD y BDC respectivamente, para lo cual trazamos alturas.
- ◺ALD : $m\measuredangle ADL = 30°$
- ◺DQC : $m\measuredangle QDC = 30°$
- $\overline{DM}$ es altura del triángulo equilátero $H_1H_2D$ :

$$\Rightarrow \quad H_1M = MH_2 = \frac{x}{2}$$

- ◺ $H_1MD$ :

$$\text{Notable} \Rightarrow \quad MD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

- Sabemos : AM=MD

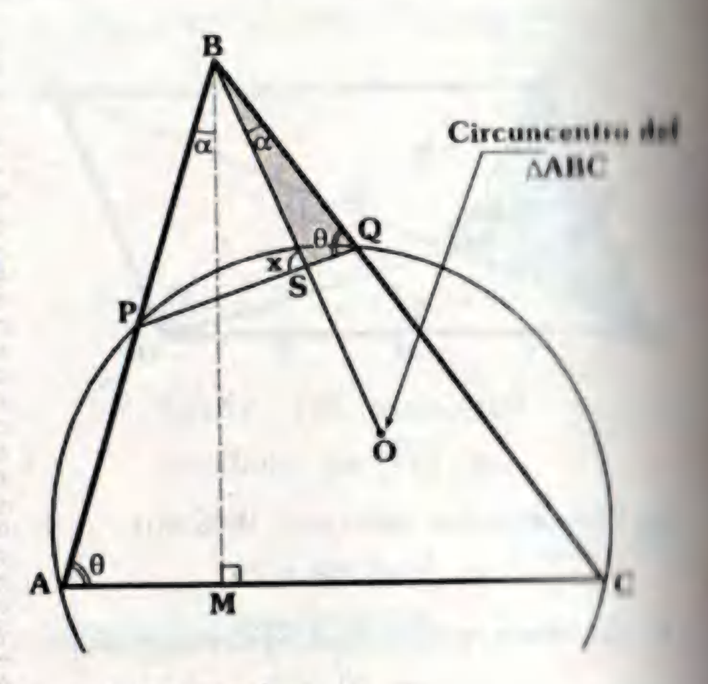
$$\Rightarrow \quad a - \frac{x\sqrt{3}}{2} = b + \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{a-b}_{4\sqrt{3}} = x\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 4}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 90




- ⌂APQC : Inscrito

$$\Rightarrow m\measuredangle PAC = m\measuredangle PQB = \theta$$

- Al trazar la altura BM en el ΔABC, por el teorema 9.4:

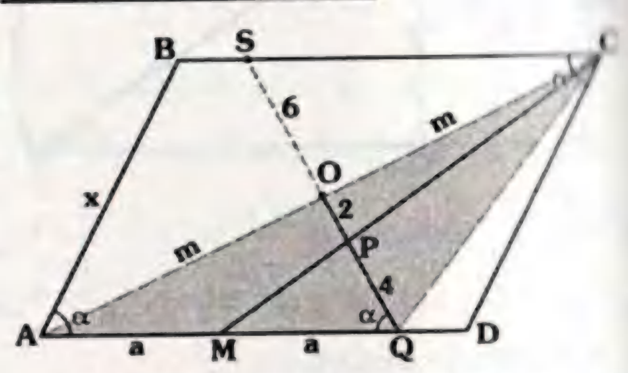
$$m\measuredangle ABM = m\measuredangle OBC = \alpha$$

- ◺ABM : $\alpha + \theta = 90°$
- ΔBSQ : $x = \alpha + \theta$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 90°}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 91




- ▱ABCD : $m\measuredangle BAD = m\measuredangle BCD = \alpha$

- O : Centro del ▱ABCD

  $\Rightarrow$ $O \in \overline{AC}$, AO=OC=m y QO=OS
- $\overline{CM}$ y $\overline{QO}$ son medianas del $\Delta AQC$

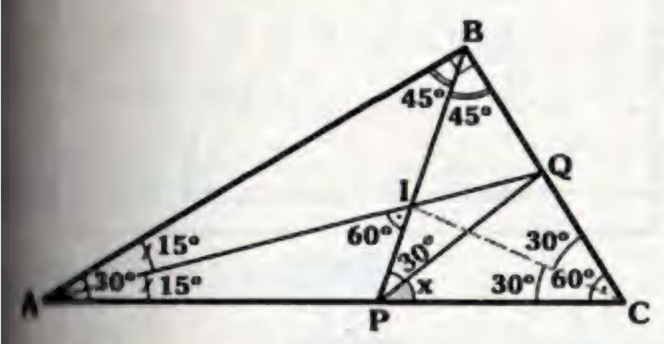
  $\Rightarrow$ P es baricentro del $\Delta AQC$.
- Por teorema fundamental :

  $PQ=2(OP)=4$
- Pero QO=OS $\Rightarrow$ SQ=12
- Se observa que ABSQ es un trapecio isósceles

$\therefore$ **x = 12**

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 92




- Como I es incentro :

  $m\measuredangle BAI = m\measuredangle CAI = 15°$;

  $m\measuredangle ABI = m\measuredangle CBI = 45°$ y

  $m\measuredangle BCI = m\measuredangle ACI = 30°$
- $\Delta ABI$ : Por ángulo exterior

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle AIP = 60°$
- ⌂PIQC : Inscriptible

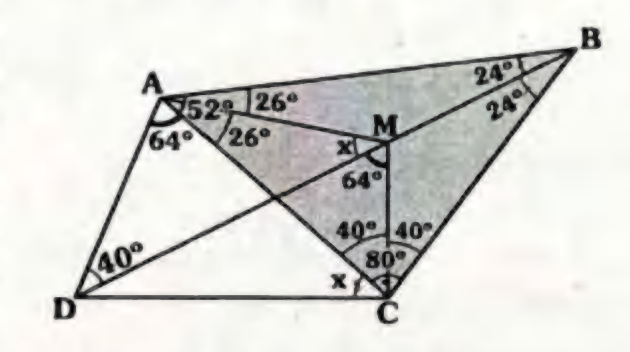
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle ICQ = m\measuredangle IPQ = 30°$
- $\Delta API$ : Por ángulo exterior

  $\Rightarrow$ $15° + 60° = 30° + x$

$\therefore$ **x = 45°**

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 93




- Se traza $\overline{CM}$ tal que :

  $m\measuredangle ACM = m\measuredangle MCB = 40°$
- ⌂AMCD inscriptible :

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle AMD = x$ ; y

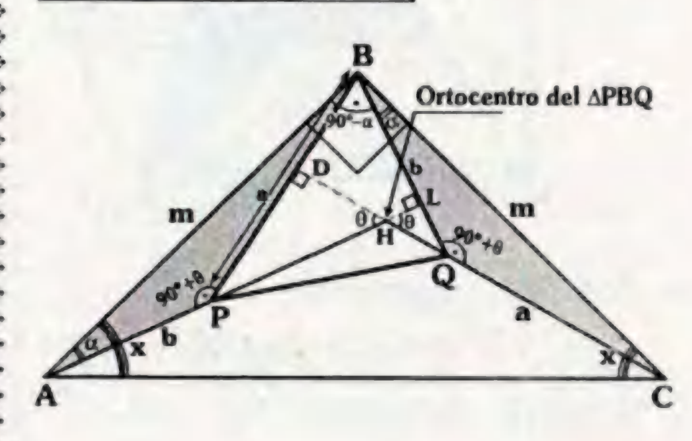
  $m\measuredangle DMC = 64°$
- En $\Delta CMB$ : $m\measuredangle MBC = 24°$
- M es incentro del $\Delta ABC$.
- $\Delta AMB$ : Por ángulo exterior.

  $x = 24° + 26°$

$\therefore$ **x = 50°**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 94



- H es ortocentro del $\Delta PBQ$

  $\Rightarrow \overline{PL}$ y $\overline{QD}$ son alturas

- Por ángulo en los triángulos DHP y HLQ:

  $\Rightarrow m\measuredangle DPA = 90^\circ + \theta$ y

  $m\measuredangle LQC = 90^\circ + \theta$

- $\Delta ABP \cong \Delta BQC$ (LAL)

  $\Rightarrow AB = BC = m$ y

  $m\measuredangle BAP = m\measuredangle QBC = \alpha$

- ◺ALB :

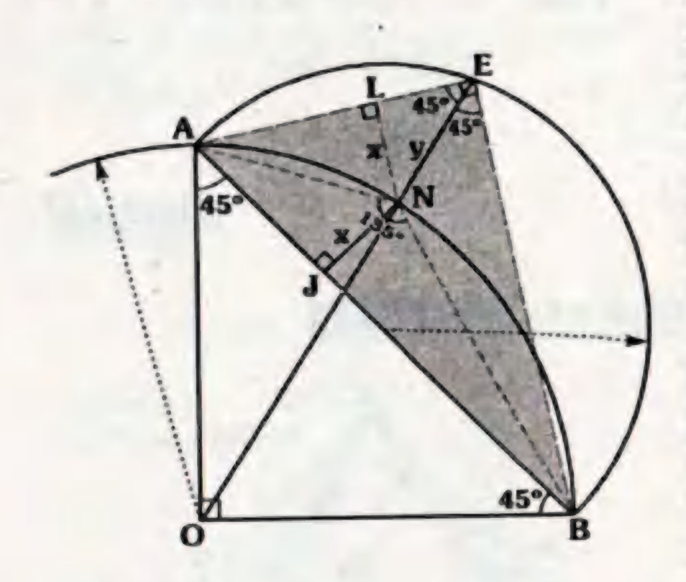
  $m\measuredangle ABL = 90^\circ - \alpha \Rightarrow m\measuredangle ABC = 90^\circ$

- ◺ABC : $x + x = 90^\circ$

  $\therefore$ **$x = 45^\circ$**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 95




- ⌂AEBO : Inscriptible

  $\Rightarrow m\measuredangle AEO = m\measuredangle OEB = 45^\circ$

- Sabemos : $m\measuredangle ANB = 135^\circ$

- ◺EBA : $\overline{EN}$ es bisectriz interior y

  $$m\measuredangle ANB = 90^\circ + \frac{90^\circ}{2}$$

  Entonces por el criterio 8.3 N es incentro del ◺EBA, además x es el inradio.

- ◺ENL : Notable de 45°.

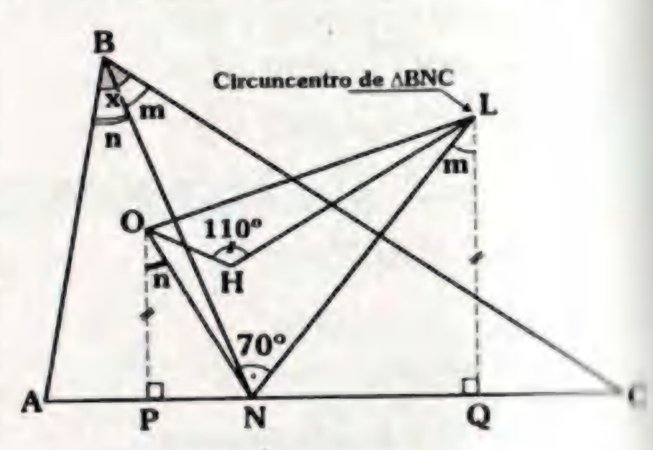
  $$\therefore \ \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

*Recordar:*

135° 45°

**Clave**

## RESOLUCIÓN N° 96




- Se observa : $x = m + n$

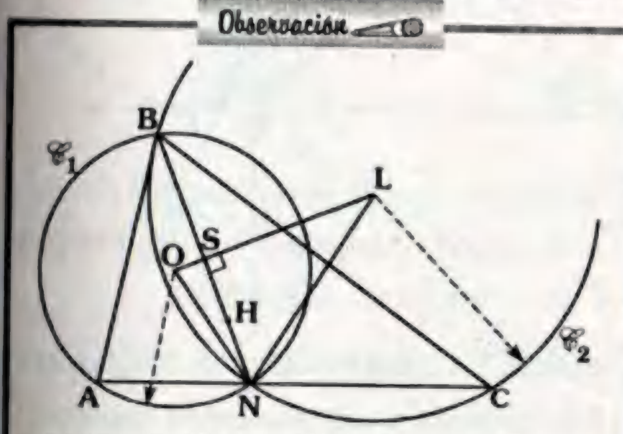
- Por el teorema 7.4 en los triángulos ABN y BNC :

  $m\measuredangle PON = n$ y $m\measuredangle NLQ = m$

- Por teorema fundamental en $\Delta ONL$ :
$m\measuredangle ONL = 70°$
- Como $\overline{OP} // \overline{LQ}$, por propiedad :
$m + n = 70°$
$\therefore$ **$x = 70°$**

**Clave D**

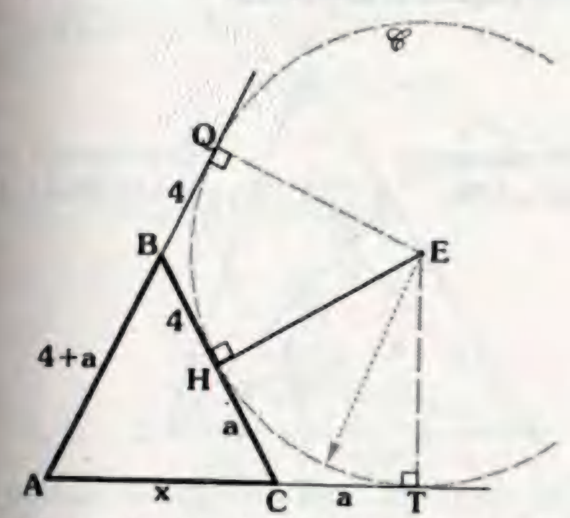
**Observación**




Al trazar $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, por teorema de circunferencias secantes : $\overline{BN} \perp \overline{OL}$

$\Rightarrow$ El ortocentro H pertenece a $\overline{SN}$

## RESOLUCIÓN N° 97



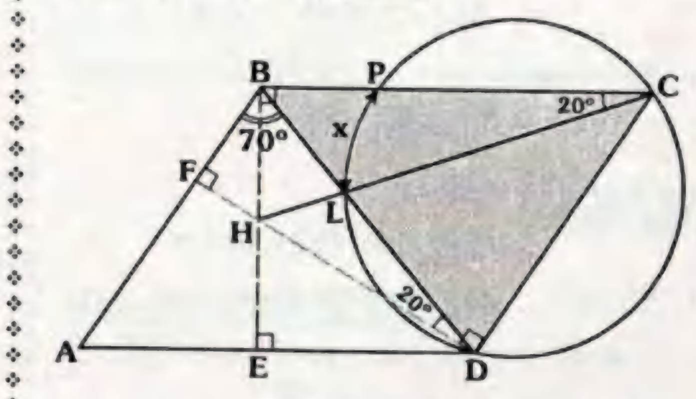

- Trazamos la circunferencia exinscrita $\mathscr{C}$.
- Sabemos :

BQ=BH=4 y HC=CT=a

- Pero, AB=BC $\Rightarrow$ AB=4+a
- Por tangentes : AQ=AT
$\Rightarrow$ 4+a+4=x+a
$\therefore$ **x=8**

**Clave B**

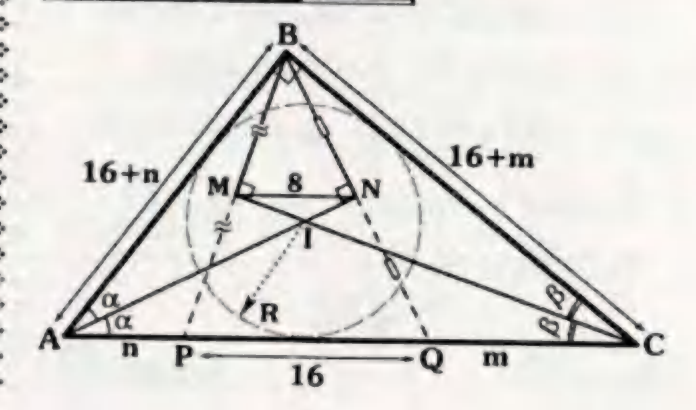
## RESOLUCIÓN N° 98




- Trazamos las alturas $\overline{BE}$ y $\overline{DF}$.
- $\triangle$BFD : $m\measuredangle BDF = 20°$
- Como ABCD es un paralelogramo
$\Rightarrow$ $m\measuredangle EBC = m\measuredangle FDC = 90°$
- $\square$HBCD : Inscriptible
$\Rightarrow$ $m\measuredangle BCH = 20°$
- Luego, por ángulo inscrito :
$x = 2(m\measuredangle PCL)$
$\therefore$ **$x = 40°$**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 99

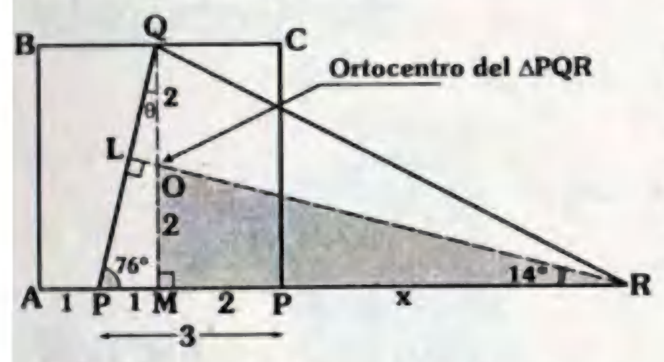


- En ◺ABC: $\overline{AI}$ y $\overline{CI}$ son bisectrices.
- $\overline{CM}$ es altura y bisectriz del $\Delta PBC$
  $\Rightarrow BM = MP$
- $\overline{AN}$ es altura y bisectriz $\Rightarrow \overline{AN}$ es mediana.
- $\overline{MN}$ : Base media del $\Delta PBQ$
  $\Rightarrow PQ = 16$
- Se observa que el $\Delta PBQ$ es isósceles
  $\Rightarrow BC = PC = 16 + m$
- $\Delta ABQ$ : Isósceles
  $\Rightarrow AB = AQ = 16 + n$
- ◺ABC : Teorema de Poncelet
  $\Rightarrow 16 + n + 16 + m = n + 16 + m + 2R$

$$\therefore \ \mathbf{R = 8}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 100

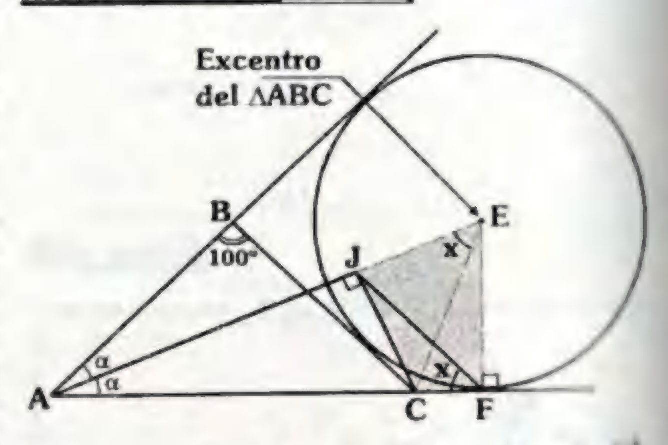



- O : Ortocentro del $\Delta PQR$
  $\Rightarrow \overline{QM}$ y $\overline{RL}$ son alturas
- O : Centro del cuadrado ABCD
  $\Rightarrow AM = MD = 2$ y $QO = OM = 2$
- ◺QMP : Notable $\Rightarrow \theta = 14°$
- ◺OMR : Notable $\Rightarrow 2 + x = 8$

$$\therefore \ \mathbf{x = 6}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 101



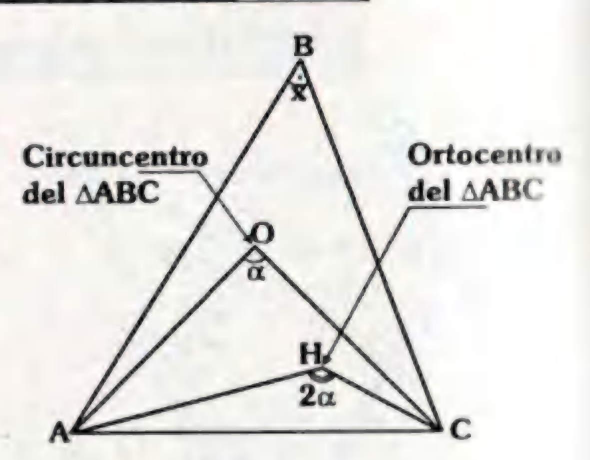

- Se nota que la intersección (E) de $\overrightarrow{AJ}$ y la perpendicular a $\overline{AF}$, trazada por F es el excentro del $\Delta ABC$.
- ⏢EJCF : Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle JEC = x$
- Por teorema fundamental de excentro

$$x = \frac{100°}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 50}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN Nº 102




- Por teorema fundamental de circuncentro :

$$\alpha = 2x \qquad \ldots (I)$$

- Por teorema fundamental de ortocentro :

$$2\alpha + x = 180° \qquad \ldots (II)$$

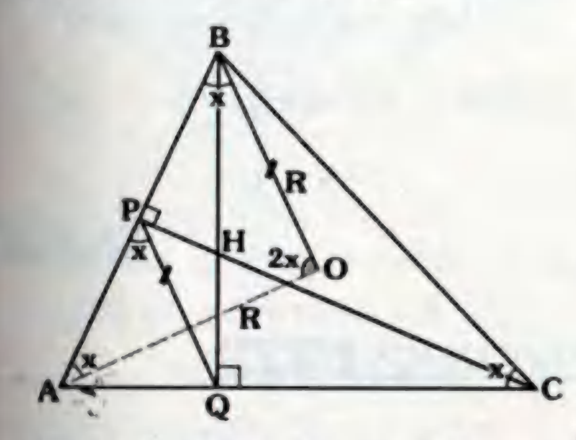
- Reemplazando (I) en (II) :

$$2(2x)+x=180°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=36°}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 103




- H : Ortocentro del $\Delta ABC$

$\Rightarrow \overline{BQ}$ y $\overline{CP}$ son alturas

- ⌂PBCQ : Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle PBO=x$
- O : Circuncentro

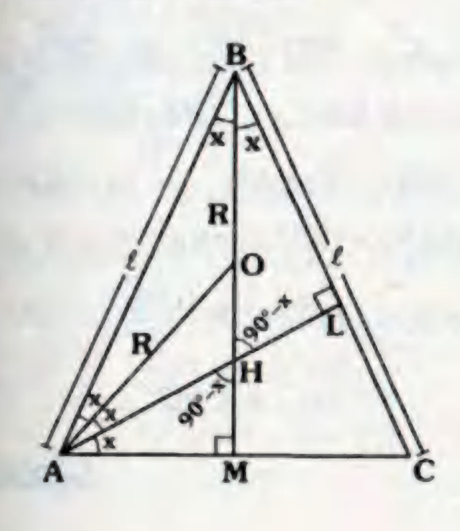
$\Rightarrow BO=AO=R$ y $m\measuredangle BOA=2x$

- $\Delta BOA$ : $x+x+2x=180°$

$$\therefore \quad \mathbf{x=45°}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 104




- B, O, H y M son colineales (*teorema* 12.6)

$\Rightarrow m\measuredangle ABO=x$

- Se observa $m\measuredangle HAM=x$
- O : Circuncentro

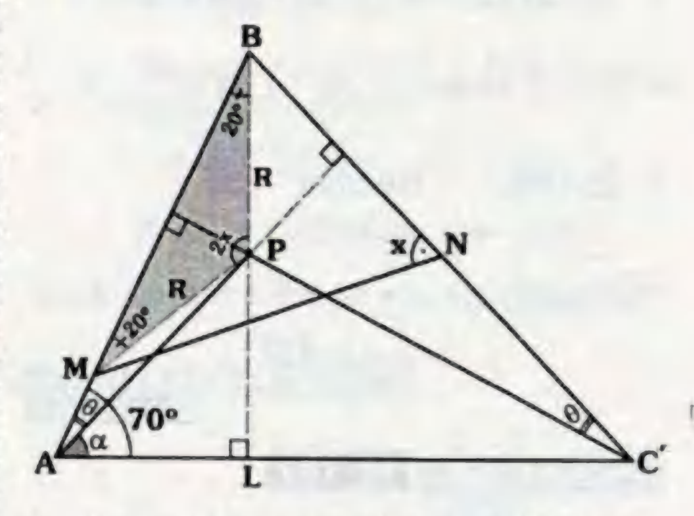
$\Rightarrow AO=OB=R \Rightarrow m\measuredangle BAO=x$

- ◺ABM : $x+3x=90°$

$$\therefore \quad \mathbf{x=\frac{45°}{2}}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 105




- Como P es ortocentro del $\Delta ABC$

$\Rightarrow m\measuredangle BAP=m\measuredangle BCP=\theta$

- Pero, $\alpha+\theta=70° \Rightarrow m\measuredangle ABL=20°$
- Como P es circuncentro del $\Delta MBN$

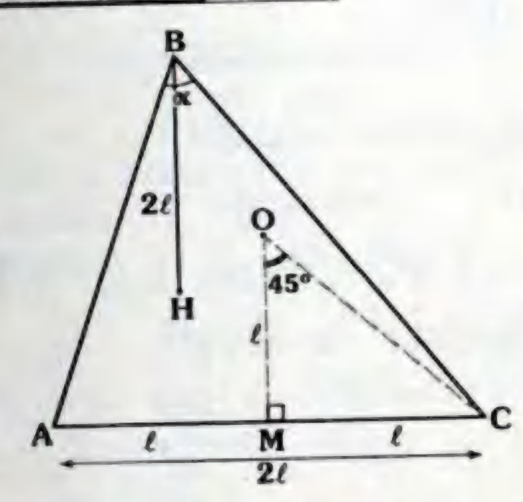
$\Rightarrow PM=PB=R$ y $m\measuredangle BPM=2x$

- $\Delta MBP$ : $20°+20°+2x=180°$

$$\therefore \quad \mathbf{x=70°}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 106

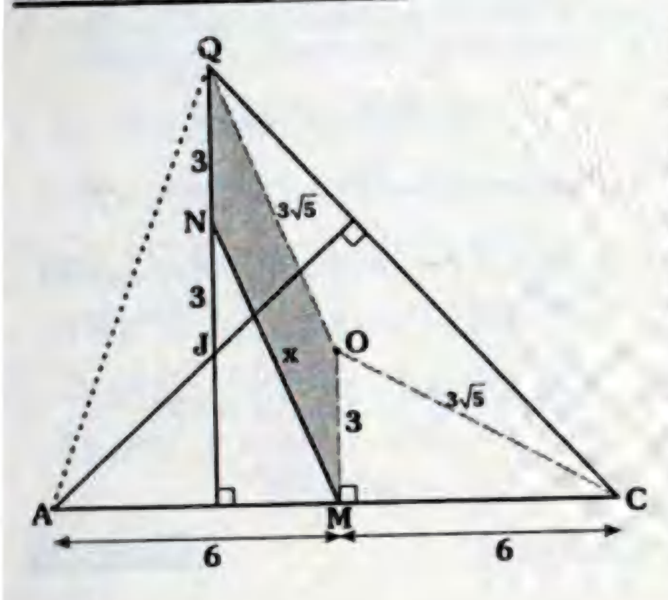



- Se ubica el circuncentro O del $\Delta ABC$.
- Luego trazamos $\overline{OM} \perp \overline{AC}$
- Por el teorema 9.4 : $AM = MC = \ell$
- Por el teorema 9.6 : $OM = \dfrac{2\ell}{2} = \ell$
- $\triangle OMC$ : Notable
  $\Rightarrow \quad m\measuredangle MOC = 45°$
- Finalmente por teorema fundamental:

$$\therefore \ \mathbf{x = 45°}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 107

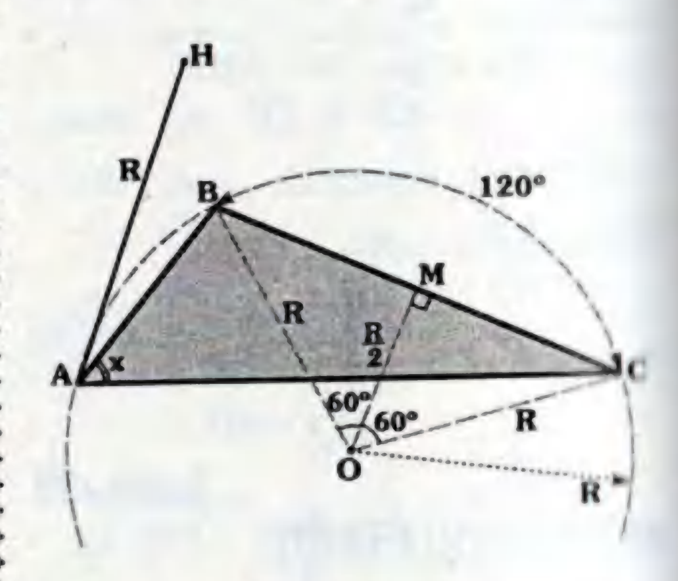



- Al trazar $\overline{AQ}$, se observa que J es ortocentro del $\Delta AQC$.
- Luego ubicamos el circuncentro O y trazamos $\overline{OM} \perp \overline{AC}$.
- Por teorema (9.6) : $OM = 3$
- $OC = OQ = 3\sqrt{5}$ *(circunradio)*
- QOMN : Paralelogramo

$$\therefore \ \mathbf{x = 3\sqrt{5}}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 108

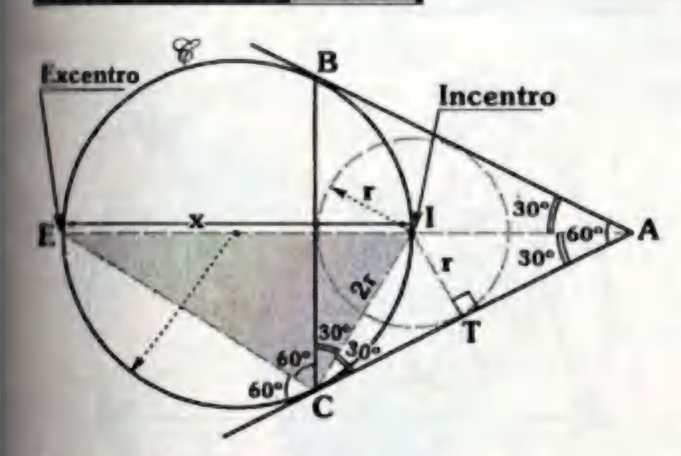



- Trazamos $\overline{OM} \perp \overline{BC}$ $(M \in \overline{BC})$, por el teorema 9.6 $\Rightarrow$ $OM = R/2$.
- $\triangle OMC$ : Notable $\Rightarrow$ $m\measuredangle MOC = 60°$
- $m\measuredangle BOC = 120°$, entonces por ángulo inscrito: $m\measuredangle BAC = \dfrac{m\widehat{BC}}{2}$

$$\therefore \ \mathbf{x = 60°}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 109

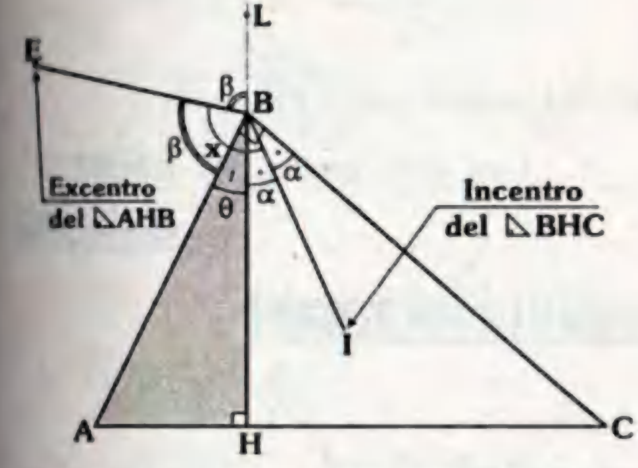



- Por el teorema 9.1 :
  Sabemos que el incentro I y el excentro E pertenecen a $\mathscr{C}$.
- ⊿ITC : Notable $\Rightarrow$ CI=2r
- ⊿ECI : Notable

$\therefore\quad \mathbf{x = 4r}$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 110




- I : Incentro $\Rightarrow$ $m\measuredangle HBI = m\measuredangle IBC = \alpha$
- E: Excentro $\Rightarrow$ $m\measuredangle LBE = m\measuredangle EBA = \beta$
- $m\measuredangle ABC = 90° = \theta + \alpha + \alpha$
- En "B" : $180° = \theta + \beta + \beta$ (+)

$$270° = 2\theta + 2\alpha + 2\beta$$

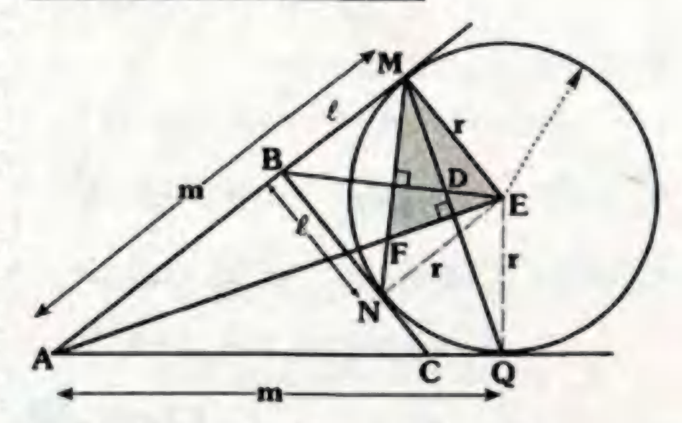
$\Rightarrow\ \theta + \alpha + \beta = 135°$

- Se observa : $\alpha + \beta + \theta = x$

$\therefore\quad \mathbf{x = 135°}$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 111

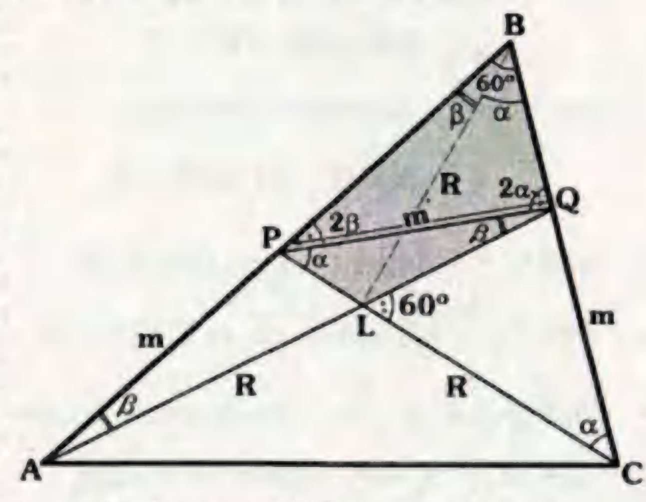



- Por teorema de circunferencia :
  AM = AQ = m y BM = BN = ℓ
- Se observa que BMEN y AMEQ son trapezoides simétricos
  $\Rightarrow\ \overline{AE} \perp \overline{MQ}$ y $\overline{BE} \perp \overline{MN}$

$\therefore$ **D es ortocentro del ΔMEF**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 112



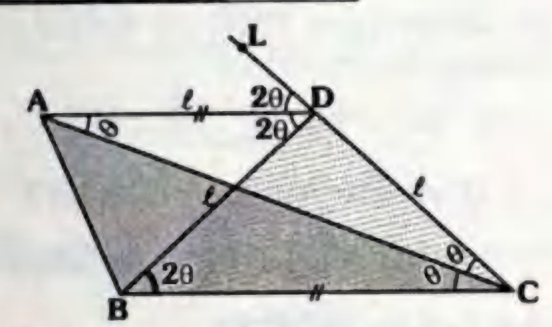

- ΔAPQ y ΔPQC : son isósceles
  $\Rightarrow\ m\measuredangle PAQ = m\measuredangle PQA = \beta$
  y $\quad m\measuredangle LBC = m\measuredangle LCB = \alpha$

- $\Delta BPQ$ : $2\alpha + 2\beta + 60° = 180°$
  $\Rightarrow \alpha + \beta = 60°$
- Por ángulo exterior del $\Delta PQL$
  $\Rightarrow m\measuredangle QLC = 60°$
- $\square PBQL$ : Inscriptible
  $\Rightarrow m\measuredangle PBL = \beta$ y $m\measuredangle LBQ = \alpha$
- $\Delta ABL$ : Isósceles $\Rightarrow AL = LB = R$
- $\Delta BLC$ : Isósceles $\Rightarrow BL = LC = R$

$\therefore$ **L circuncentro del $\Delta ABC$**

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 113

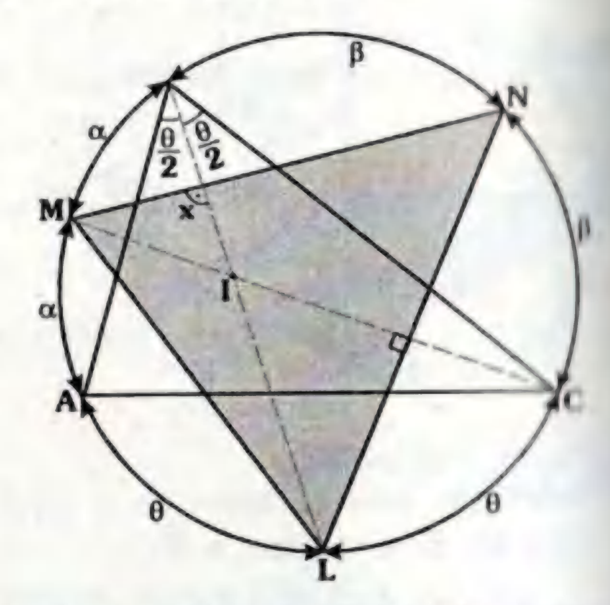



- D : Circuncentro del $\Delta ABC$
  $\Rightarrow DA = DB = DC = \ell$
- Por ángulos alternos internos
  $\Rightarrow m\measuredangle DAC = m\measuredangle ACB = \theta$
- $\Delta ADC$ : Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle DCA = \theta$
- $\Delta BCD$ : Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle DBC = 2\theta$
- Como $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{DA}$ son bisectrices de $\measuredangle DCB$ y $\measuredangle BDL$ respectivamente.

$\therefore$ **A : Excentro del $\Delta BDC$**

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 114

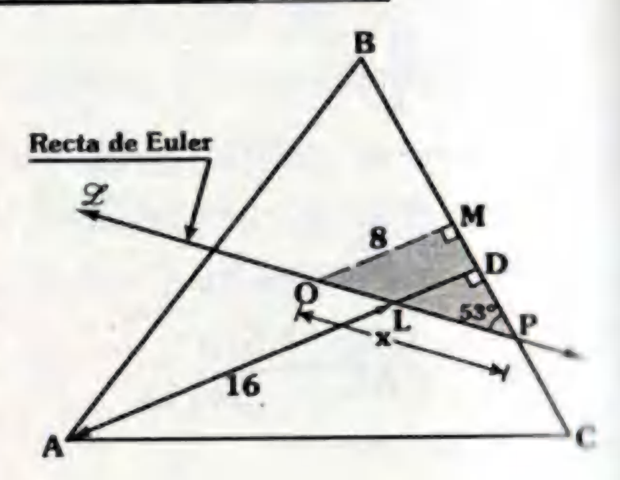



- Se nota B, I y L son colineales
- $\alpha + \alpha + \beta + \beta + \theta + \theta = 360°$
  $\Rightarrow \alpha + \beta + \theta = 180°$
- Por ángulo interior :
  $$x = \frac{\alpha + \theta + \beta}{2} \Rightarrow x = 90°$$
- Del mismo modo $\overline{MC} \perp \overline{LN}$

$\therefore$ **I es ortocentro del $\Delta MNL$**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 115



- Sabemos que la recta de Euler ($\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$) contiene al ortocentro, lo mismo que dicho ortocentro pertenece a $\overline{AD}$, entonces L es ortocentro.

- Luego trazamos $\overline{OM} \perp \overline{BC}$, por el teorema 9.6:

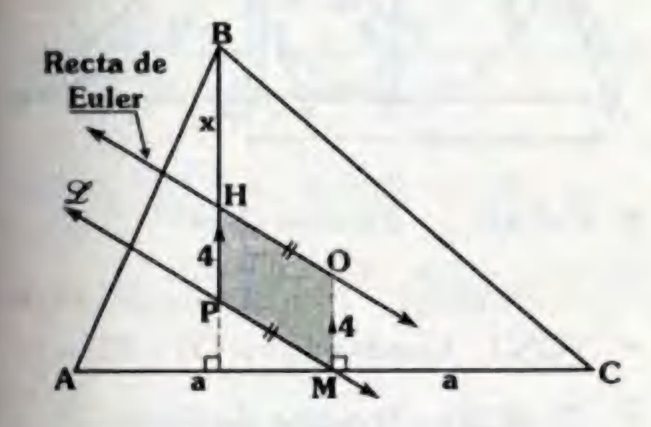
$$OM = \frac{16}{2} = 8$$

- ⊿OMP : Notable de 37° y 53°

$$\therefore \quad \mathbf{x = 10}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 116




- Sea O el circuncentro del $\Delta ABC$.

- Por el teorema 9.4 : $\overline{OM} \perp \overline{AC}$

- ▱PHOM : Paralelogramo

$$\Rightarrow \quad OM = 4$$

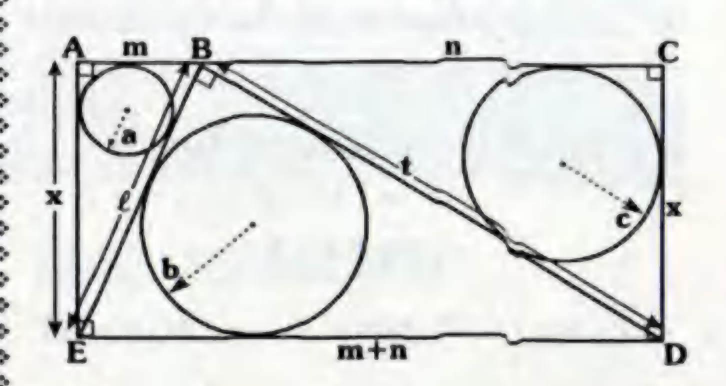
- Finalmente por teorema 9.6 :

$$x = 2(4)$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 8}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 117



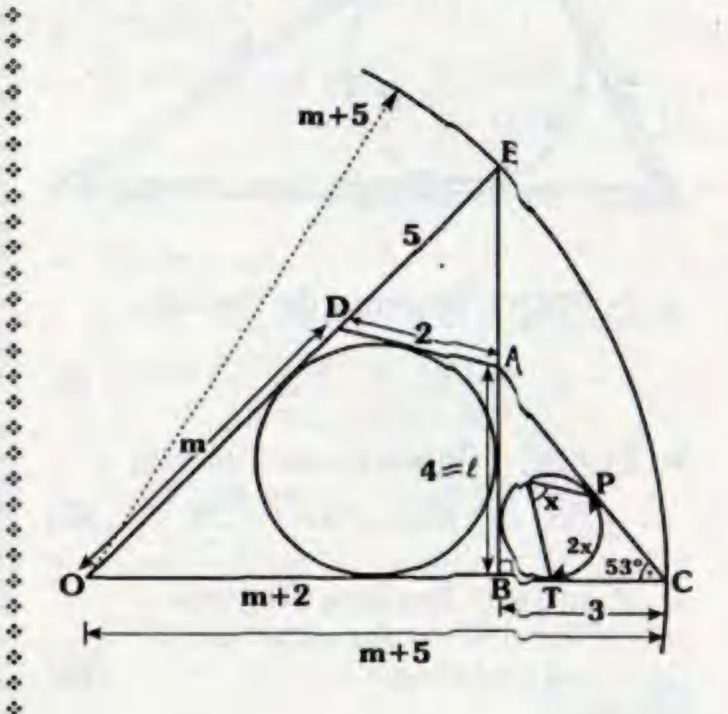

- Por el teorema de Poncelet :

$$\begin{aligned} &⊿ABE : \quad \cancel{m} + x = \cancel{\ell} + 2a \\ &⊿BCD : \quad \cancel{n} + x = \cancel{t} + 2c \\ &⊿BDE : \quad \cancel{\ell} + \cancel{t} = \cancel{m} + \cancel{n} + 2b \quad (+) \\ \hline &\qquad 2x = 2a + 2c + 2b \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = a + b + c}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 118



Por ángulo inscrito : $m\widehat{PT} = 2x$

Sea OD=m, entonces el radio del arco es m+5 ⇒ OB=m+2

⌂ODAB : Teorema de Pitot

$\Rightarrow \ m+2+2 = m+\ell$

$\Rightarrow \ \ell = 4$

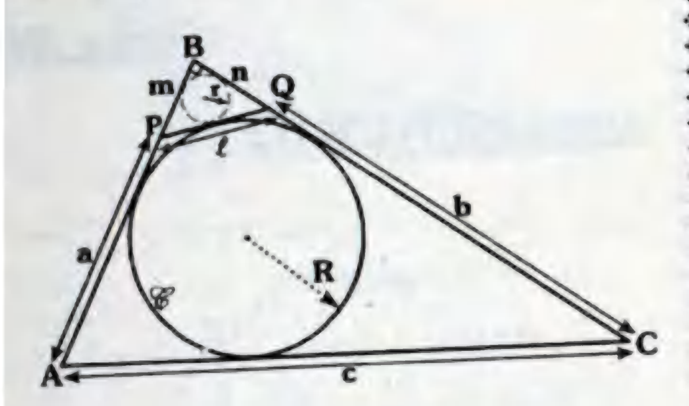
- ◺ABC : Notable ⇒ $m\measuredangle ACB = 53°$
- Por teorema de circunferencia :

$$2x + 53° = 180°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{127°}{2}}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 119




- ◺PBQ : Teorema de Poncelet

$\Rightarrow \ m+n = \ell + 2r$ ...(I)

- ◺ABC : Teorema de Poncelet

$\Rightarrow \ m+a+n+b = c+2R$ ...(II)

- ⌂APQC : Teorema de Pitot

$\Rightarrow \ c+\ell = a+b$ ... (III)

- (I)+(II)+(III) :

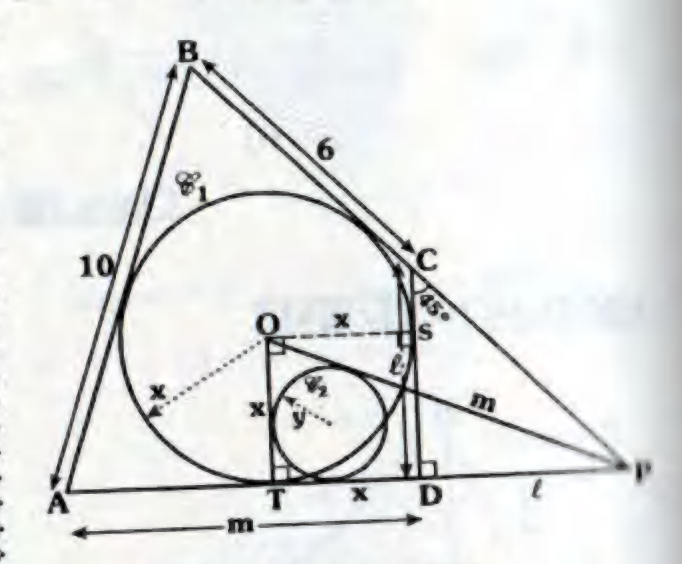
$$2(m+n) = 2(R+r)$$

- Pero $m+n = 10$ (*dato*)

$$\therefore \ \mathbf{R+r = 10}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 120




- ◺CDP : Notable de 45°

$\Rightarrow \ CD = DP = \ell$

- TOSD : Cuadrado ⇒ OT = TD = x
- ⌂ABCD : Teorema de Pitot

$\Rightarrow \ 10 + \ell = 6 + m$ ... (I)

- ◺OTP : Teorema de Poncelet

$\Rightarrow \ x + x + \ell = m + 2y$ ... (II)

- (I) – (II) : $10 - 2x = 6 - 2y$

$$\therefore \ \mathbf{x - y = 2}$$

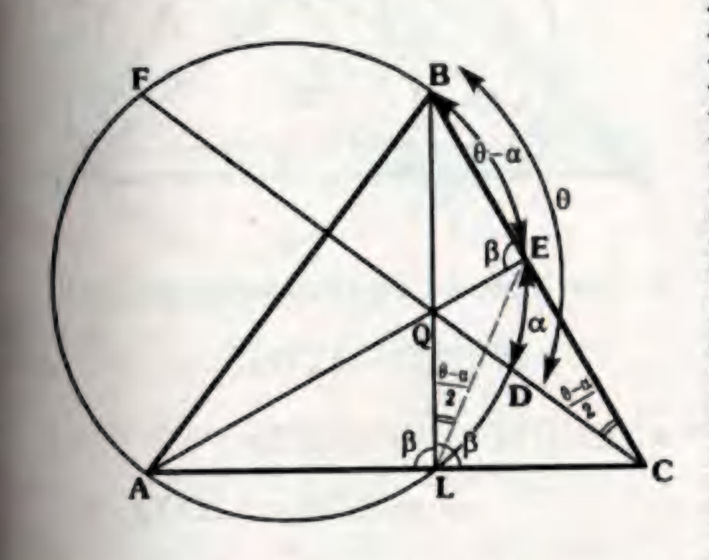
**Clave A**



# Solucionario

Ciclo Semestral **Intensivo**

## RESOLUCIÓN N° 121



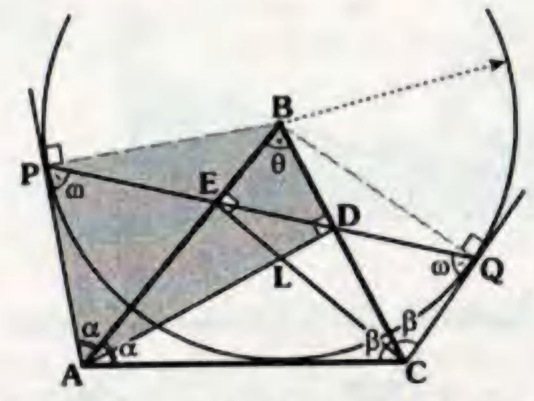

- Sea $m\widehat{ED}=\alpha \Rightarrow m\widehat{BE}=\theta-\alpha$
- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle BLE=\dfrac{\theta-\alpha}{2}$
- Por ángulo exterior : $m\measuredangle BCF=\dfrac{\theta-\alpha}{2}$
- Luego el $\square$LQEC es inscriptible

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle QLC=m\measuredangle QEB=\beta$
- En "L" : $\beta+\beta=180° \Rightarrow \beta=90°$
- Finalmente $\overline{AE}$ y $\overline{BL}$ son alturas

  $\therefore$ **Q es ortocentro del $\triangle ABC$**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 122




- Por teoremas en la circunferencia :

  $\overline{BP}\perp\overline{PA}$ , $\quad\overline{BQ}\perp\overline{QC}$ ,

  $m\measuredangle PAB=m\measuredangle BAC=\alpha$ ,

  $m\measuredangle ACB=m\measuredangle BCQ=\beta$ y

  $m\measuredangle APQ=m\measuredangle PQC=\omega$
- $\square$APQC:

  $\omega+\omega+\alpha+\alpha+\beta+\beta=360°$

  $\Rightarrow \quad \omega+\alpha+\beta=180° \quad ...\text{(I)}$
- $\triangle ABC$: $\quad \theta+\alpha+\beta=180° \quad ...\text{(II)}$
- De (I) y (II) :

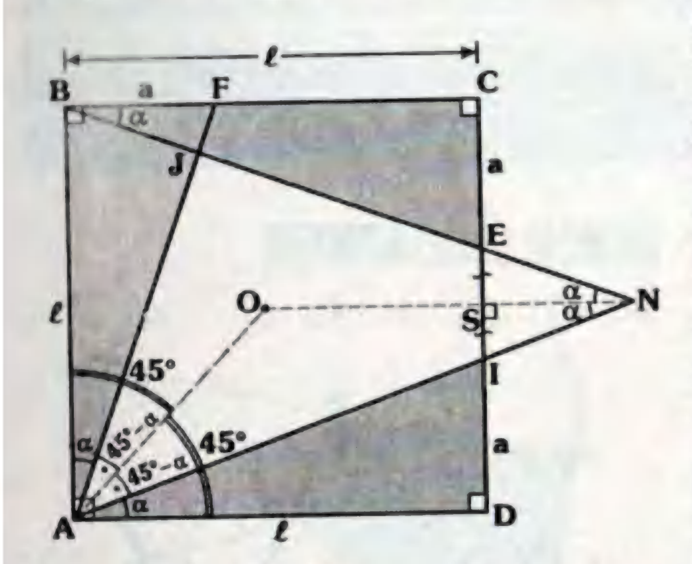
  $\omega=\theta$, con lo cual nos damos cuenta que el $\square$APBD es inscriptible :

  $\Rightarrow \quad m\measuredangle ADB=90°$
- Análogamente : $\quad m\measuredangle CEB=90°$
- Luego $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ son alturas del $\triangle ABC$

  $\therefore$ **L es ortocentro del $\triangle ABC$**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 123




- $\triangle ABF \cong \triangle BCE \cong \triangle ADI$ (LAL)

 $\Rightarrow m\measuredangle BAF = m\measuredangle EBC = m\measuredangle IAD = \alpha$

- Como O : Centro

 $\Rightarrow m\measuredangle BAO = m\measuredangle OAD = 45°$

 Con lo cual se observa que $\overline{AO}$: bisectriz interior del $\triangle AJN$.

- $\triangle IEN$, se traza la altura NS, con lo cual se observa :

 $m\measuredangle SNE = m\measuredangle SNI = \alpha$

- Luego $\triangle IEN$ :

 isósceles $\Rightarrow$ ES=SI

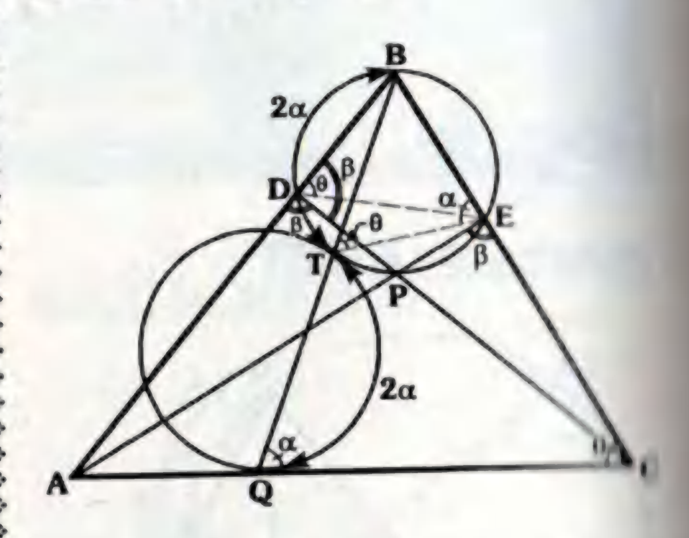
- Como CS=SD :

 $\Rightarrow$ O, S y N colineales

$\therefore$ **O es incentro del $\triangle AJN$**

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 124




- Por teorema de circunferencia :

 $m\measuredangle TQC = m\measuredangle TEB = \alpha$

- ⌓QTEC : Inscriptible

 $\Rightarrow m\measuredangle BTE = m\measuredangle ECQ = \theta$

- $m\measuredangle BDE = \theta$ (*Por inscrito*)

- ⌓ADEC : Inscriptible

 $\Rightarrow m\measuredangle ADC = m\measuredangle AEC = \beta$

- ⌓DBEP : Inscrito

 $\Rightarrow m\measuredangle PDB = m\measuredangle PEC = \beta$

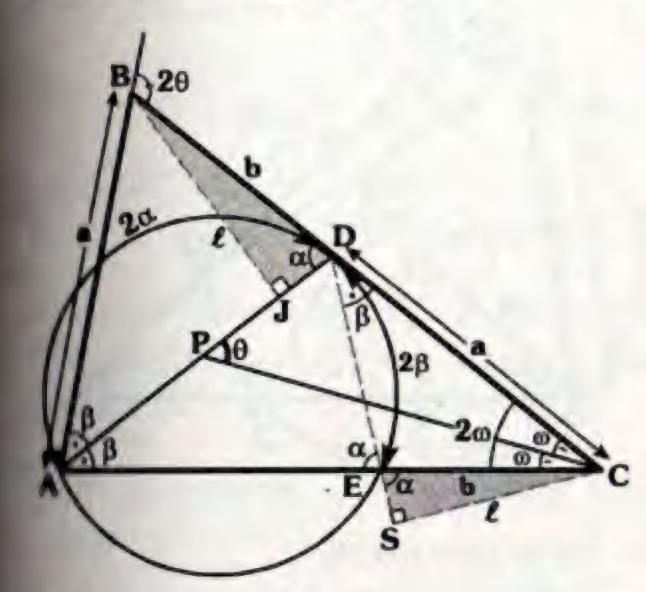
- En "D" : $\beta + \beta = 180°$

 $\Rightarrow \beta = 90°$, con lo cual $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ son alturas.

$\therefore$ **P es ortocentro del $\triangle ABC$**

**Clave [illegible]**

## RESOLUCIÓN Nº 125




- Por ángulo inscrito :

$m\widehat{DE} = 2\beta$ y $m\widehat{AD} = 2\alpha$

- Por ángulo semiinscrito :

$m\measuredangle ADB = \beta$ y $m\measuredangle EDC = \beta$

- Trazamos $\overline{BI} \perp \overline{AD}$ y $\overline{CS} \perp \overleftrightarrow{DE}$
- $\triangle BID \cong \triangle ESC$ (ALA) $\Rightarrow BJ = SC = \ell$
- $\triangle ABJ \cong \triangle DSC$ (LLL)

$\Rightarrow m\measuredangle BAJ = m\measuredangle SDC = \beta$

- Por ángulo exterior :

$\triangle APC$: $\beta + \omega = \theta$

$\triangle ABC$: $2\beta + m\measuredangle ACB = 2\theta$

$\Rightarrow m\measuredangle ACB = 2\omega$

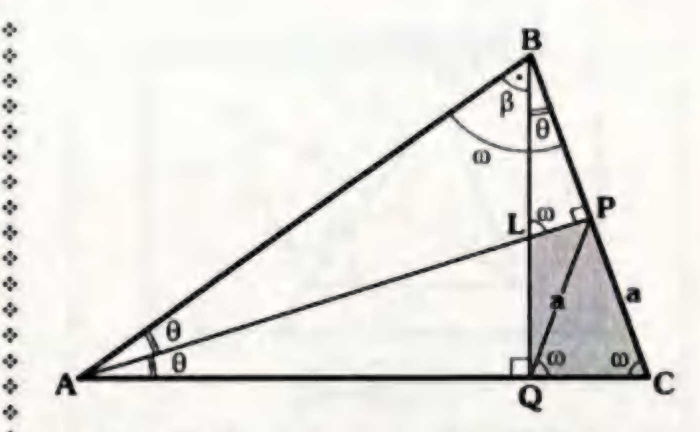
$\therefore$ **P : Incentro de ABC**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 126

- En "B" : $\omega = \beta + \theta$
- $\triangle ABL$ : Por ángulo exterior :

$m\measuredangle BLP = \beta + \theta = \omega$




- $\square PLQC$ : Inscriptible (*dato*)

$\Rightarrow m\measuredangle PCQ = \omega$

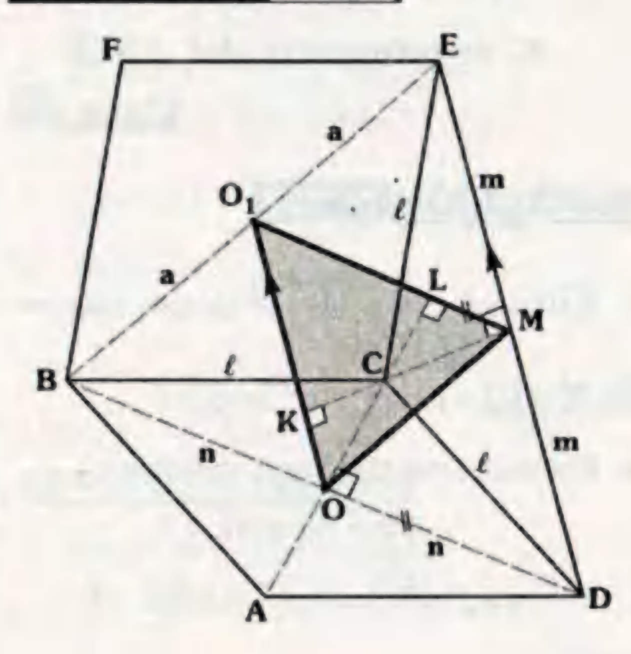
- $\triangle PQC$ : Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle PQC = \omega$
- $\square ABPQ$ : Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle PAQ = \theta$
- Luego, se nota que $\overline{AP}$ es bisectriz del triángulo isósceles ABC $\Rightarrow \overline{AP}$ es altura.
- $\square QLPC$ : Inscriptible

$\Rightarrow m\measuredangle LQA = 90°$

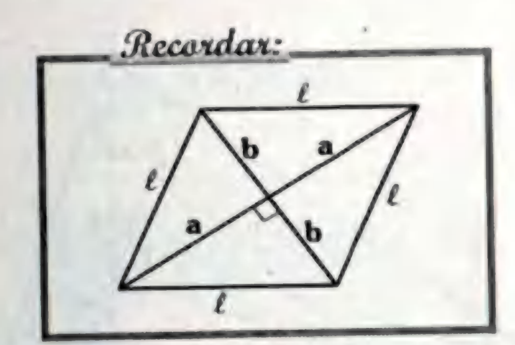
$\therefore$ **L es ortocentro del $\triangle ABC$**

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 127



*Recordar:*




- ABCD : Rombo

  $\Rightarrow$ BO=OD=n y m∡COD=90°

- BCEF : Rombo

  $\Rightarrow$ $BO_1=O_1E=a$

- $\overline{MO_1}$ : Base media del ΔBED

  $\Rightarrow$ $\overline{MO_1} // \overline{BD}$

- Entonces al prolongar $\overline{OC}$, nos damos cuenta que $\overline{OL}$ es altura.

- ΔCED : Isósceles $\Rightarrow$ m∡CME=90°

- $\overline{OO_1}$ : Base media del ΔBED

  $\Rightarrow$ $\overline{OO_1} // \overline{ED}$

- Luego al prolongar $\overline{MC}$, nos daremos cuenta que $\overline{MK}$ es altura.

  ∴ **C es ortocentro del ΔBED**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 128

- Sabemos : $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ *(ángulo interior)*

- IT = IQ = IS = r (r : *Inradio*)

- Por teorema de circunferencia :

  $$AM = AP = NL = \ell$$

  $$\Rightarrow m\widehat{AM} = m\widehat{AP} = m\widehat{NL} = \theta$$




- Por ángulo inscrito :

  $$\theta + x_1 + x_2 = 160° \quad \ldots (I)$$

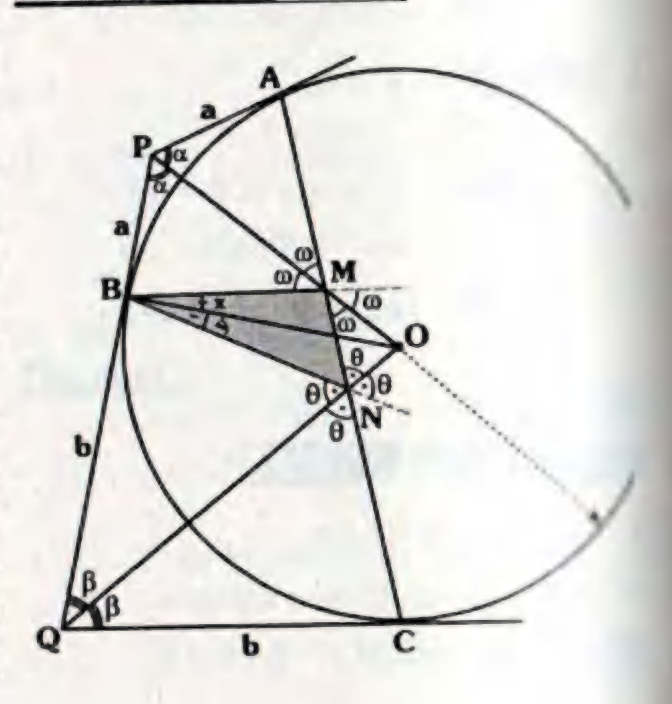
- En 𝒞: $\theta + \theta + x_1 + x_2 + \theta = 360° \quad \ldots (II)$

- De (I) y (II) : $x_1 + x_2 = 60°$

  $$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 129



- Por teorema de circunferencia :

$$m\measuredangle APO = m\measuredangle OPB = \alpha$$
$$m\measuredangle BQO = m\measuredangle OQC = \beta$$
$$PA = PB = a \quad y \quad QB = QC = b$$

- $\Delta BPM \cong \Delta PAM$ (LAL)

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BMP = m\measuredangle PMA = \omega$$

- Al prolongar $\overline{BM}$, nos damos cuenta que $\overline{MO}$ es bisectriz exterior del $\Delta BMN$.

- Análogamente, $\overline{NO}$ es bisectriz exterior del $\Delta BMN$.

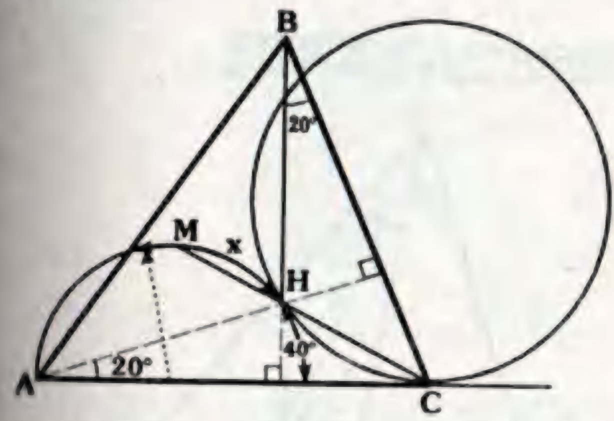
- Luego O es excentro del $\Delta MBN$

$$\Rightarrow \quad x = y$$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{x}{y} = 1}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 130




- H : Ortocentro

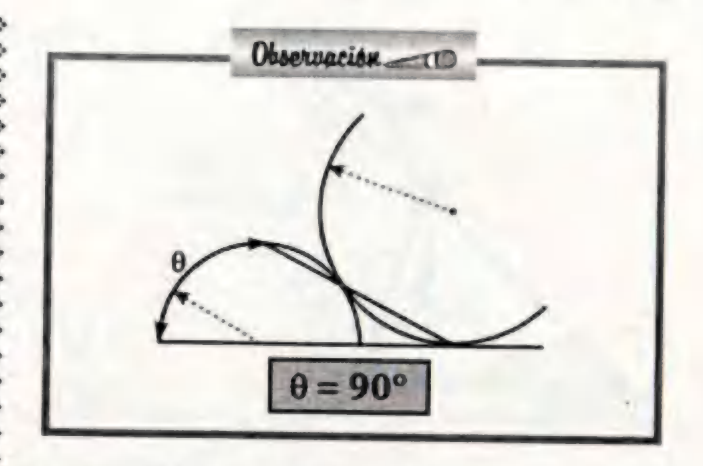
$$\Rightarrow m\measuredangle HAC = m\measuredangle HBC = 20°$$

- Por ángulo inscrito : $m\widehat{HL} = 40°$
- De la observación : $x + 40° = 90°$

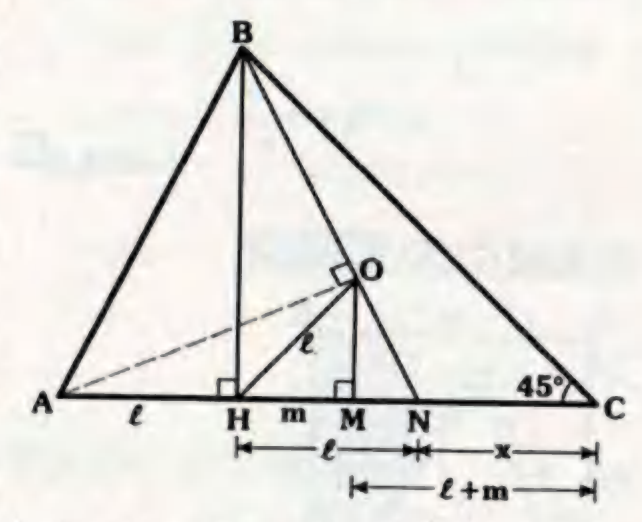
$$\therefore \quad \mathbf{x = 50°}$$

**Clave E**

**Observación**




## RESOLUCIÓN N° 131




- Por teorema fundamental :

$$m\measuredangle BDA = 2(45°) = 90°$$

- $\triangle AON$ : Por el teorema

$$\Rightarrow HN = HA = HO = \ell$$

- $AM = MC = \ell + m$ (*teorema 9.4.*)

- $HC = m + \ell + m = \ell + x$

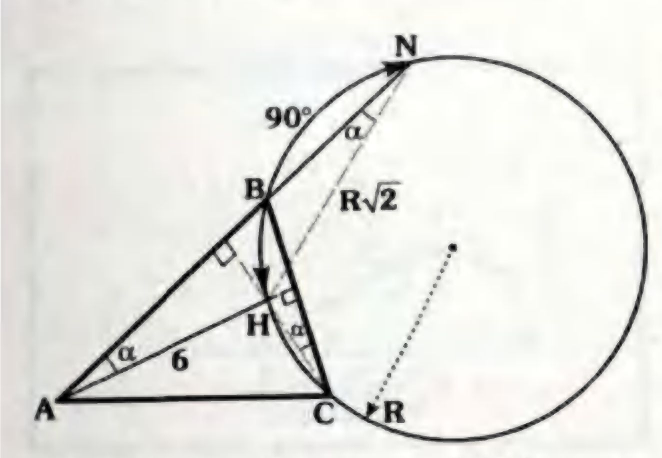
$$\therefore \quad \mathbf{x = 2m}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 132

- Como H : Ortocentro

$$\Rightarrow m\measuredangle BAH = m\measuredangle BCH = \alpha$$

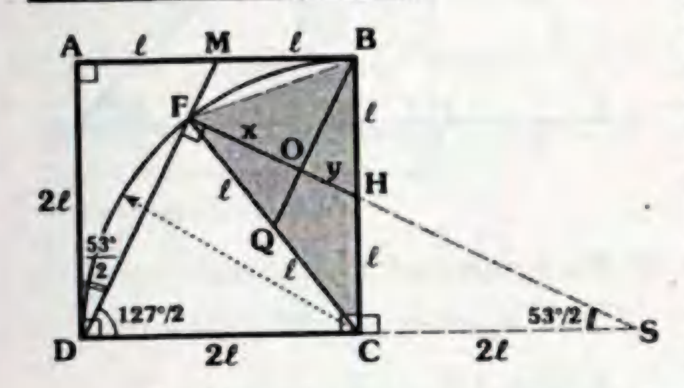



- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle BNH=\alpha$
- Como $m\widehat{HBN}=90^\circ \Rightarrow HN=R\sqrt{2}$
- AHN : Isósceles $\Rightarrow 6=R\sqrt{2}$

$\therefore\ \mathbf{R=3\sqrt{2}}$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 133

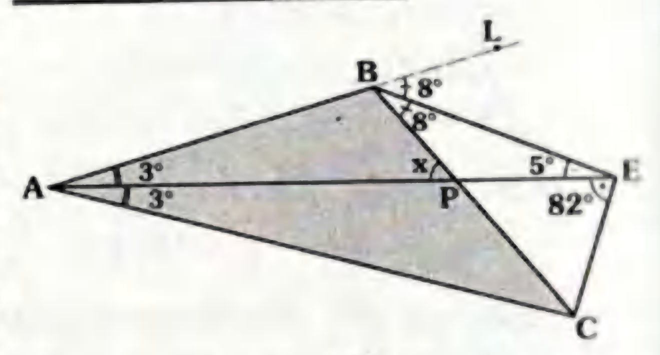



- ◺ADM : Notable $\Rightarrow m\measuredangle ADM=\dfrac{53^\circ}{2}$
- Prolongamos $\overline{DC}$ y $\overline{FH}$ hasta que se corten en S.
- Por el teorema recíproco ◬: $SC=2\ell$
- ◺HCS : Notable de $53^\circ/2 \Rightarrow HC=\ell$
- O : Baricentro del ΔBCF, por teorema fundamental :

$\therefore\ \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}=\mathbf{2}$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 134




- Se observa que $\overrightarrow{AE}$ bisectriz interior del ΔABC, además:

$m\measuredangle BEC=90^\circ-3^\circ$

$\Rightarrow$ E: Excentro del ΔABC (*criterio* 8.9)

- $\overrightarrow{BE}$ : Bisectriz exterior del ΔABC

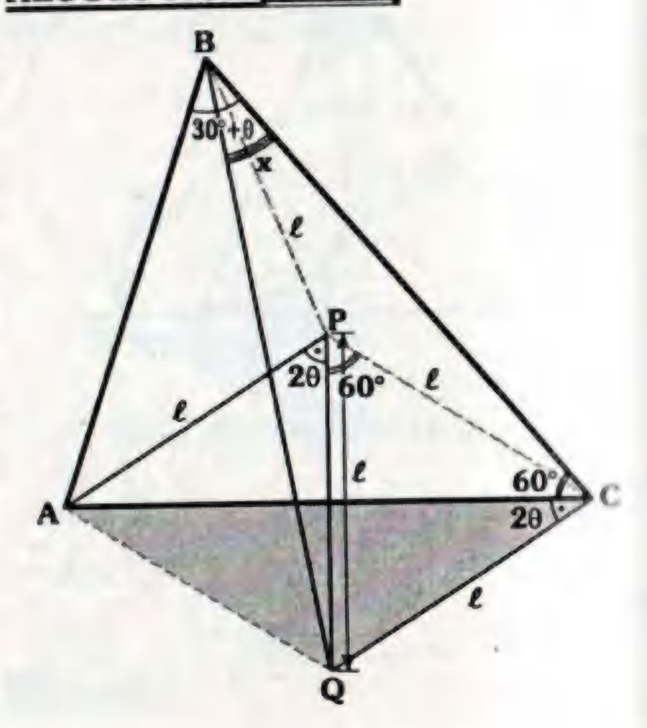
$\Rightarrow m\measuredangle EBC=8^\circ$

- ΔBPE : $x=8^\circ+5^\circ$

$\therefore\ \mathbf{x=13^\circ}$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 135



- Trazamos $\overline{AQ}$, luego por el criterio 8.14:

  $\Rightarrow$ P es circuncentro del $\Delta AQC$

  $\Rightarrow PC=\ell$

- Se nota que el $\Delta QPC$ es equilátero

  $\Rightarrow m\measuredangle QPC=60°$

- Por el criterio 8.13. P es circuncentro del : $\Delta ABC \Rightarrow BP=\ell$

- Como $PQ=PC=PB=\ell$

  $\Rightarrow$ P circuncentro del $\Delta BQC$

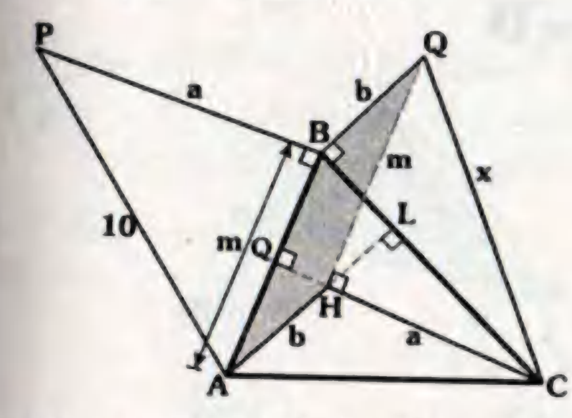
- Finalmente por teorema fundamentalmente :

$$x=\frac{60°}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=30°}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 136




- H : ortocentro $\Rightarrow \overline{AL}$ y $\overline{CQ}$ son alturas.

- Se observa que $AH=BQ=b$ y $\overline{AH}//\overline{BQ}$

  $\Rightarrow$ ABQH es un paralelogramo

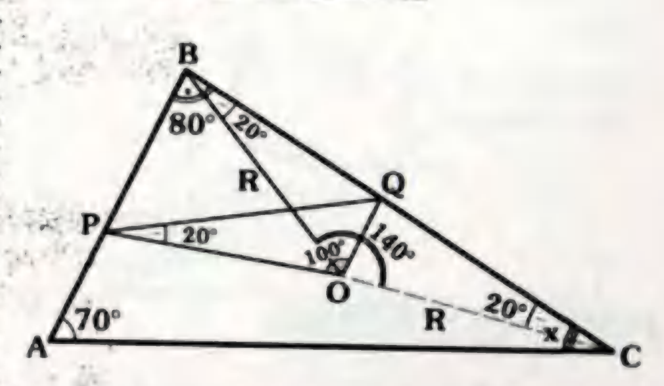
  $\Rightarrow QH=AB=m$

- $\triangle ABP \cong \triangle QHC$ (LAL)

$$\therefore\ \mathbf{x=10}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 137




- O :Circuncentro $\Rightarrow BO=OC=R$

  $m\measuredangle BOC=2(70°)=140°$

  $\Rightarrow m\measuredangle OBC=20°$

- $\square PBQO$ : Inscriptible

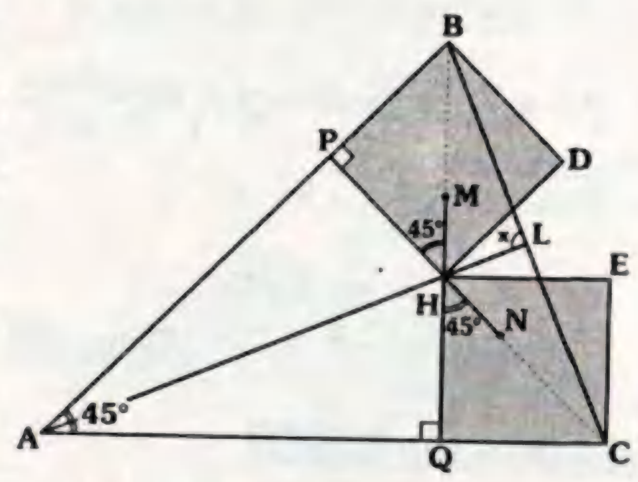
  $\Rightarrow m\measuredangle PBQ=80°$

- $\Delta ABC$ : $70°+80°+x=180°$

$$\therefore\ \mathbf{x=30°}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 138




- $\square APHQ$ : Inscriptible

  $\Rightarrow m\measuredangle PHM=m\measuredangle PAQ=45°$

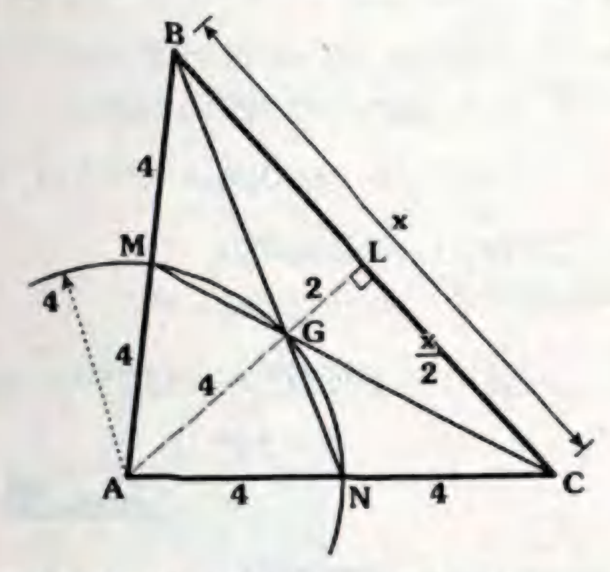
- Como BPHD es un cuadrado, al prolongar $\overline{HM}$ llega al punto B.

- Analogamente la prolongación de $\overline{HN}$ llega a C.
- Se observa que $\overline{BQ}$ y $\overline{CP}$ son alturas del $\Delta ABC$.

$\therefore$ **x = 90°**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 139




- Como G es baricentro:

AM=MB=4 y AN=NC=4

- Por teorema fundamental: $GL=\dfrac{4}{2}=2$
- ⊿ALC : $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=8^2-6^2$

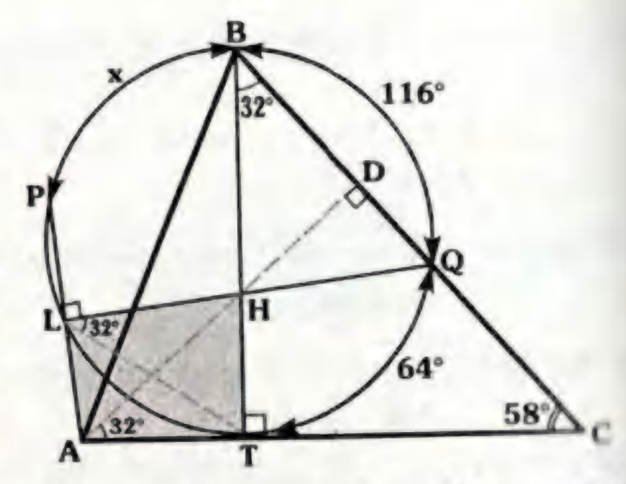
$\therefore$ $\mathbf{x=4\sqrt{7}}$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 140

- H: Ortocetro $\Rightarrow$ $\overline{BT}$ y $\overline{AD}$ son alturas.
- ⊿BTC : $m\measuredangle TBC=32°$ ,

⊿ADC : $m\measuredangle DAC=32°$




- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle QLT=32°$
- ⊿ALHT :. Inscriptible

$\Rightarrow$ $m\measuredangle PLH=90°$

- Por ángulo inscrito : $m\widehat{PBQ}=180°$

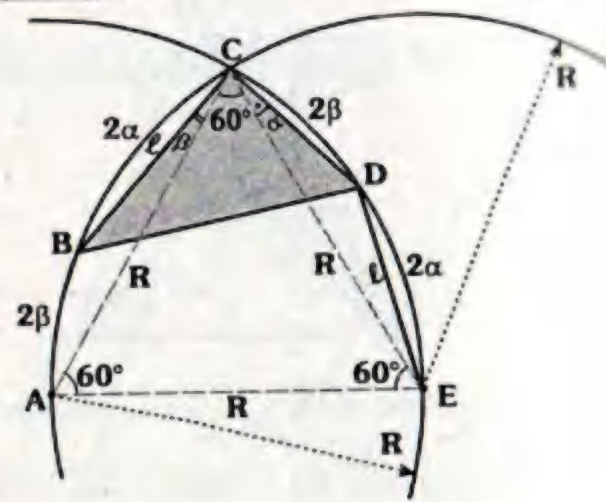
$\Rightarrow$ $x+116°=180°$

$\therefore$ **x = 64°**

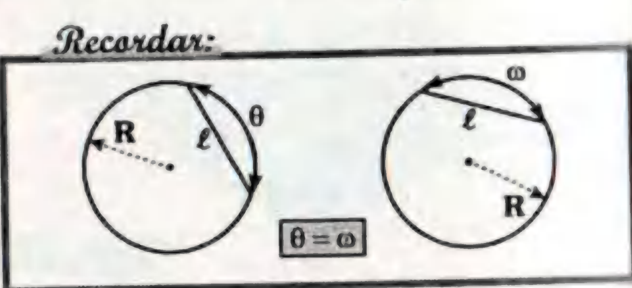
**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 141

**Paso 1**

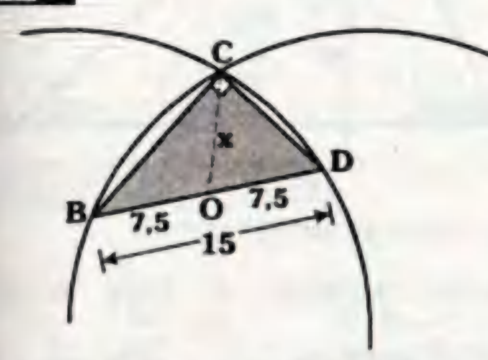



***Recordar:***



- Se observa que el $\Delta ACE$ es equilátero.
- Como : $ED = BC = \ell$
  $\Rightarrow m\widehat{ED} = m\widehat{BC} = 2\alpha$
- Luego, $m\widehat{CD} = m\widehat{AB} = 2\beta$
  (ya que $m\widehat{EC} = m\widehat{AC} = 60^\circ$)
- Se nota : $m\widehat{CE} = 60^\circ = 2\alpha + 2\beta$
  $\Rightarrow \alpha + \beta = 30^\circ$
- Entonces el $\Delta BCD$ es rectángulo.

**Paso 2**




- Como $\Delta BCD$ : Rectángulo
  $\Rightarrow$ C es su ortocentro y el punto medio de $\overline{BD}$ (O) es su circuncentro.
- Luego por el teorema $\triangle$:

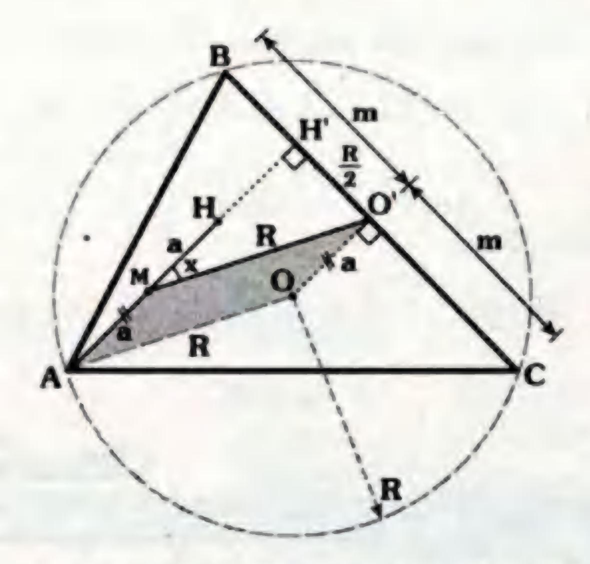
  $\therefore$ $\mathbf{x = 7,5}$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 142

- Como H es ortocentro
  $\Rightarrow$ A ; H y H' son colineales.
- Por el teorema 9.4. : $\overline{OO'} \perp \overline{BC}$

  $\Rightarrow OO' = \dfrac{AH}{2} = a$

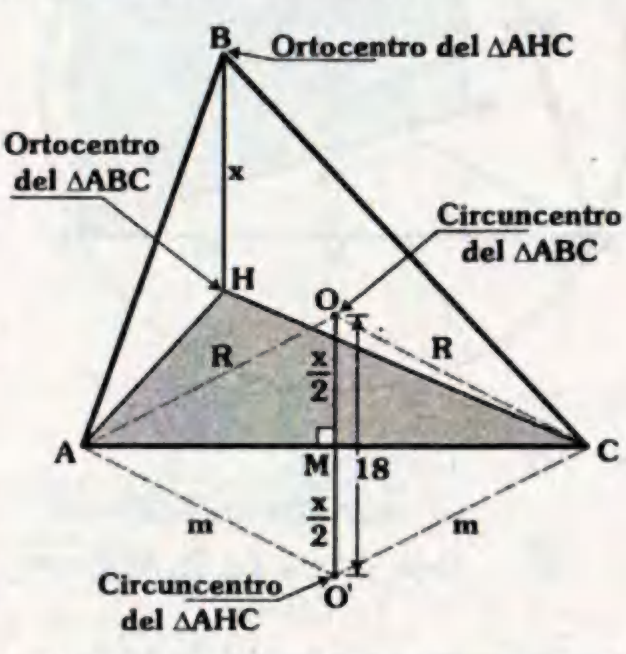



- Luego AMO'O es un paralelogramo (ya que $OO'AM = a$ y $\overline{OO'} /\!/ \overline{AM}$ )
  $\Rightarrow MO' = R$
- $\triangle MH'O$ : Notable de $30^\circ$ y $60^\circ$

  $\therefore$ $\mathbf{x = 30^\circ}$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 143




- Se observa $AOCO_1$ es un trapezoide simétrico $\Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{OO_1}$

Por el teorema 9,6 :

$\Delta ABC: \quad OM = \dfrac{x}{2}$

$\Delta AHC: \quad O_1M = \dfrac{x}{2}$

Se nota : $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2} = 18$

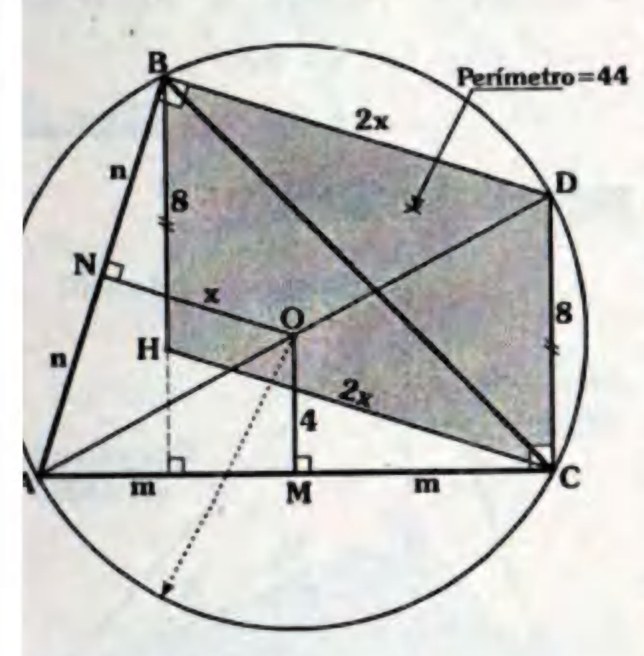
$\therefore \ \mathbf{x = 18}$

**Clave E**

**Nota**

*Se concluye que* $AOCO_1$ *es un rombo.*

## RESOLUCIÓN N° 144




$\overline{AD}$ : Diámetro

$\Rightarrow m\measuredangle ABD = m\measuredangle ACD = 90°$

$\overline{OM}$ : Base media del ◺ADC

$\Rightarrow CD = 8$

$\overline{ON}$ : Base media del ◺ABD

$\Rightarrow BD = 2x$

Por el teorema 9.6: $BH = 8$

- Se nota : BHCD es un paralelogramo

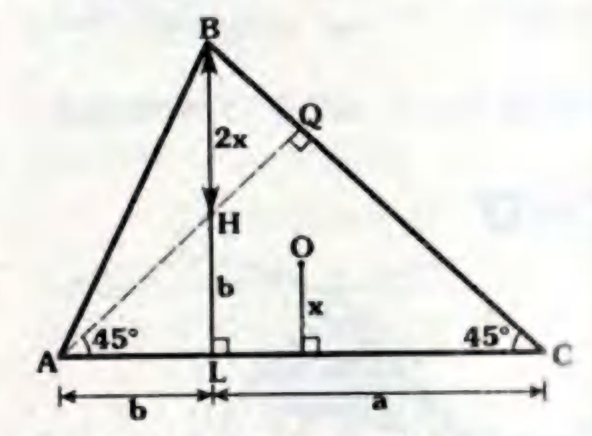
$\Rightarrow CH = 2x$

- Perím. $_{ABCH} = 44 = 8 + 2x + 8 + 2x$

$\therefore \ \mathbf{x = 7}$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 145

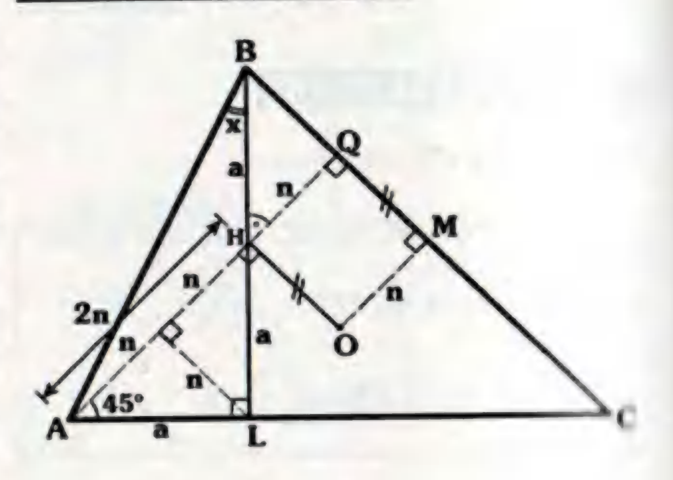



- Se ubica el ortocentro H.
- ◺ALH notable $\Rightarrow$ $HL = AL = b$
- Por el teorema 9.6: $BH = 2x$
- ◺BLC; notable $\Rightarrow$ $2x + b = a$
- Dato $a - b = 4$

$\therefore \ \mathbf{x = 2}$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 146

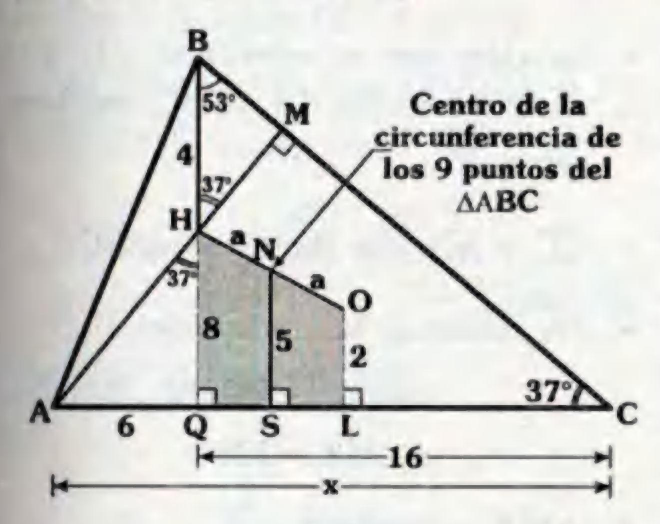


- Se traza la altura $\overline{AQ}$ y $\overline{OM} \perp \overline{BC}$.
- HQMO : Rectángulo $\Rightarrow$ OM=HQ=n
- Por el teorema 9.6: AH=2n
- Luego trazamos $\overline{LN} \perp \overline{AH}$
  $\Rightarrow \Delta BQH \cong \Delta LNH$ (ALA) $\Rightarrow$ NH = n
- AN=NH=NL=n (⊿)
- ⊿ANL : Notable $\Rightarrow m\measuredangle NAL = 45°$
- ⊿AHL : Notable $\Rightarrow$ AL = a
- ⊿ALB : Notable

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{53°}{2}}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 147




- Trazamos la altura BQ y $\overline{OL} = \frac{4}{2} = 2$
- Por el teorema 9.6 : $OL = \frac{4}{2} = 2$
- $\overline{NS}$ : Base media del trapecio HOLQ

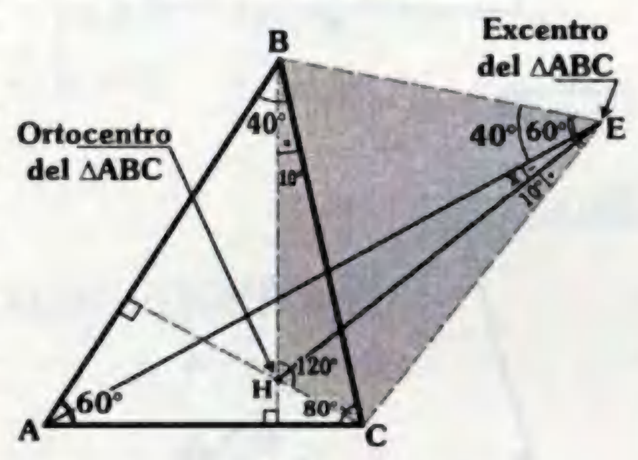
$$\Rightarrow 5 = \frac{HQ+2}{2} \Rightarrow HQ = 8$$

- ⊿AHQ : Notable $\Rightarrow$ AQ=6
- ⊿BQC : Notable $\Rightarrow$ QC=16

$$\therefore\ \mathbf{x = 22}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 148




- Por teoremas fundamentales :

$$m\measuredangle BHC = 180° - 60° = 120°\ ,$$

$$m\measuredangle BEC = 90° - \frac{60°}{2} = 60° \text{ y}$$

$$m\measuredangle BEA = \frac{80°}{2} = 40°$$

- ◇BHCE : Inscriptible
  $\Rightarrow m\measuredangle HEC = 10°$
- En "E" : $60° = 40° + x + 10°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 10°}$$

**Clave E**

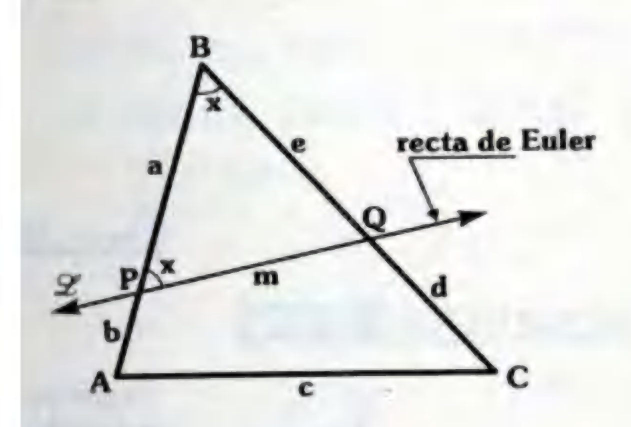
## RESOLUCIÓN N° 149

**Paso 1**

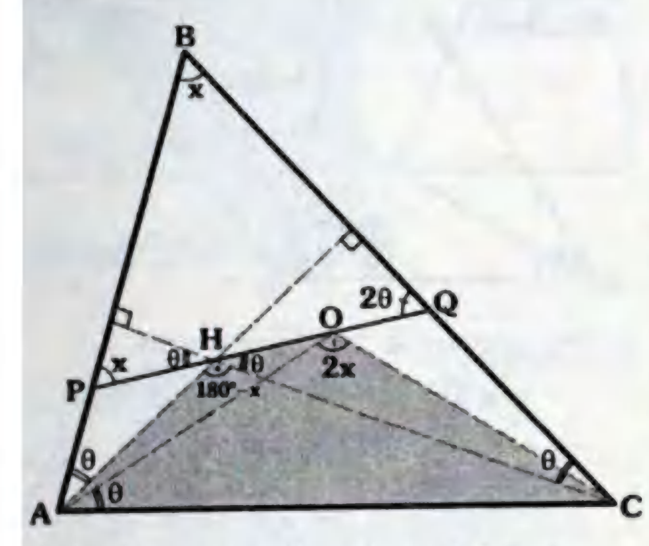
- Del dato :

$$(a+b+c+d+e)-(b+c+d+m) = a$$

$$\Rightarrow e = m \Rightarrow m\measuredangle BPQ = x$$



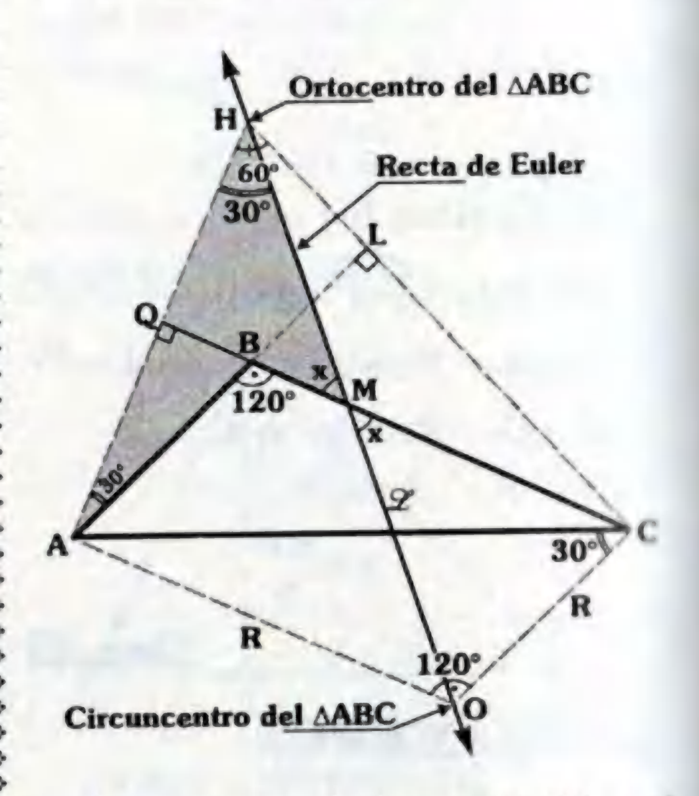

**Paso 2**




- Por teoremas fundamentales :
  $m\measuredangle AHC = 180° - x$ y $m\measuredangle AOC = 2x$
- Se observa : $x + \theta = 90°$ ... (I)
- $\Delta PBQ$ : $x + x + m\measuredangle BQP = 180°$ ... (II)
- De (I) y (II) : $m\measuredangle BQP = 2\theta$
- Por el teorema 9.4 : $m\measuredangle OAC = \theta$
- $\Delta HQC$ : Por ángulo exterior
  $m\measuredangle QHC = \theta$
- $\Delta AHOC$ : Inscriptible
  $\Rightarrow 180° - x = 2x$
  $\therefore$ **x = 60°**

**Clave B**

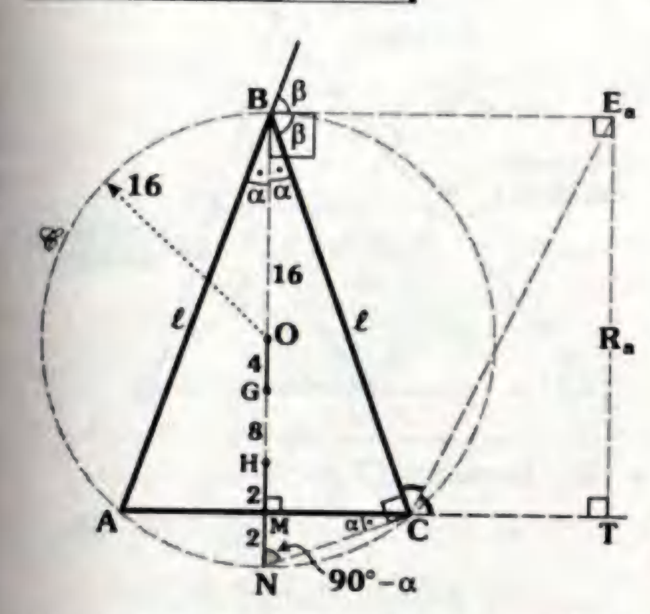
## RESOLUCIÓN N° 150




- Se sabe que el ortocentro (H) y el circuncentro (O) del $\Delta ABC$ pertenecen a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ .
- $\overline{CL}$ y $\overline{AQ}$ son alturas del $\Delta ABC$ .
- Por teoremas fundamentales :
  $m\measuredangle AHC = 60°$ y
  $m\measuredangle AOC = 120°$
- $\Delta AOC$ : Isósceles
  $\Rightarrow m\measuredangle ACO = m\measuredangle OAC = 30°$
- $\triangle AHCO$ : Inscriptible
  $\Rightarrow m\measuredangle AHO = 30°$
- En $\triangle HQM$: $x + 30° = 90°$
  $\therefore$ **x = 60°**

**Clave**

## RESOLUCIÓN N° 151

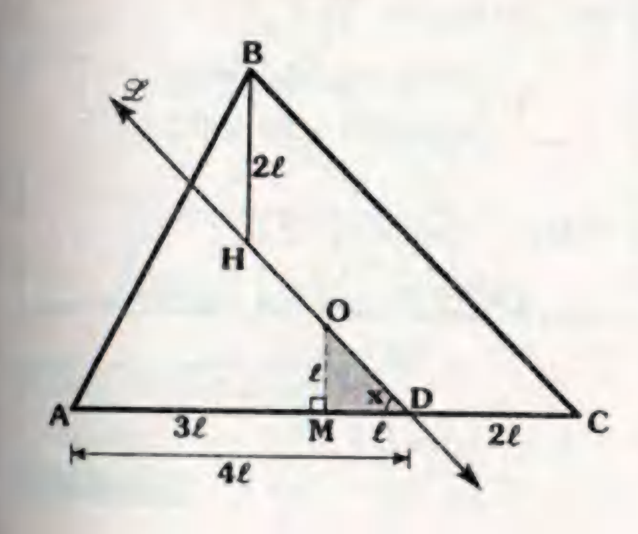



- Como el $\Delta ABC$ es isósceles $\Rightarrow$ B, O, G y H son colineales.
- Por el teorema 9.5 : $HN=2$
- Por el teorema 12.6 : $GH=8$
- Se observa que el circunradio es 16.
- $BMTE_a$ : Rectángulo

$$\therefore\ R_a = 30$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 152




- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es la recta de Euler, el circuncentro O pertenece a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.
- Trazamos $\overline{OM} \perp \overline{AC}$, por el teorema 9.6.

$$OM = \frac{BH}{2} \Rightarrow OM = \ell$$

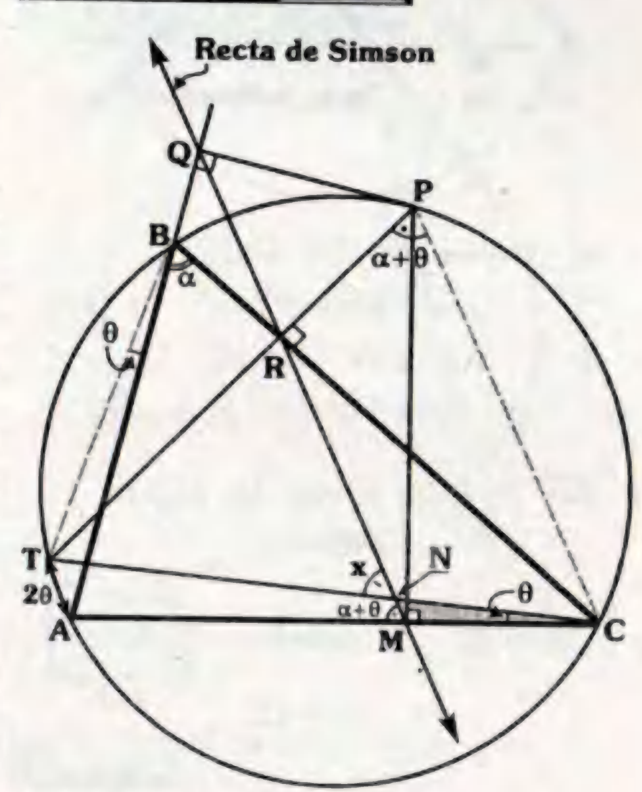
Además : $AM = MC = 3\ell \Rightarrow MD = \ell$

- $\triangle OMD$ : Notable

$$\therefore\ x = 45^\circ$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 153




- Por ángulo inscrito :

$$m\measuredangle TBA = m\measuredangle TCA = \theta$$
$$m\measuredangle TPC = \alpha + \theta$$

- $\overleftrightarrow{QM}$ : Recta de Simson $\Rightarrow \overline{PR} \perp \overline{BC}$
- $\square PRMC$ : Inscriptible

$$\Rightarrow m\measuredangle RPC = m\measuredangle RMA = \alpha + \theta$$

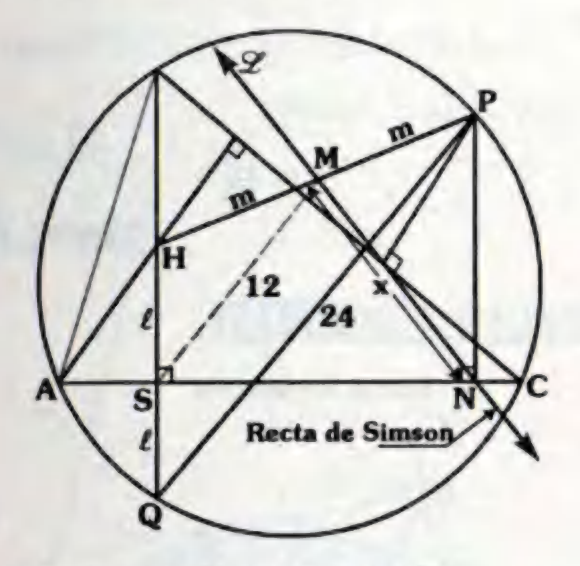
- Por ángulo exterior $\Delta MNC$:

$$x+\theta=\alpha+\theta$$

$\therefore$ $\mathbf{x=\alpha}$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 154




- H : Ortocentro del $\Delta ABC$

$\Rightarrow$ $HS=SQ=\ell$

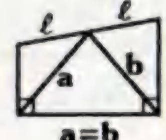
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: Recta de Simson

$\Rightarrow$ $HM=MP=m$ (ver pág. 78)

- $\overline{MS}$ : Base media del $\Delta QHP$

$\Rightarrow$ $MS=12$

- ⊡SHPN : Trapecio




$\therefore$ $\mathbf{x=12}$

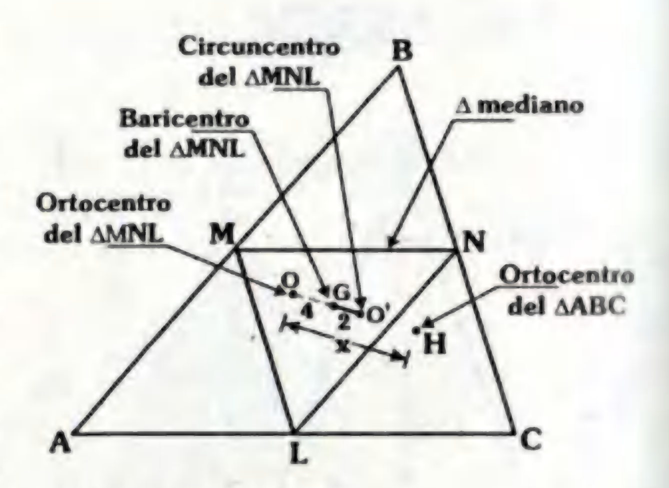
**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 155

**Paso 1**

- $\Delta MNL$ : Teorema 12.6

$$O\begin{cases}\text{Circuncentro del } \Delta ABC.\\ \text{Ortocentro del } \Delta MNL.\end{cases}$$

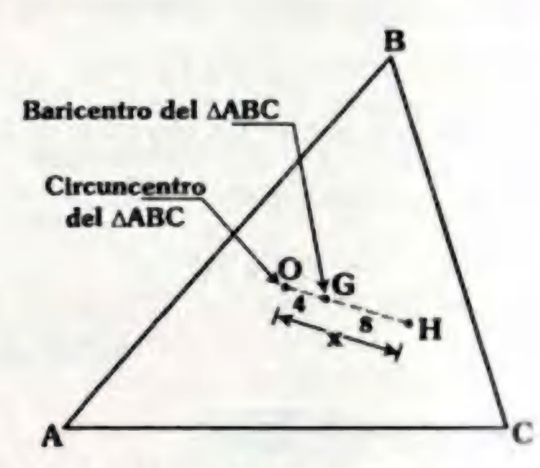



- Por teorema 11.3 :

$\Rightarrow$ O, G y O' son colineales y

$OG=2(GO')=4 \Rightarrow OG=6$

**Paso 2**




- Por el teorema 11.2:

$$G\begin{cases}\text{Baricentro del } \Delta ABC\\ \text{Baricentro del } \Delta MNL\end{cases}$$

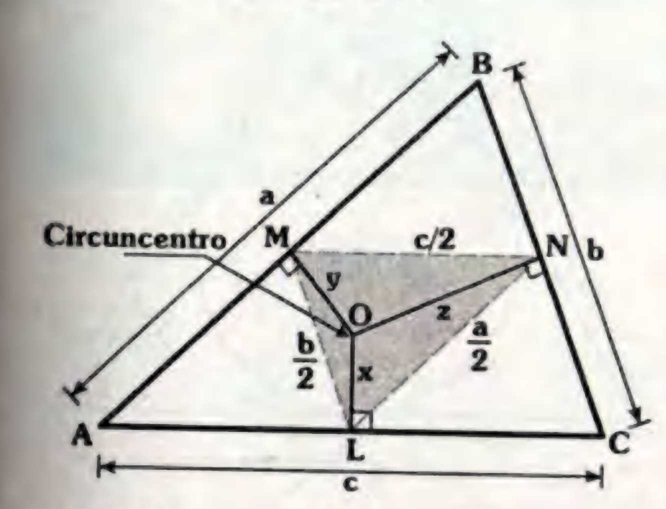
- $\Delta ABC$ : Teorema 12.6

$\Rightarrow$ O, G y H son colineales y $GH=8$

$\therefore$ $\mathbf{x=12}$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 156




- Por el teorema 9.4 :

  M, N y L son puntos medios

  $\Rightarrow$ MNL : Triángulo mediano del triángulo ABC.

- De la observación :

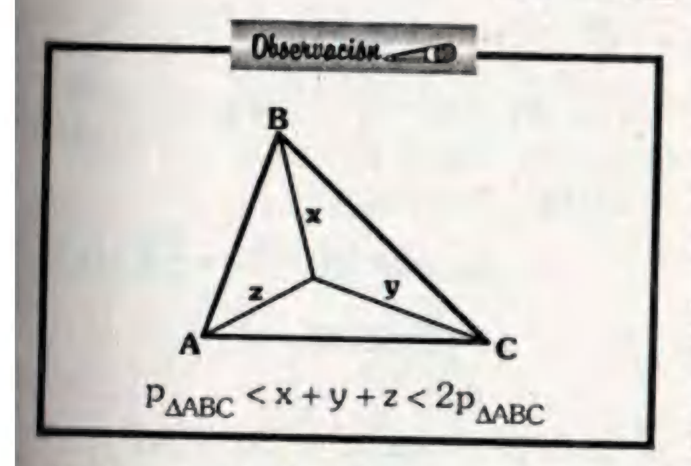
$$p_{\Delta MNL} < x+y+z < 2p_{\Delta MNL}$$

- Pero, del dato : $a+b+c=8$

$$\Rightarrow \quad 2 < x+y+z < 4$$

$$\therefore \quad \mathbf{(x+y+z)_{entero} = 3}$$

**Clave D**

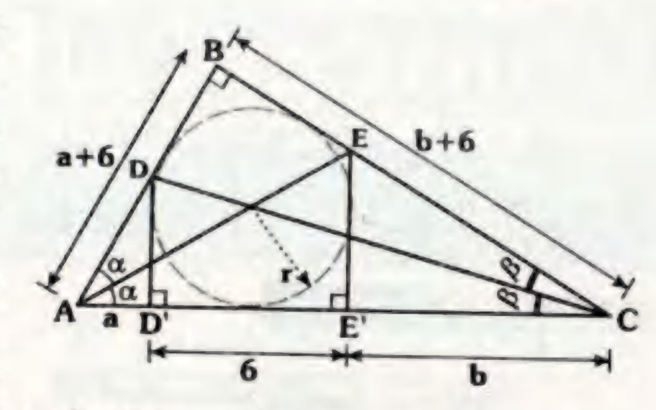



$$p_{\Delta ABC} < x+y+z < 2p_{\Delta ABC}$$

## RESOLUCIÓN N° 157

- Por teorema de la bisectriz :

  $AB = AE' = a+6$ y $BC = CD' = 6+b$



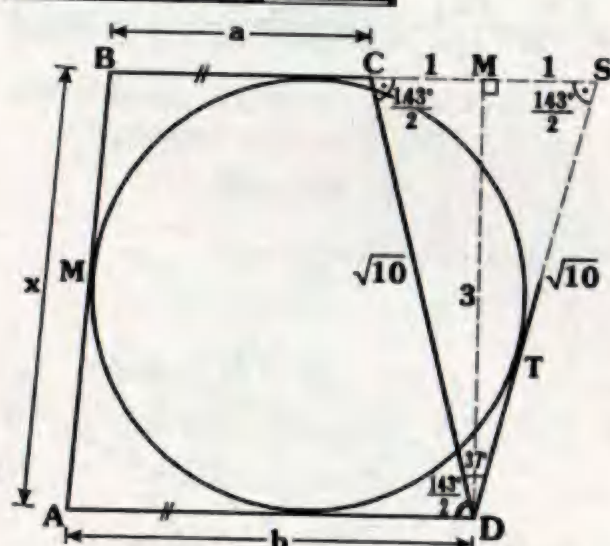

- $\triangle$ABC : Teorema de Poncelet

$$\Rightarrow \quad a+6+b+6 = a+6+b+2r$$

$$\therefore \quad \mathbf{r = 3}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 158




- Prolongamos $\overline{DT}$ y $\overline{BC}$ hasta que se corten en S.

- Por ángulo alternos internos :

$$m\measuredangle SCD = \frac{143°}{2}$$

- $\Delta$SCD : Isósceles $\Rightarrow DS = \sqrt{10}$

- $\Delta$CMD : Notable $\Rightarrow CM = MS = 1$

- ABCD : Teorema de Pitot

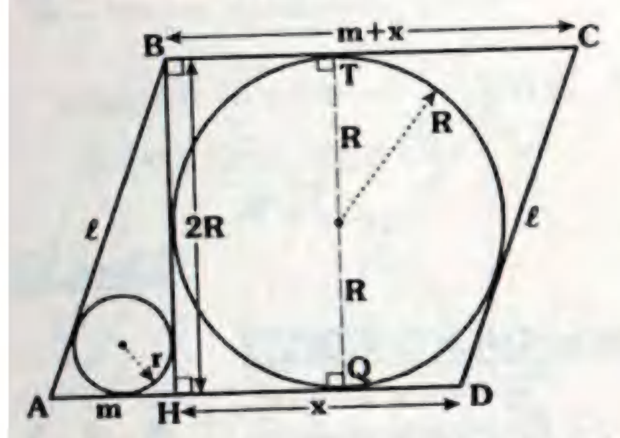
$$\Rightarrow \quad x+\sqrt{10} = a+2+b$$

Pero, $\frac{a+b}{2}=5$ (*dato*) $\Rightarrow$ $a+b=10$

$\therefore\ \mathbf{x=12-\sqrt{10}}$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 159




- Aprovechando teoremas de circunferencia, HBTQ es un rectángulo

$\Rightarrow\ BH=2R$

- ABCD : Paralelogramo

$\Rightarrow\ AB=CD=\ell$ y

$BC=AD=m+x$

- ⏢HBCD : Teorema de Pitot

$\Rightarrow\ x+m+x=2R+\ell$ ... (I)

- ◺ABH : Teorema de Poncelet

$\Rightarrow\ 2R+m=\ell+2r$ ... (II)

- (I) – (II) :

$x+m+x-(2R+m)=2R+\ell-(\ell+2r)$

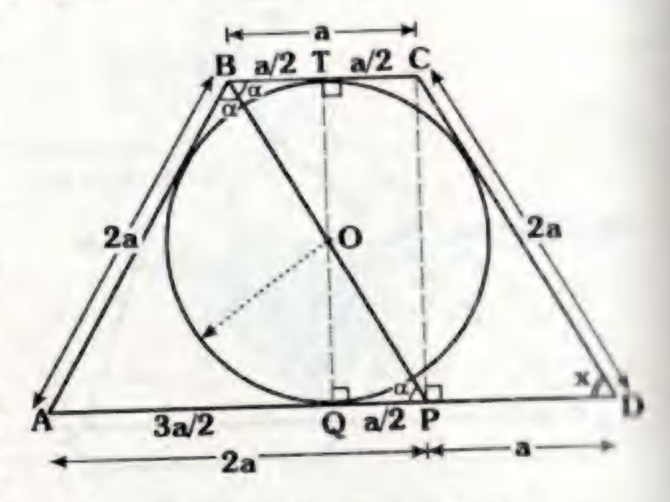
$\Rightarrow\ 2x+\cancel{m}-2R-\cancel{m}=2R+\cancel{\ell}-\cancel{\ell}-2r$

$2x=4R-2r$

$\therefore\ \mathbf{x=2R-r}$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 160




- Por teoremas de circunferencia :

$m\measuredangle ABO=m\measuredangle OBC=\alpha$ y

$m\measuredangle OTC=m\measuredangle OQP=90^\circ$

- Por ángulos alternos internos :

$m\measuredangle BPA=\alpha$

- $\triangle ABP$ : Isósceles $\Rightarrow$ $AB=AP=2a$

- ⏢ABCD : Teorema de Pitot

$\Rightarrow\ 2a+2a=3a+BC$

$\Rightarrow\ BC=a$

- $\overline{QT}$ : Eje de simetría

$\Rightarrow\ BT=TC=\frac{a}{2}$ ; $AQ=QC=\frac{3a}{2}$

- QTCP : Rectángulo

(ya que $QP=TC=\frac{a}{2}$)

$\Rightarrow\ m\measuredangle CPQ=90^\circ$

- ◺CPD : Notable de 30° y 60°.

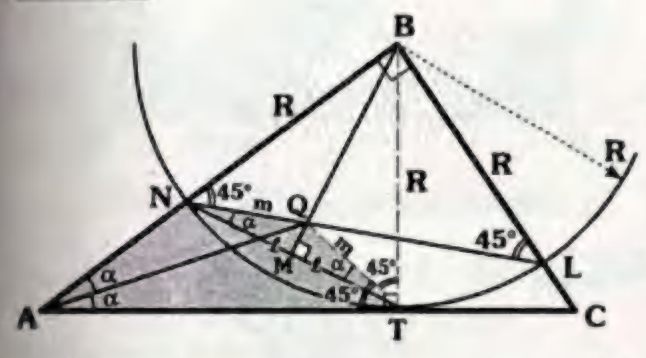
$\therefore\ \mathbf{x=60^\circ}$

**Clave A**

# Solucionario Ciclo Repaso

## RESOLUCIÓN N° 161

**Paso 1**




- $\triangle$NBL : Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle BNL=45°$
- Por teorema de circunferencia :

  $NM = MT = \ell$

- $\Delta$NQT : Isósceles

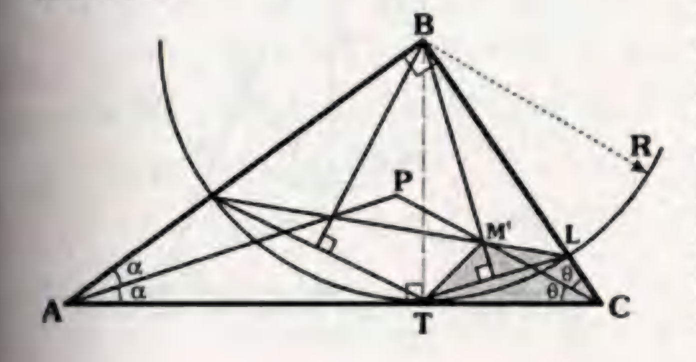
  $\Rightarrow m\measuredangle QNT = m\measuredangle QTN = \alpha$

- $\Delta$BNT : Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle QTB=45°$
- $\square$ANQT : Inscriptible

  $\Rightarrow m\measuredangle NAQ = m\measuredangle QAT = \alpha$

  $\Rightarrow \overrightarrow{AQ}$ : Bisectriz interior del $\Delta ABC$

**Paso 2**




- De igual modo, $\square$TM'LC es inscriptible

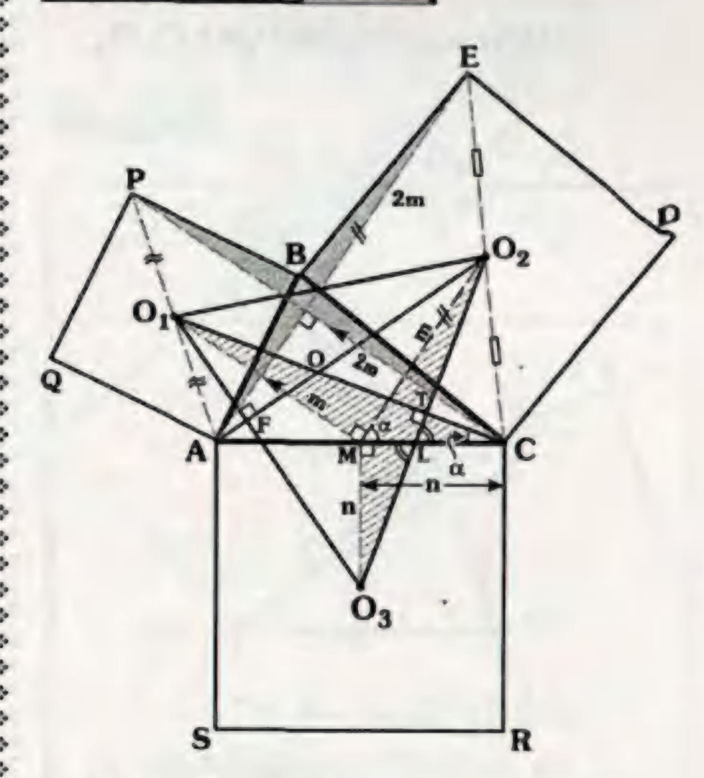
  $\Rightarrow m\measuredangle LCM' = m\measuredangle TCM' = \theta$

- $\overrightarrow{CM'}$ : Bisectriz interior del $\Delta ABC$.

  $\therefore$ **P : Incentro del $\Delta ABC$**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 162




- De la observación :

  $PC = AE = 2m$ y $\overline{AE} \perp \overline{PC}$

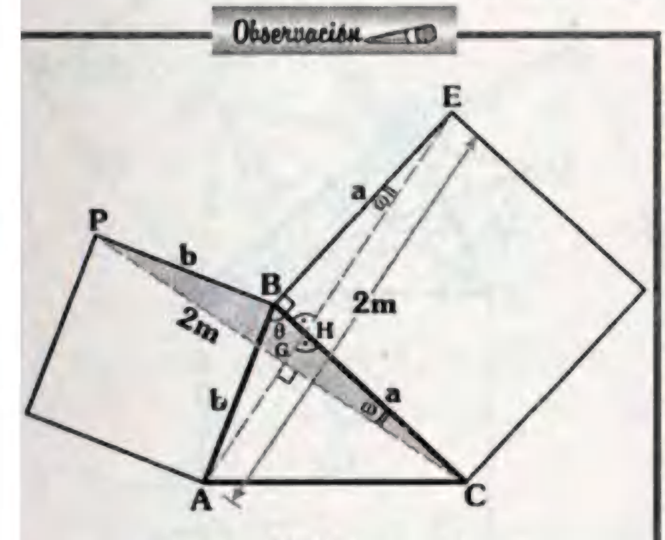
- Trazamos $\overline{O_3M} \perp \overline{AC}$, como ACRS es cuadrado $\Rightarrow O_3M = MC = n$

- $\overline{O_1M}$ : Base media del $\Delta PAC$
  $\Rightarrow \overline{O_1M} // \overline{PC}$ y $O_1M = m$
- $\overline{O_2M}$ : Base media del $\Delta REC$
  $\Rightarrow \overline{O_2M} // \overline{AE}$ y $O_2M = m$
- Por ángulos entre paralelas :
  $m\measuredangle O_1MO_2 = 90°$
- $\Delta O_2MO_3 \cong \Delta O_1MC$ (LAL)
  $\Rightarrow m\measuredangle MO_3O_2 = m\measuredangle MCO_1 = \alpha$
- ◺LTC : Por ángulo exterior
  $\Rightarrow m\measuredangle LTO_1 = 90°$
- Del mismo modo $m\measuredangle O_1FO_2 = 90°$

$\therefore$ **O : Ortocentro del $\Delta O_1O_2O_3$**

**Clave C**

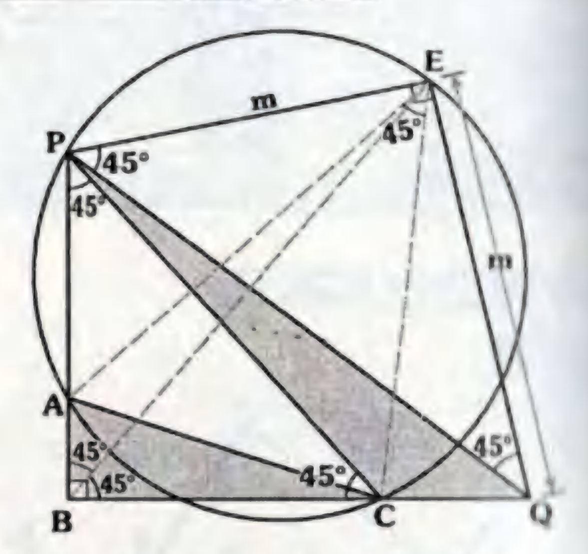
*Observación*




- $\Delta ABE \cong \Delta PBC$ (LAL)
  $\Rightarrow m\measuredangle PCB = m\measuredangle BEA = \omega$ y
  $PC = AE = 2m$
- $\Delta HGC$ : Por ángulo exterior
  $m\measuredangle CGA = 90°$

$\therefore \overline{AE} \perp \overline{PC}$

## RESOLUCIÓN N° 163

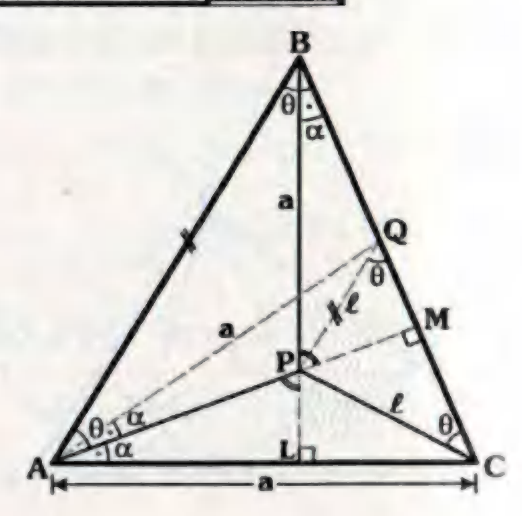



- Por Definición : $m\measuredangle EBC = 45°$
- ⏢BPEQ : Inscriptible
  $m\measuredangle EPQ = m\measuredangle EQP = 45°$
- Por teorema fundamental :
  $$m\measuredangle REC = 90° - \frac{90°}{2} = 45°$$
- Por ángulo inscrito: $m\measuredangle APC = 45°$
- $\Delta PCQ$: Por el criterio 8.15.

$\therefore$ **E : Circuncentro del $\Delta PCQ$**

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 164

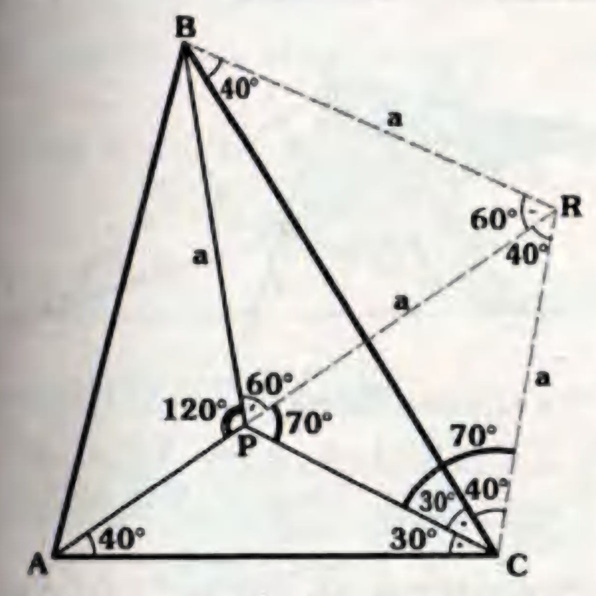


- Trazamos $\overline{PQ} // \overline{AB}$
  $\Rightarrow$ ABQP es un trapecio isósceles
  $\Rightarrow$ AQ=BP=a y
  $m\measuredangle PBQ = m\measuredangle QAP = \alpha$
- Se observa que el $\Delta$QPC es isósceles
  $\Rightarrow$ PQ=PC=$\ell$
- $\Delta APQ \cong \Delta APU$ (LLL) $\Rightarrow m\measuredangle PAC = \alpha$
- $\Delta$AQC: Isósceles $\Rightarrow$ $\overline{AM}$ es altura
- Luego al prolongar $\overline{BP}$ se nota que $\overline{BL}$ es altura.

$\therefore$ **P es ortocentro de ABC**

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 165



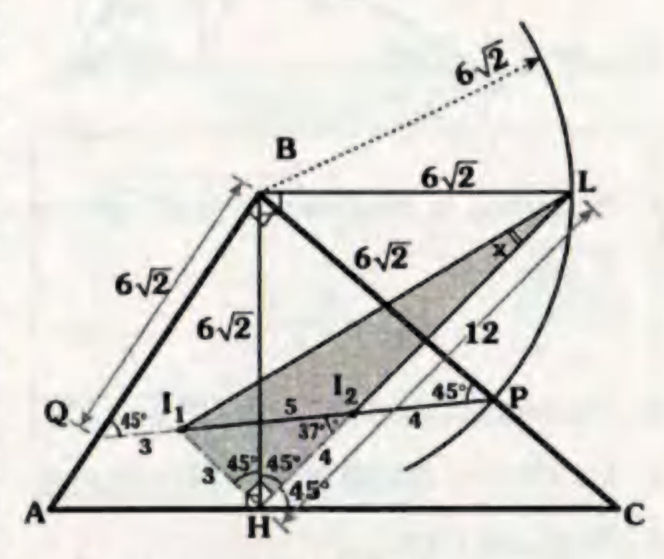

- Prolongamos $\overline{AP}$ hasta R, tal que : $m\measuredangle ARC = 40° \Rightarrow$ AC=CR=a
- $\Delta$PRC : Isósceles $\Rightarrow$ PR=RC=a
- $\Delta$PBR : Equilátero
  $\Rightarrow$ BR=a y $m\measuredangle BRP = 60°$
- $\Delta$BRC : Isósceles
  $\Rightarrow m\measuredangle RBC = m\measuredangle RCB = 40°$
- Como RPC es isósceles
  $\Rightarrow m\measuredangle RCP = 70° \Rightarrow m\measuredangle BCP = 30°$
- Se observa que $\overline{CP}$ es bisectriz y

$$m\measuredangle APB = 120° = 90° + \frac{60°}{2}$$

$\therefore$ **P : Incentro del $\Delta$ABC**
**(*criterio* 8.3)**

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 166



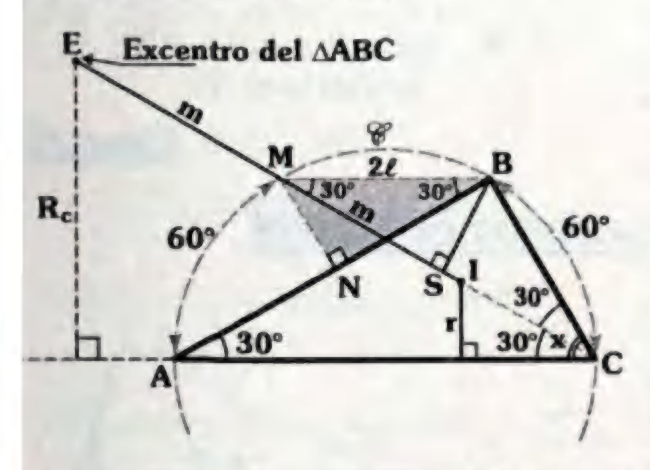

- Por el teorema 9.8. (c)
  $\Rightarrow m\measuredangle BQP = m\measuredangle BPQ = 45°$ ,
  QB=BH=BP ,
  $PI_2 = HI_2 = 4$ y $QI_1 = HI_1$
- $⊿\ I_1HI_2$ : Notable
  $\Rightarrow HI_3 = 3$ y $m\measuredangle I_1I_2H = 37°$
- ⊿QBP : Notable $\Rightarrow$ QB = BP = $5\sqrt{2}$
- Como BH = BL = $6\sqrt{2}$ , entonces $m\measuredangle BHL = 45°$
  $\Rightarrow$ H, $I_2$, L son colineales
- ⊿HBL : Notable $\Rightarrow$ HL=12

$\triangle I_1HL$ : Notable

$\therefore$ **x = 14°**

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 167




Trazamos la circunferencia $\mathscr{C}$, por el teorema 9.7:

$$MN = \frac{R-r}{2}$$

Por ángulo inscrito : $m\measuredangle BMC = 30°$

$\triangle MBS$ : Notable $\Rightarrow BM = 2\ell$

Pero, del dato :

$$R - r = 2\ell \Rightarrow \frac{R-r}{2} = \ell$$

$\triangle MNB$ : Notable $\Rightarrow m\measuredangle MBN = 30°$

Por ángulo inscrito : $m\measuredangle ACM = 30°$

$\therefore$ **x = 60°**

**Clave E**

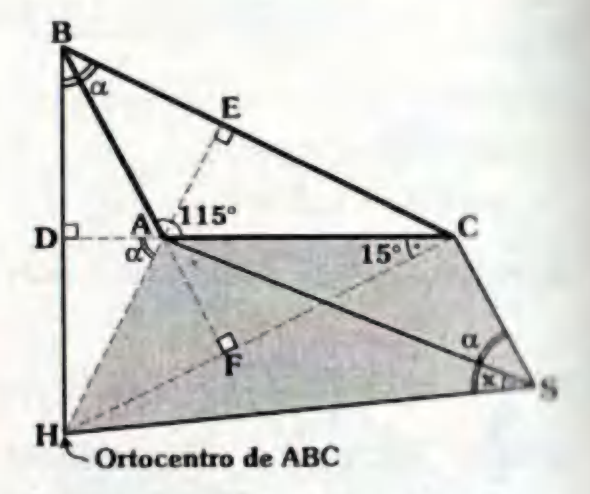
## RESOLUCIÓN N° 168

Como H es ortocentro :

$\overline{AE}$ , $\overline{BD}$ y $\overline{CF}$ son alturas del $\triangle ABC$

$\triangle ADBE$ : Inscriptible

$\Rightarrow m\measuredangle DAH = \alpha$

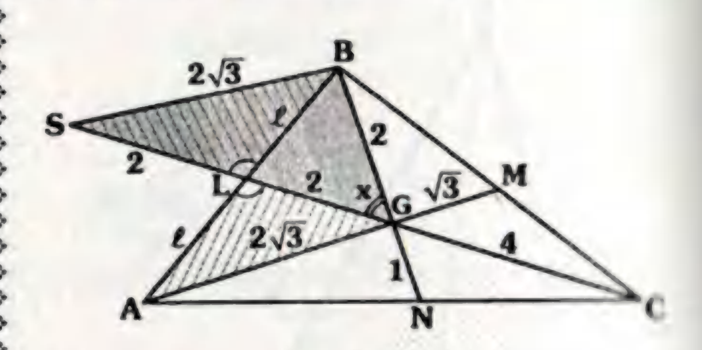



- $\triangle AFC$ : $m\measuredangle ACF = 15°$
- $\triangle AHSC$ : Inscriptible

$\therefore$ **x = 15°**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 169




- Por teorema de baricentro :

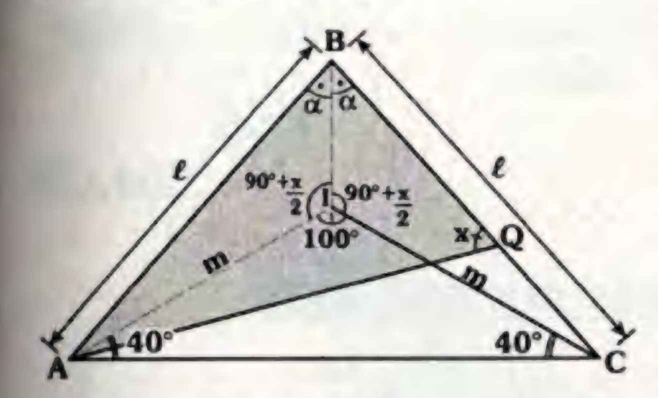
  $GC = 2(GL) = 4$ ; $GB = 2(GN) = 2$ ;

  $GA = 2(GM) = 2\sqrt{3}$
- Prolongamos $\overline{GL}$ hasta S, tal que LS=2
- $\Delta LBS \cong \Delta AGL$ (LAL) $\Rightarrow SB = 2\sqrt{3}$
- $\Delta SBG$ : Notable

$\therefore$ **x = 60°**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN Nº 170




- Por definición : $m\measuredangle ABI = m\measuredangle IBC = \alpha$
- Por teorema fundamental :

$$m\measuredangle AIB = 90° + \frac{x}{2}$$

- $\Delta ABI \cong \Delta BIC$ (LAL) $\Rightarrow$ $AI = IC = m$ y

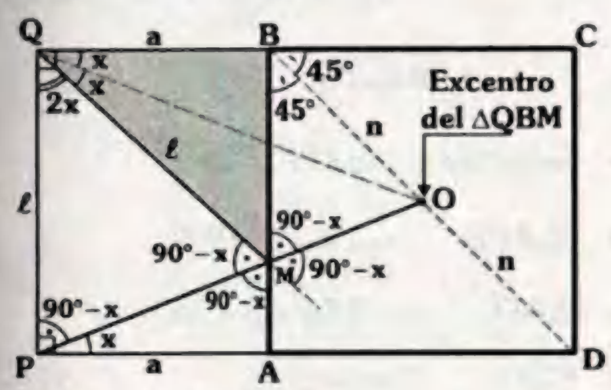
$$m\measuredangle BIC = m\measuredangle AIB = 90° + \frac{x}{2}$$

- $\Delta AIC$ : Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle AIC = 100°$
- En "I" : $90° + \frac{x}{2} + 100° + 90° + \frac{x}{2} = 360°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 80°}$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN Nº 171




- O : Centro

$\Rightarrow$ BO=OD=n y

$m\measuredangle ABO = m\measuredangle CBO = 45°$

- $\triangle$PQBD : $m\measuredangle BQO = m\measuredangle OPD = x$

*(Observación)*

- $\Delta PQM$ : Isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle QMP = 90° - x$ y

$m\measuredangle PQM = 2x$

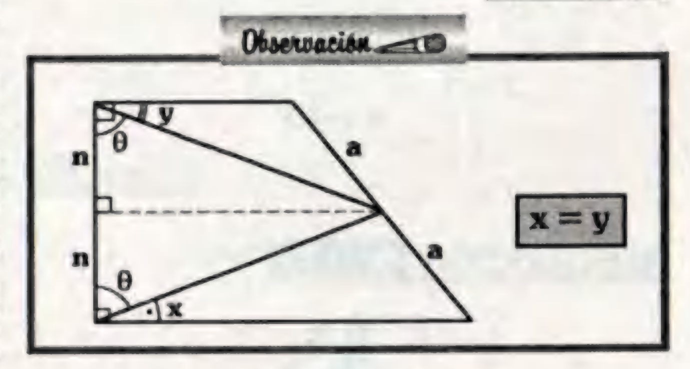
- O : Excentro del $\triangle$QBM

$\Rightarrow \overline{QO}$ : Bisectriz interior

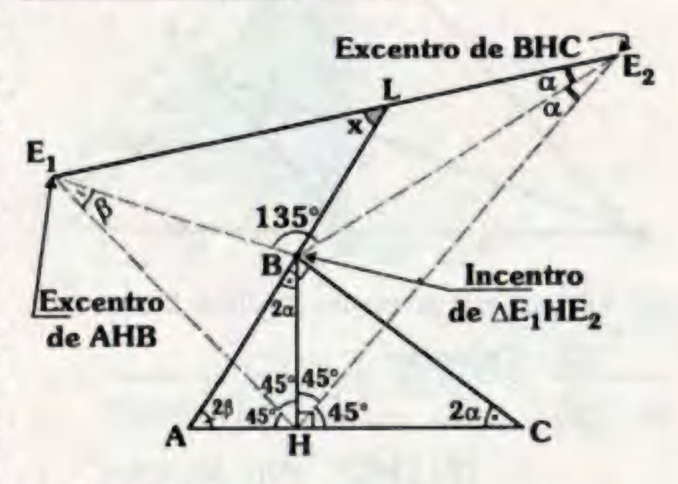
- En "Q" : $2x + x + x = 90°$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{45°}{2}}$$

**Clave D**




## RESOLUCIÓN Nº 172




- Por definición :

$m\measuredangle AHE_1 = m\measuredangle E_1HB = 45°$ y

$m\measuredangle CHE_2 = m\measuredangle E_2HB = 45°$

- $\triangle$ABC: $2\alpha + 2\beta = 90° \Rightarrow \alpha + \beta = 45°$

- Por teorema fundamental :

$m\measuredangle BE_1H=\dfrac{2\beta}{2}$ y $m\measuredangle BE_2H=\dfrac{2\alpha}{2}=\alpha$

- $\measuredangle E_1HE_2B$ : $m\measuredangle E_1BE_2=\alpha+90°+\beta$

$\Rightarrow m\measuredangle E_1BE_2=135°$

- $\Delta E_1HE_2$ : Se observa que $\overline{HB}$ es bisectriz interior y

$$m\measuredangle E_1BE_2=90°+\frac{90°}{2}$$

$\Rightarrow$ B : Incentro del $\Delta E_1HE_2$

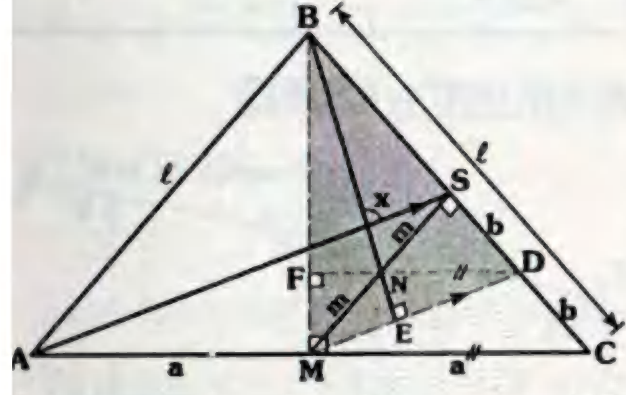
$\Rightarrow m\measuredangle HE_2B=m\measuredangle BE_2E_1=\alpha$

- $LBHE_2$ : Inscriptible

$\therefore$ **x = 45°**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 173




- Ubicamos el punto medio D de $\overline{SC}$, SD = DC = b.
- $\overline{DN}$ : Base media del $\Delta MSC$

$\Rightarrow \overline{DN}//\overline{MC}$, con lo cual $m\measuredangle DFM=90°$.

- Se observa que $\overline{DF}$ y $\overline{MS}$ son alturas del $\Delta BMD \Rightarrow$ N es ortocentro

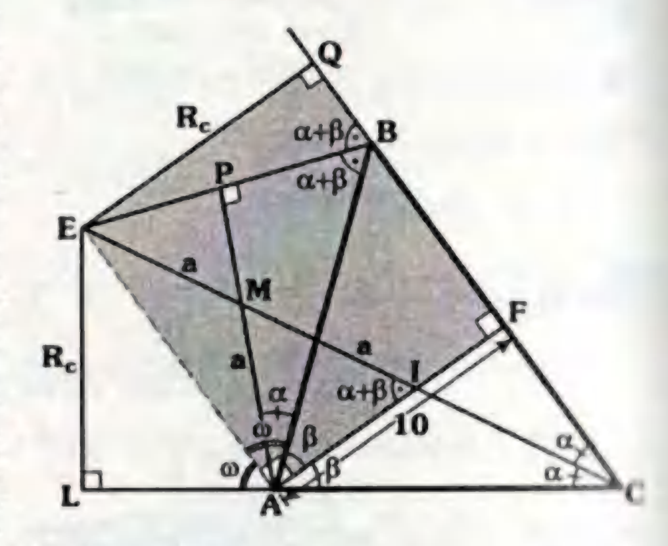
$\Rightarrow \overline{BE}$ es altura

- $\overline{MD}$ base del $\Delta ASC \Rightarrow \overline{DM}//\overline{AS}$
- Finalmente por ángulos correspondientes.

$\therefore$ **x = 90°**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 174




- I : Incentro

$\Rightarrow m\measuredangle BCI=m\measuredangle ACI=\alpha$ y

$m\measuredangle BAI=m\measuredangle CAI=\beta$

- E : Excentro

$\Rightarrow m\measuredangle EAL=m\measuredangle EAB=\omega$ y

$\Rightarrow m\measuredangle QBE=m\measuredangle EAB=\alpha+\beta$

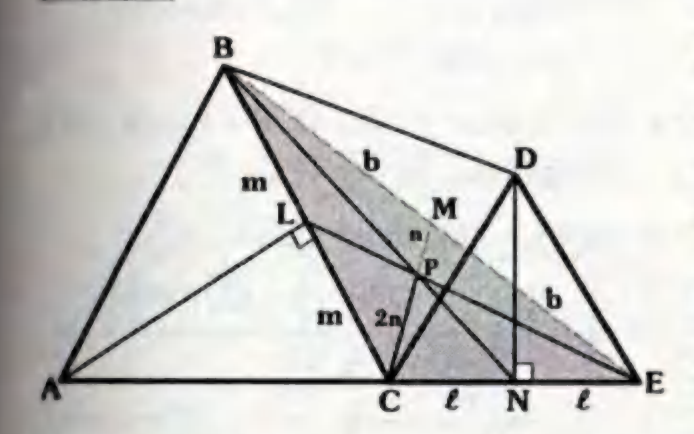
- Sabemos : $m\measuredangle EAI=90°$
- $\triangle APB$ : $\alpha+\alpha+\beta=90°$
- $\Delta AFC$ : $m\measuredangle BFA=\beta+2\alpha=90°$
- EQFA : Rectángulo

$\therefore$ $\mathbf{R_c=10}$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 175

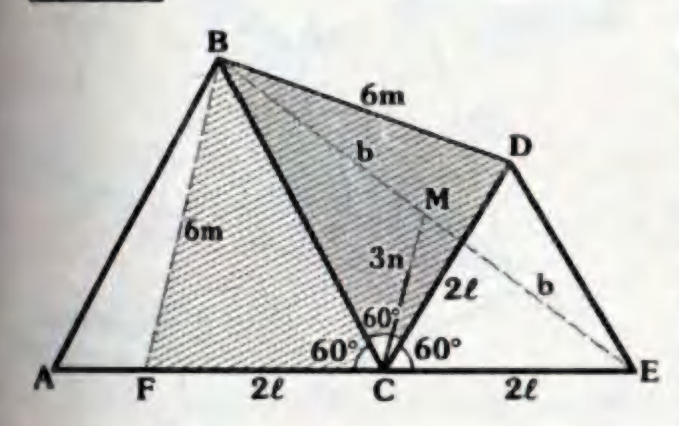
**Paso 1**




- $\overline{EL}$ y $\overline{BN}$ son medianas, entonces P es baricentro del $\Delta BCE$

$\Rightarrow BM = ME = b$ y $CP = 2(PM) = 2n$

**Paso 2**




- Se ubica S en $\overline{AC}$ tal que $SC = 2\ell$, $\overline{CM}$ : base media del $\Delta BSE$

$\Rightarrow BS = 6m$

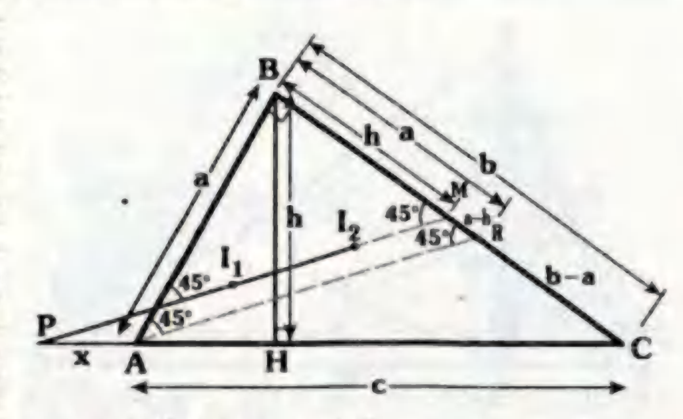
- $\Delta BSC \cong \Delta BCD$ (LAL)

$\Rightarrow BD = BS = 6m$

$$\therefore \quad \frac{BD}{CP} = \frac{6m}{2m} = 3$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 176




- Por el teorema 9.8 :

$m\measuredangle BMP = 45°$ y $BH = BM = h$

- Trazamos $\overline{AR} // \overline{PM} \Rightarrow AB = BR = a$
- $\Delta PMC$ : Teorema de Tales

$$\Rightarrow \quad \frac{a-h}{b-a} = \frac{x}{c} \qquad \text{... (I)}$$

- De la observación :

$$ab = ch \Rightarrow h = \frac{ab}{c} \qquad \text{... (II)}$$

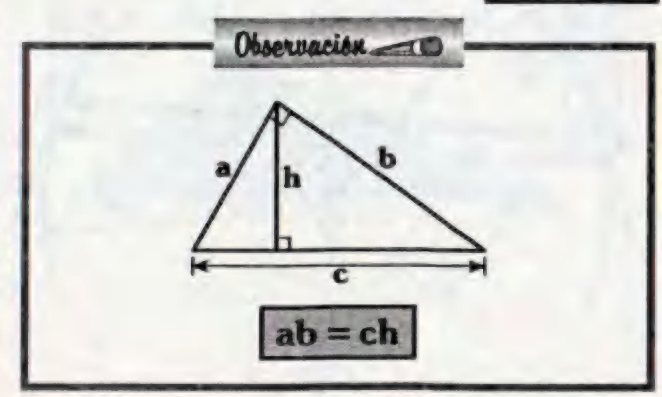
- Reemplazando (II) en (I) :

$$\frac{a - \frac{ab}{c}}{b-a} = \frac{x}{c}$$

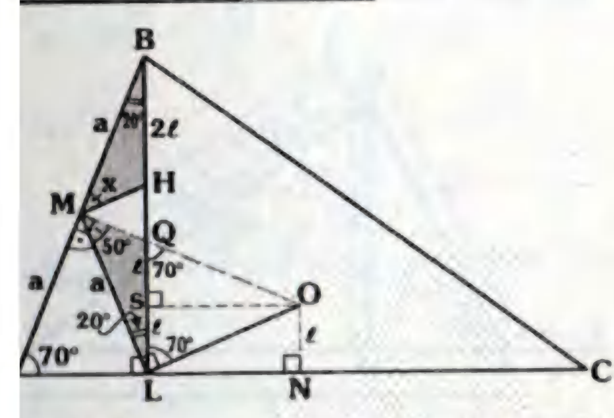
$$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{a(c-b)}{b-a}}$$

**Clave E**

**Observación**



## RESOLUCIÓN Nº 177




Por el teorema 9.6 : BM=2(ON)=2 ℓ

Por el teorema 9.4 : m∡AMO = 90º

◺ABL: Por el teorema

⇒ ML=a ⇒ m∡MLB=20º

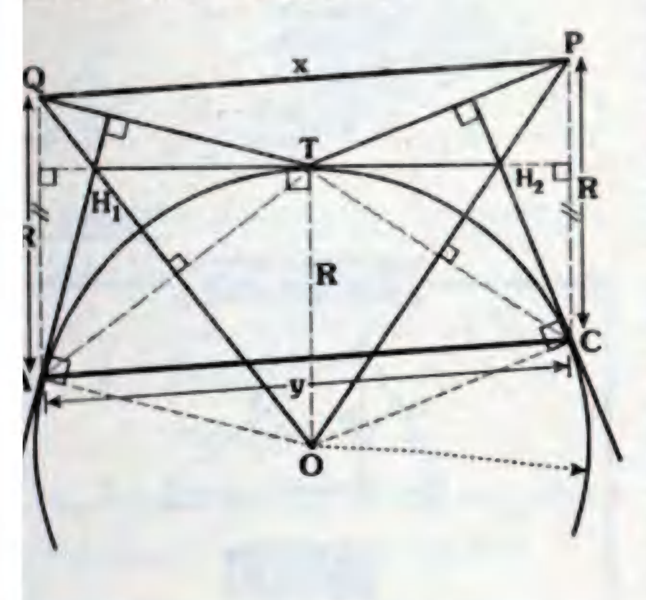
Luego, trazamos la altura OS del triángulo isósceles OQL (SLNO : rectángulo) ⇒ LS=SQ=2ℓ

ΔMHB ≅ ΔMQL (LAL)

$\therefore\ \mathbf{x = 50^\circ}$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN Nº 178

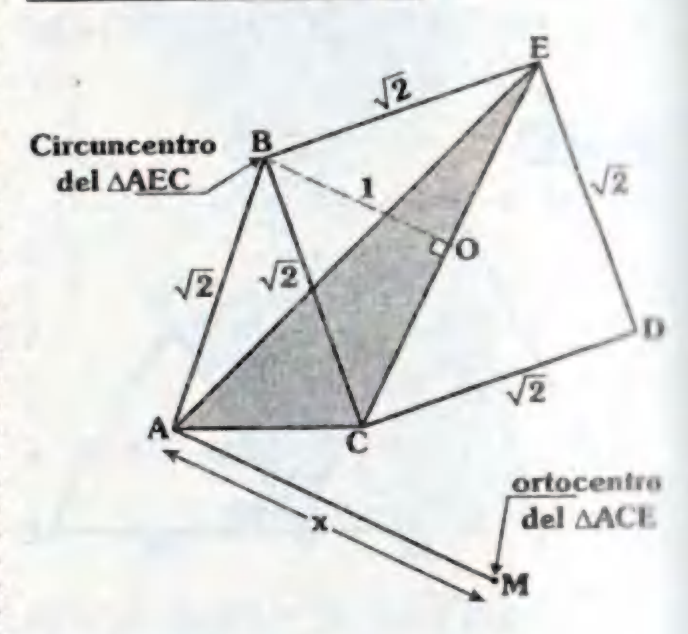



- $H_1$ : Ortocentro de AQT
- Se nota que : $\overline{AO}//\overline{QT}$ y $\overline{AQ}//\overline{TO}$
  ⇒ AQTO : Paralelogramo
  ⇒ AQ=TO=R
- Del mismo modo, OTPC es un paralelogramo ⇒ OT=PC=R
- AQPC : Paralelogramo
  (AQ=PC=R y $\overline{AQ}//\overline{PC}$)

$$\therefore\ \frac{x}{y} = 1$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN Nº 179

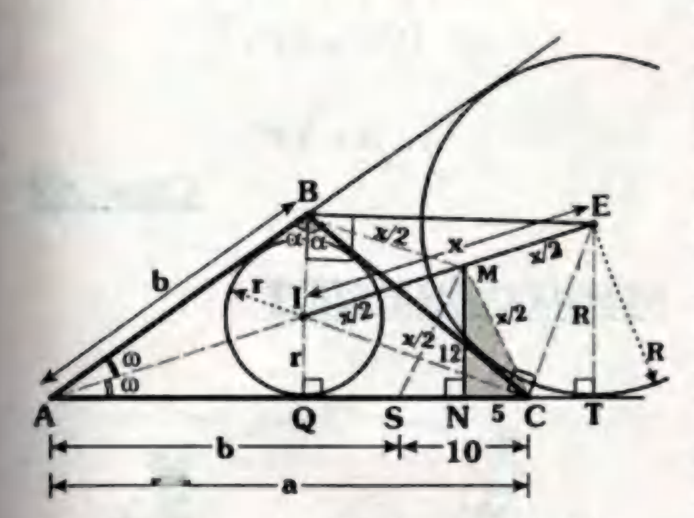



- Como AB=BC=BE= $\sqrt{2}$ :
  ⇒ B: Circuncentro del ΔACE
- Por propiedad del cuadrado BO=1.
- De la observación del teorema 9.6:
  x=2(1)

$\therefore\ \mathbf{x = 2}$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 180




- Sabemos : A, I, E son colineales
- Por el teorema 9.3 :

$$m\measuredangle IBE = m\measuredangle ICE = 90^\circ$$

- Sea : $IM = ME = \dfrac{x}{2}$

$$\Rightarrow CM = BM = \frac{x}{2}$$

- Luego, se ubica S en $\overline{AC}$, tal que $AS = b \Rightarrow SC = 10$ $(a - b = 10,$ *dato*$)$.
- $\Delta ABM \cong \Delta AMS$ (LAL) $\Rightarrow SM = \dfrac{x}{2}$
- $\overline{MN}$ : Base media del trapecio QIET

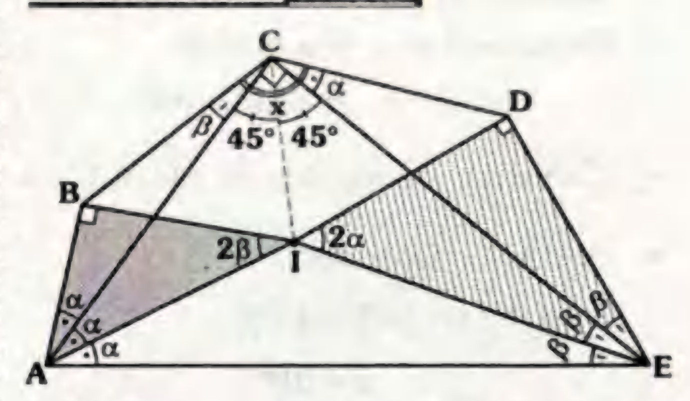
$$\Rightarrow MN = \frac{R+r}{2}$$

- Pero, $R + r = 24 \Rightarrow MN = 12$
- $\Delta SMC$ : Isósceles $\Rightarrow SN = NC = 5$
- $\Delta MNC$ : $5^2 + 12^2 = (x/2)^2$

$$\therefore \ \mathbf{x = 26}$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 181




- $\triangle ACE$ : $2\alpha + 2\beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 45^\circ$
- I : Incentro del $\triangle ACE$

$$\Rightarrow m\measuredangle ACI = m\measuredangle ECI = 45^\circ$$

- $\triangle ABI$ : $m\measuredangle AIB = 2\beta$
- Como $\overrightarrow{AC}$ :

Bisectriz y $m\measuredangle ACI = \dfrac{m\measuredangle ABI}{2}$, por el teorema $\Rightarrow$ C : Excentro del $\triangle ABI$

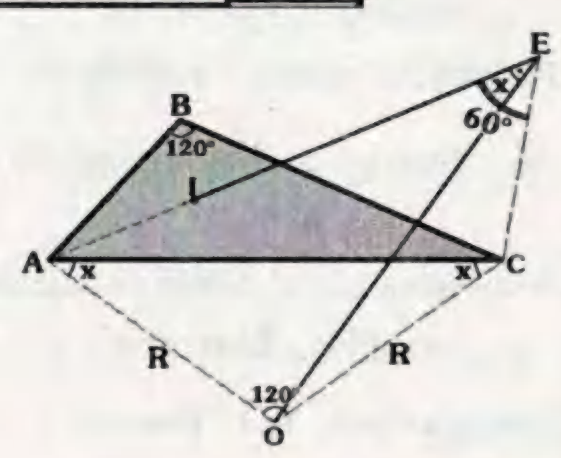
$$\Rightarrow m\measuredangle BCA = \beta$$

- Del mismo modo, C: Excentro del $\triangle EDI \Rightarrow m\measuredangle DCE = \dfrac{m\measuredangle DIE}{2} = \alpha$
- Se observa : $x = \alpha + 90^\circ + \beta$

$$\therefore \ \mathbf{x = 135^\circ}$$

**Clave E**

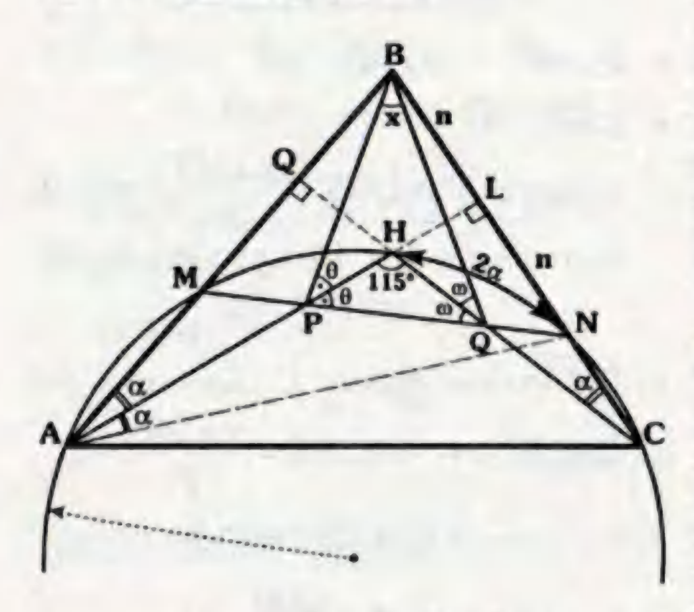
## RESOLUCIÓN N° 182



- Teorema 7.4 : $m\measuredangle AOC = 120°$
- Teorema 7.3 : Inscriptible
  $m\measuredangle AEC = 60°$
- ⏢AECO: Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle ACO = x$
- $\Delta AOC$ : Isósceles
  $\Rightarrow x + x + 120° = 180°$
  $\therefore$ **x = 30°**

**Clave B**

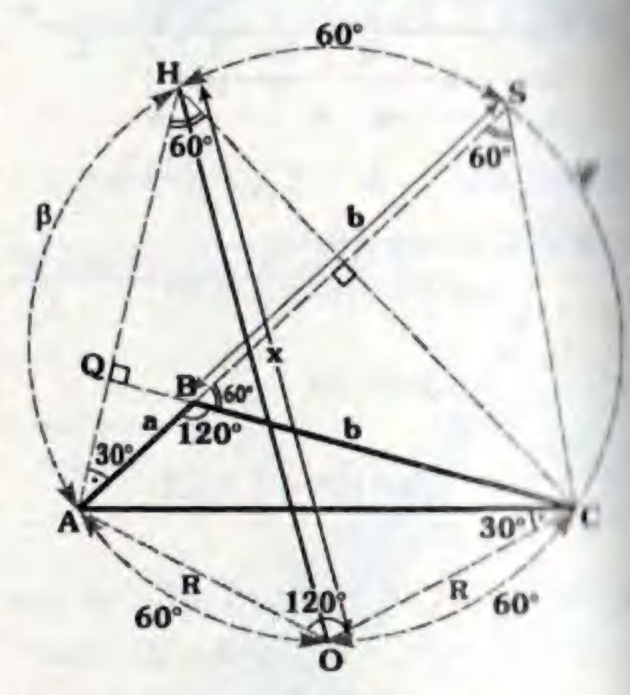
## RESOLUCIÓN N° 183




- H : Ortocentro $\Rightarrow \overline{AL}$ y $\overline{CQ}$ son alturas, sabemos :
  $m\measuredangle QAH = m\measuredangle LCH = \alpha$
- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle HAN = \alpha$
- $\overline{AL}$ : Bisectriz y altura del $\Delta ABN$
  $\Rightarrow BL = LN = n$
- Se observa que el $\Delta PBN$ es isósceles
  $\Rightarrow \overline{PH}$: Bisectriz
- Analogamente, $\overline{QH}$ : Bisectriz
- H : Incentro del $\Delta PBQ$
  $\Rightarrow 115° = 90° + \dfrac{x}{2}$
  $\therefore$ **x = 50°**

**Clave D**

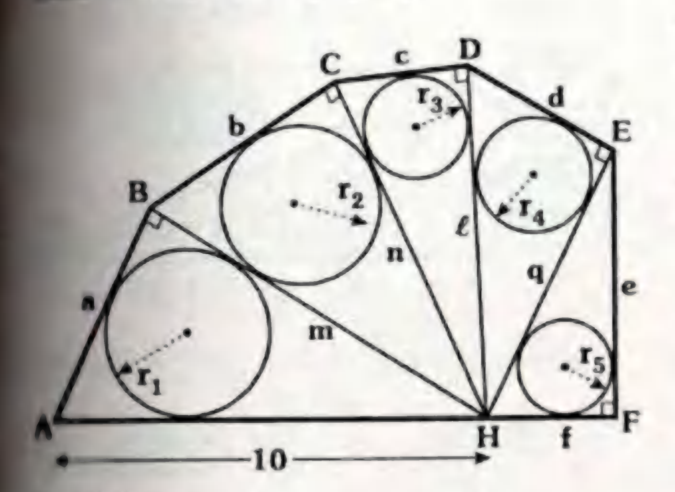
## RESOLUCIÓN N° 184




- Por teoremas fundamentales :
  $m\measuredangle AHC = 60°$ y $m\measuredangle AOC = 120°$
- ⏢AHCO : Inscriptible
- Por ángulo inscrito : $m\measuredangle ASC = 60°$
- $\Delta BSC$ : Equilátero $\Rightarrow BC = BS = b$
- Se observa que :
  $m\widehat{HAO} = m\widehat{SHA} = 60° + \beta \Rightarrow x = a + b$
- Pero, $a + b = 12$
  $\therefore$ **x = 12**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 185




- Piden :

$2p_{ABCDEF} = a+b+c+d+e+f+10$ ... (I)

- Por el teorema de Poncelet :

$\triangle$ABH: $a + \cancel{m} = 10 + 2r_1$

$\triangle$BCH: $b + \cancel{n} = \cancel{m} + 2r_2$

$\triangle$CDH: $c + \cancel{\ell} = \cancel{n} + 2r_3$ (+)

$\triangle$DEH: $d + \cancel{q} = \cancel{\ell} + 2r_4$

$\triangle$EFH: $e + f = \cancel{q} + 2r_5$

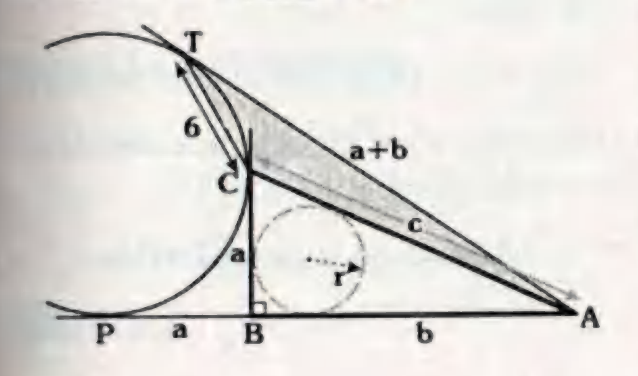
$a+b+c+d+e+f = 10 + 2\underbrace{(r_1+r_2+r_3+r_4+r_5)}_{10\ (dato)}$ ... (II)

- Reemplazando (II) en (I) :

$\therefore\ \mathbf{2p_{ABCDEF} = 40}$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 186




- $\triangle$ABC : Teorema de Poncelet

$\Rightarrow\ a+b=c+2r$ ... (I)

- Por teorema de circunferencia :

BP=BC=a y AP=AT=a+b

- $\Delta$CTA: Teorema $\Rightarrow 6 > a+b-c$ ...(II)

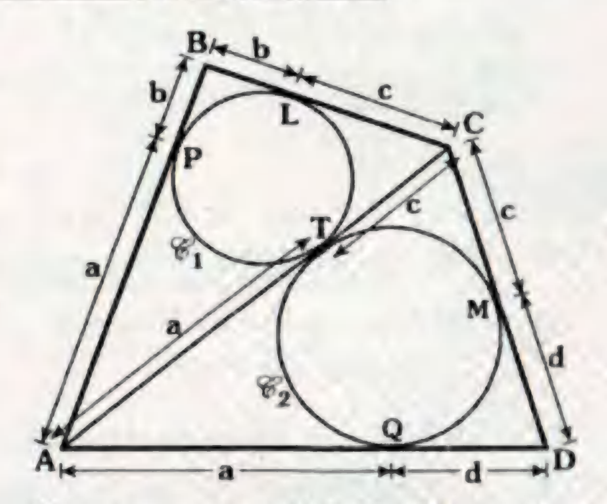
- Reemplazando (I) en (II) :

$6 > c+2r-c \Rightarrow 6 > 2r \Rightarrow 3 > r$

$\therefore\ \mathbf{r_{máx.\ entero} = 2}$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 187




- Por teorema en la circunferencia :

AP=AT=AQ=a ; CL=CT=CM=c;

BP=BL=b y DM=DQ=d

- Se observa :

AB=a+b; BC=b+c; CD=c+d y DA=d+a, entonces en el cuadrilátero ABCD :

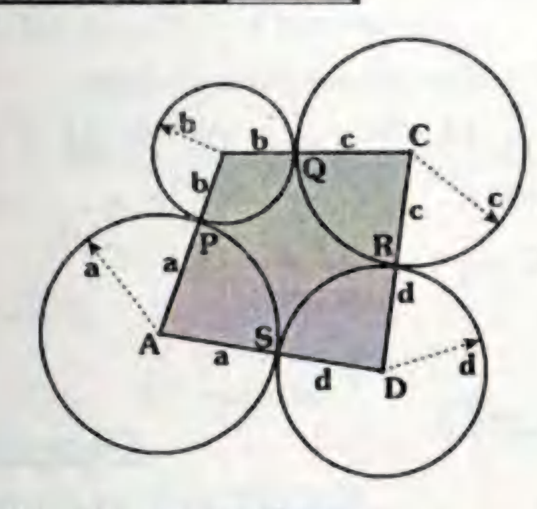
$AB + CD = BC + AD = a+b+c+d$

- Como el ⏢ABCD, cumple con el teorema de Pitot.

$\therefore$ **ABCD es circunscriptible**

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 188




- Por circunferencia :

  AP=AS=a , BP=BQ=b

  CQ=CR=c , DR=DS=d

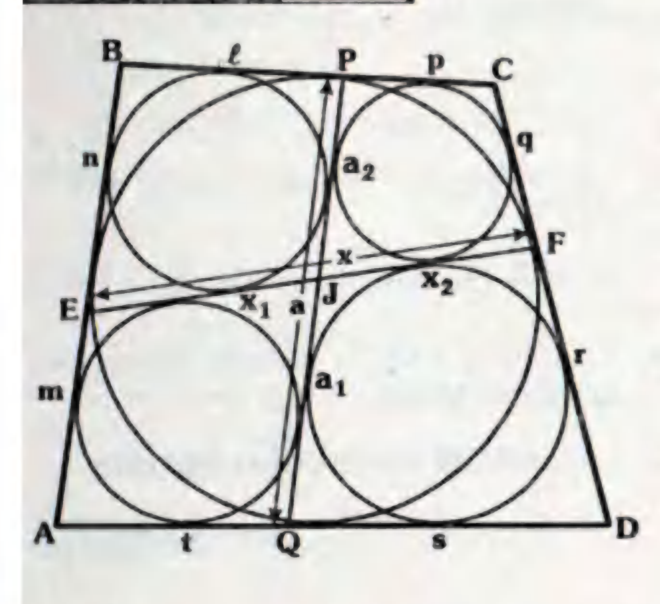
- Se observa que :
  AB=a+b, BC=b+c, CD=c+d y DA=d+a; entonces :

  AB+CD=BC+AD=a+b+c+d
  (*Teorema de Pitot*)

∴ **El ⏢ABCD es circunscriptible**

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 189




- Por el teorema de Pitot :

  ⏢EBPJ : $n+a_2=\ell+x_1$

  ⏢JPCF : $a_2+q=p+x_2$

  ⏢JFDQ : $a_1+r=x_2+s$

  ⏢AEJQ : $a_1+m=x_1+t$

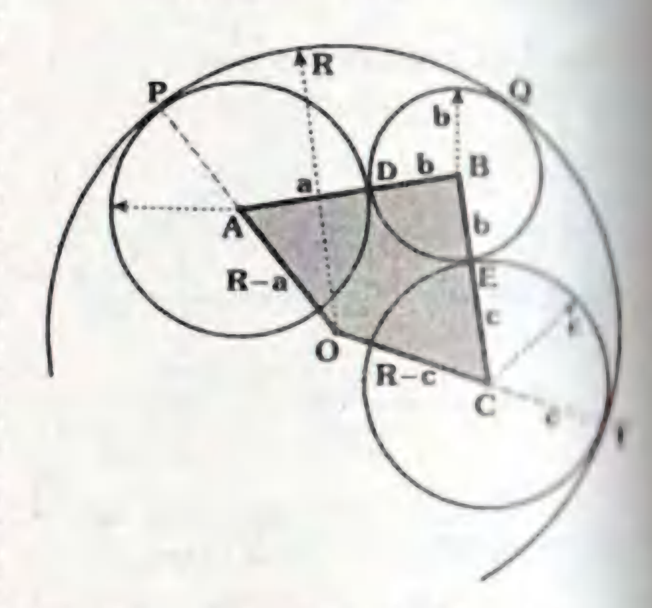
  ⏢ABCD : $\ell+p+s+t=m+n+q+r$

  $$\underbrace{a_1+a_1+a_2+a_2}_{2a}=x_1+x_1+x_2+x_2$$

  ∴ $\mathbf{x=a}$

**Clave**

## RESOLUCIÓN N° 190




- Por teorema de circunferencia :

  OA=R−a ; AB=a+b

  BC=b+c y CO=R−c

- Se notra :

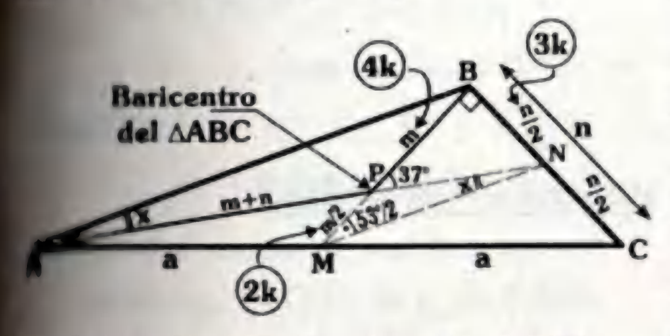
  AB−OC=BC−AO=a+b−c−R

- Finalmente por el recíproco del teorema de Steiner.

  ∴ **ABCO es exinscriptible**

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 191




- Como P es baricentro del ΔABC :

$$BN = NC = \frac{n}{2} \quad y \quad AM = MC = a$$

- $\overline{MN}$ : Base media del ΔABC
  $\Rightarrow m\measuredangle ANM = x$

- Por teorema fundamental :

$$PN = \frac{m+n}{2} \quad y \quad PM = \frac{m}{2}$$

- ◺PBN : $m^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$

  $3m = 2n \Rightarrow m = 4k \;$ y $\; n = 6k$

- Reemplazando en el gráfico; se nota que los ◺s PBN y MBN son notables

  $\Rightarrow m\measuredangle BPN = 37°$ y $m\measuredangle BMN = \frac{53°}{2}$

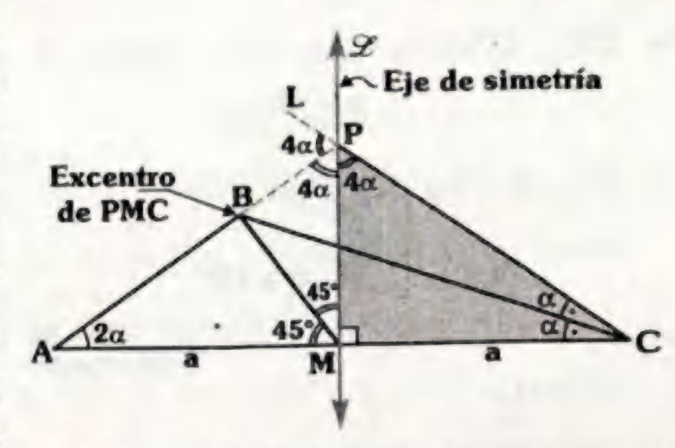
- ΔMPN : $\frac{53°}{2} + x = 37°$

  $\therefore$ **x = 10,5°**

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 192

- Trazamos la mediatriz de $\overline{AC}$ ($\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$), se nota : $m\measuredangle PCA = 2\alpha$ y $m\measuredangle BMP = 45°$
- ΔAPC : Por ángulo exterior
  $\Rightarrow m\measuredangle LPA = 4\alpha$

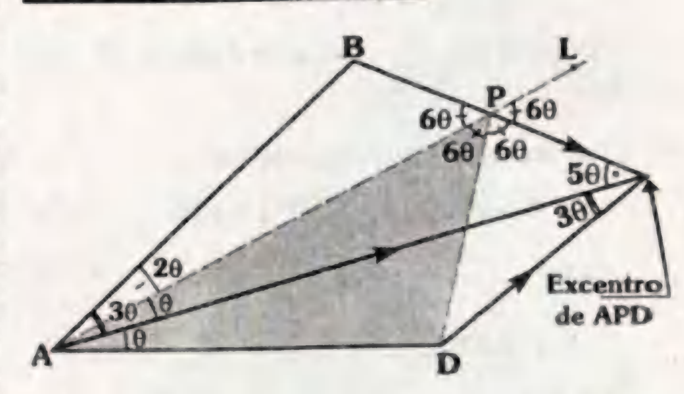



- $\overline{BM}$ y $\overline{CB}$ son bisectrices
  $\Rightarrow$ B : Excentro de PMC
  $\Rightarrow m\measuredangle BPM = 4\alpha$
- De la simetría : $m\measuredangle MPC = 4\alpha$
- En "P" : $4\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180°$

  $\therefore$ **α = 15°**

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 193




- Ubicamos P en $\overline{BC}$, tal que:
  $m\measuredangle BAP = 2\theta$
- ΔAPC : Por ángulo exterior
  $\Rightarrow m\measuredangle APB = 6\theta$
- ΔABP ≅ ΔADP (ALA) $\Rightarrow m\measuredangle APD = 6\theta$
- Se observa que $\overline{AC}$ es bisectriz interior de APD y $m\measuredangle APD = 2(m\measuredangle ACD) = 6\theta$
  $\Rightarrow$ C : Excentro de APD (*criterio* 8.5)

- $\overline{CP}$: Bisectriz exterior $\Delta APD$

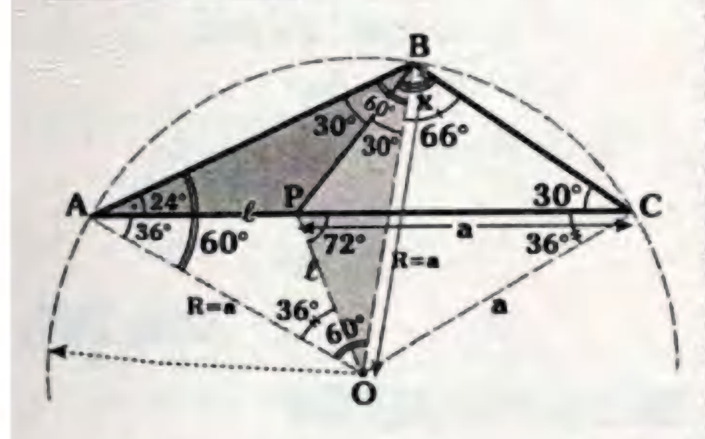
$$\Rightarrow m\measuredangle DPC = 6\theta$$

- En "P" : $6\theta + 6\theta + 6\theta = 180^\circ$

$$\therefore\ \theta = 10^\circ$$

**Clave B**

## RESOLUCIÓN N° 194




- Ubicamos el circuncentro O del ABC.
- Por teorema fundamental :

$$m\measuredangle AOB = 2(30^\circ) = 60^\circ$$

- $\Delta ABO$ :

  Equilátero $\Rightarrow$ $a = R$

- $\Delta AOC$ :

  Isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle ACO = 36^\circ$

- $\Delta POC$ :

  Isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle CPO = 72^\circ$

- Por ángulo exterior en $\Delta APO$ :

$$72^\circ = 36^\circ + m\measuredangle POA \Rightarrow m\measuredangle POA = 36$$

$$\Rightarrow AP = PO = \ell$$

- $\Delta ABP \cong \Delta PBO$ (LLL)

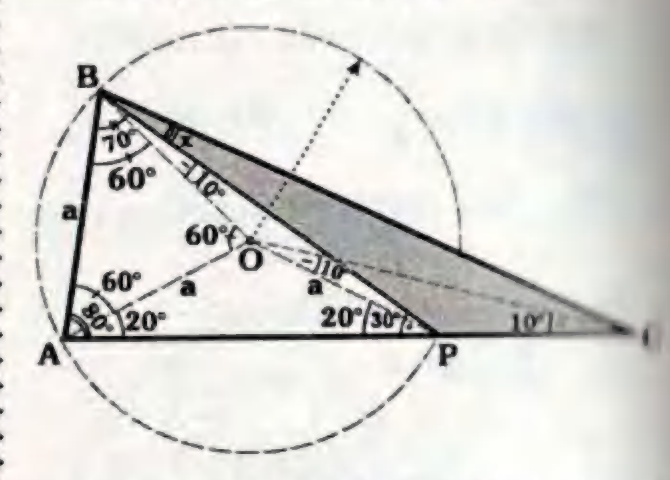
$$m\measuredangle ABP = m\measuredangle PBO = 30^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 96^\circ}$$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 195

- Se ubica O en la región interior del $\Delta ABP$, tal que ABO es equilátero.




- Por el criterio 8.13: O es circuncentro del $\Delta ABP \Rightarrow OP = a$.
- $\Delta AOP$ : Isósceles $\Rightarrow m\measuredangle OPA = 20^\circ$
- $\Delta OPC$ : Isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle POC = m\measuredangle OCP = 10^\circ$$

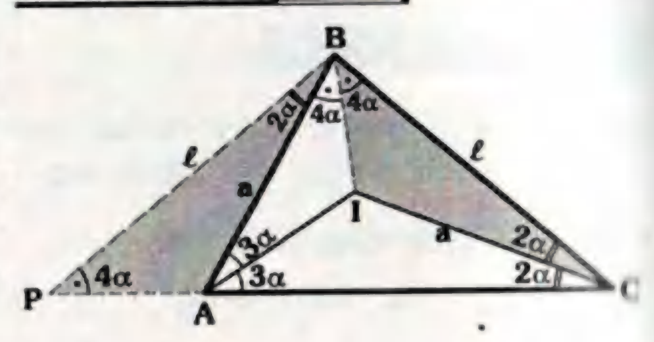
- $\square OBCP$ : Inscriptible

  (ya que $m\measuredangle OCP = m\measuredangle OBP = 10^\circ$)

$$\therefore\ \mathbf{x = 10^\circ}$$

**Clave D**

## RESOLUCIÓN N° 196



- Prolongamos $\overline{CA}$ hasta P, tal que:

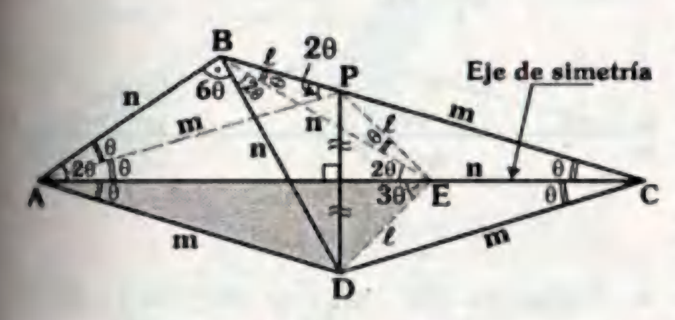
$$m\measuredangle BPC = 4\alpha$$

- $\Delta PBC$ : Isósceles $\Rightarrow PB=BC=\ell$
- $\Delta PAB \cong \Delta BIC$ (LAL) $\Rightarrow m\measuredangle IBC=4\alpha$
- Pero, I : Incentro $\Rightarrow m\measuredangle ABI=4\alpha$
- $\Delta PBC$ : $4\alpha+10\alpha+4\alpha=180°$

$$\therefore\ \alpha = 10°$$

**Clave E**

## RESOLUCIÓN N° 197




- Ubicamos P en $\overline{BC}$, tal que :

$\overline{PD} \perp \overline{AC}$ ($\overleftrightarrow{AC}$: *Mediatriz de* $\overline{PD}$)

- De la simetría $m\measuredangle PAC=\theta$
- Luego trazamos BE, tal que :

$$m\measuredangle CBE=\theta$$

- $\Delta BEC$ : Isósceles $\Rightarrow BE=EC=n$
- $\Delta ABE$ : Isósceles

$$\Rightarrow AB=BE=n\ (m\measuredangle BEA=2\theta)$$

- ⏢ABPE : Inscriptible $\Rightarrow m\measuredangle BEP=\theta$
- De la simetría (P y D simétricos) :

$$m\measuredangle AED=3\theta$$

- Como :

$$AB=BE=n$$

$$m\measuredangle ABD=2(m\measuredangle AED)=6\theta$$

$\Rightarrow$ B : Circuncentro del $\Delta ADE$

- Por teorema fundamental :

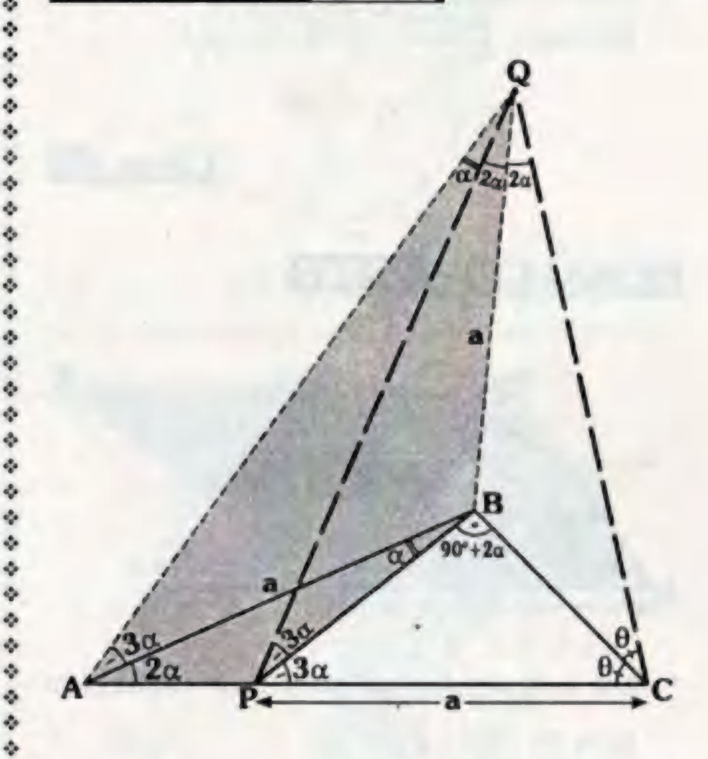
$$m\measuredangle DBE=2(m\measuredangle EAD)=2\theta$$

- $\Delta ABE$ : $2\theta+8\theta+2\theta=180°$

$$\therefore\ \theta=15°$$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 198




- Se construye el $\Delta PQC$, tal que B sea su incentro :

$$m\measuredangle QPB=m\measuredangle BPC=3\alpha \quad y$$

$$m\measuredangle PCB=m\measuredangle QCB=\theta$$

Sabemos :

$$m\measuredangle PBC = 90° = \frac{m\measuredangle PQC}{2}$$

(*Teorema fundamental*)

$\Rightarrow \quad m\measuredangle PQC = 4\alpha$

Como : $m\measuredangle BAP = m\measuredangle PQB = 2\alpha$ , el ⏢APBQ es inscriptible

$\Rightarrow m\measuredangle QAB = 3\alpha \quad y \quad m\measuredangle AQP = \alpha$

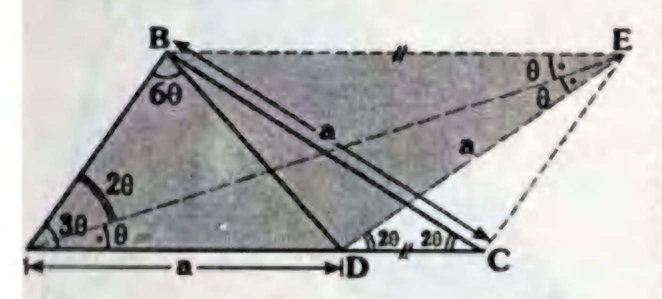
$\Delta AQB$ : Isósceles $\Rightarrow AB = BQ = a$

Finalmente se nota que el problema radica en calcular $\alpha$ en el $\Delta PQC$ , lo cual ya hemos desarrollado en el problema : 196.

$\therefore \quad \alpha = 10°$

**Clave C**

## RESOLUCIÓN N° 199




Se construye el trapecio isósceles BDCE $\left(\overline{BE} // \overline{CD}\right)$

$\Rightarrow \quad m\measuredangle EDC = 2\theta \; y \; DE = a$

$\Delta AED$ :

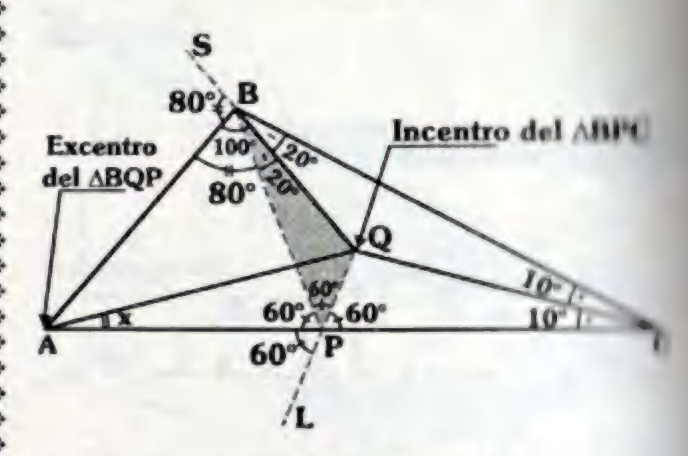
Isósceles $\Rightarrow AD = DE = a$

- $m\measuredangle BEA = \theta$ (*ángulos alternos*)
- Notamos que el ABED corresponde al gráfico del problema : 197

$\therefore \quad \theta = 15°$

**Clave A**

## RESOLUCIÓN N° 200




- Trazamos $\overline{BP}$ , tal que $m\measuredangle PBQ = 20°$
- Q : Incentro de BPC

$\Rightarrow \quad m\measuredangle CPQ = m\measuredangle BPQ = 60°$

- Prolongamos $\overline{QP}$ hasta L, se nota :

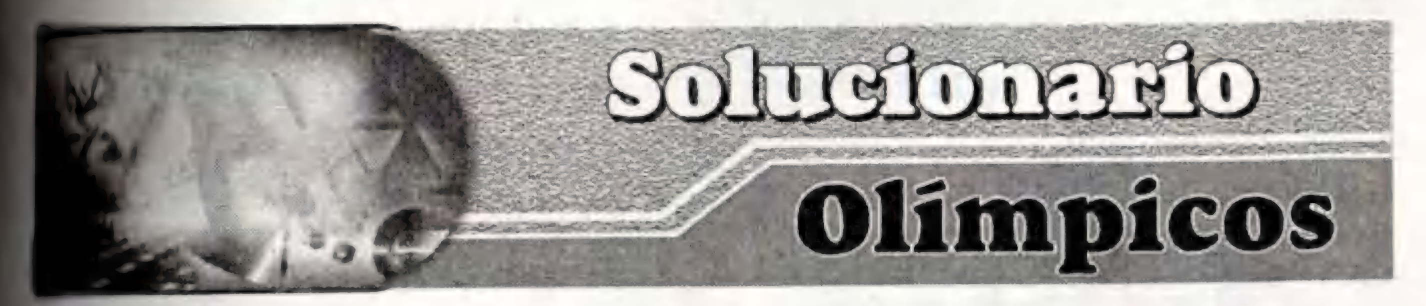
$m\measuredangle APL = 60°$

- Como $\overline{PA}$ y $\overline{BA}$ son bisectrices exteriores $\Rightarrow$ A : Excentro de BPQ
- Por teorema fundamental :

$$x = \frac{20°}{2}$$

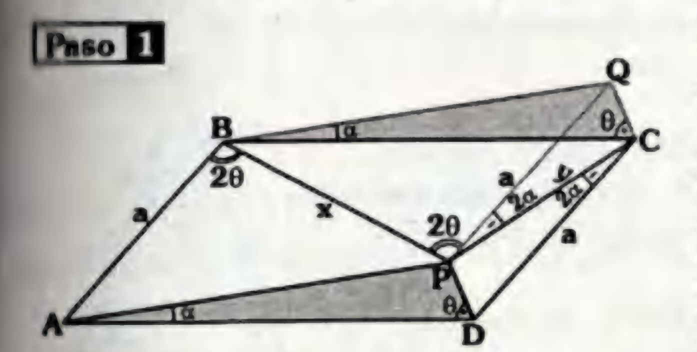
$\therefore \quad x = 10°$

**Clave E**




## RESOLUCIÓN N° 201

Grafiquemos de acuerdo a las condiciones :

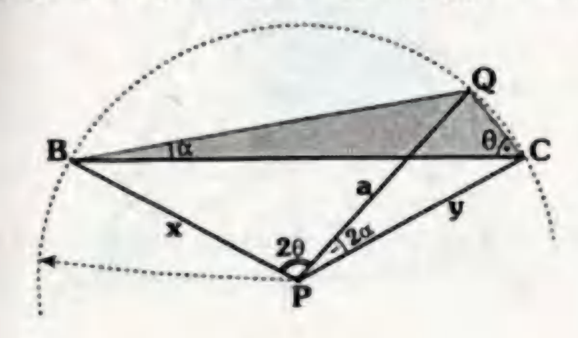


Se nos pide demostrar : **x=y=a**

**Paso 1**

- Se traza el triángulo AQC ≅ ΔAPD (AP=BQ y PD=QC).
- Se verifica $\overline{AP} // \overline{BQ}$ y $\overline{DP} // \overline{CQ}$ ⇒ ABQP y DPQC son paralelogramos.
- Se tiene entonces :

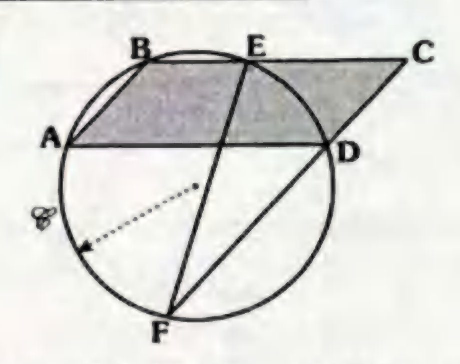
PQ=a ; m∡BPQ = 2θ ; m∡QPC = 2α



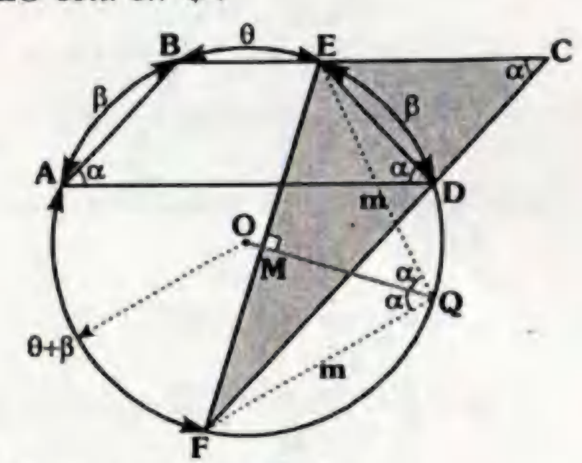
- En el denominado criterio 7.17 se analizó y demostró. (Ver pág. 34).
- P es circuncentro del ΔBQC

⇒ **x = a = y**

## RESOLUCIÓN N° 202



Por dato : ABCD es paralelogramo nos piden demostrar que el circuncentro del ΔFEC está en $\mathscr{C}$.



- Se traza $\overline{OQ} \perp \overline{EF}$
- Por teorema :

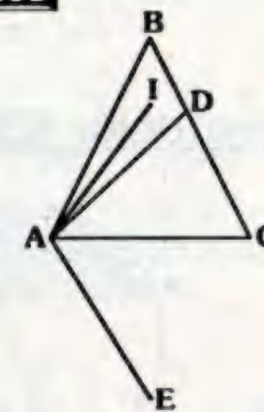
Como: $\overline{AD} // \overline{BE}$ ⇒ $m\widehat{AB} = m\widehat{ED} = \beta$ ; y

$\overline{FD} // \overline{AB}$ ⇒ $m\widehat{AF} = m\widehat{ABE} = \theta + \beta$

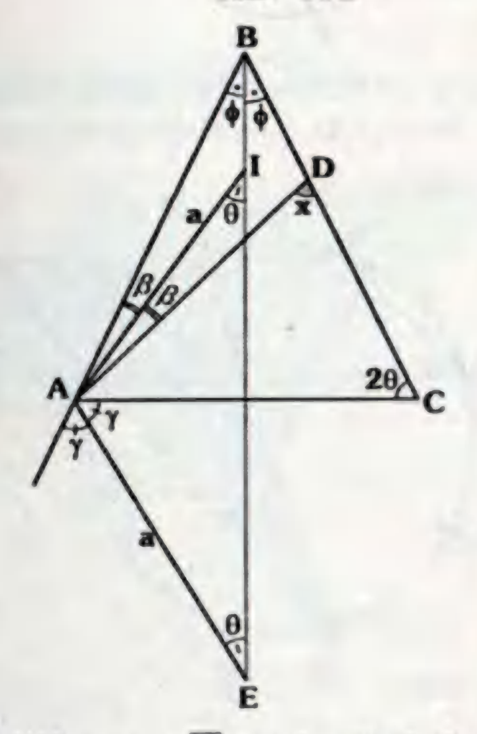
- Por ángulo inscrito : $\theta+\beta=2\alpha$
  $m\measuredangle FQE=2\alpha$
- Por teorema 8.14.
- Debido a que:
  $FQ=QE$ y $m\measuredangle AQE=2(m\measuredangle FCE)$
  $\Rightarrow$ Q es circuncentro del $\Delta AEC$
  $\therefore$ **$Q\in\mathscr{C}$**

## RESOLUCIÓN N° 203

Del gráfico :
I es incentro del $\Delta ABD$.
E es excentro relativo a $\overline{AC}$ del $\Delta ABC$ y $AI=IE$
Piden demostrar:




**AD=AC**




- Debido a que $\overline{BI}$ es bisectriz del $\measuredangle ABD$ y $\overline{BE}$ también es bisectriz del $\measuredangle ABD$.
  $\Rightarrow$ B, I y E son colineales
- En $\Delta ABC$ por teorema sobre bisectrices: $m\measuredangle ACD=2(m\measuredangle AED)$
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle ACD=2\theta$
- En $\Delta BAD$ : $\overline{BI}$ es bisectriz del $\measuredangle BAD$
- Por dato $AI=AE$ $\Rightarrow$ $\Delta AIE$: Isósceles
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle AIE=m\measuredangle IEA$
- En $\Delta ABI$ : $\theta=\beta+\phi$
- En $\Delta ABD$ : $x=2\beta+2\phi$
  $\Rightarrow$ $x=2\theta$
  $\Rightarrow$ $\Delta ADC$ es isósceles
  $\therefore$ **$AD=AC$**

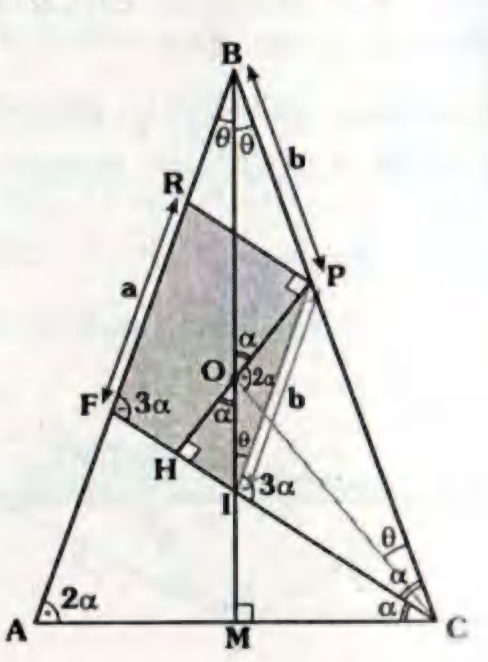
## RESOLUCIÓN N° 204

Graficando de acuerdo a las condiciones:

Del gráfico $AB=BC$, O es circuncentro del $\Delta ABC$ y $\overline{PR}//\overline{CF}$.

Piden demostrar :

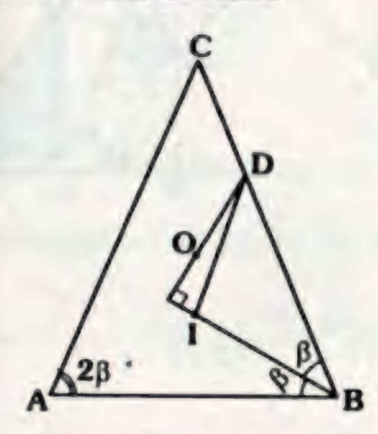
**FR=BP**



- Se sabe $\overline{BO} \perp \overline{AC}$ por ser AB=BC, además $\overline{BO}$ es bisectriz del $\measuredangle ABC$.
- En ⊿IMC y ⊿IHO se tiene :
  $m\measuredangle HOI = \alpha$
- Debido a que $m\measuredangle HOI = m\measuredangle ICP = \alpha$
  $\Rightarrow$ ⌂IOPC es inscriptible
- Por ser O el circuncentro :
  $OB = OC \Rightarrow m\measuredangle OCB = \theta$
  $m\measuredangle BOC = 2(m\measuredangle BAC)$
  $\Rightarrow m\measuredangle BOC = 4\alpha$
- Luego $m\measuredangle POC = 3\alpha$
- Debido a que el ⌂IOPC es inscriptible, se tendrá :
  $m\measuredangle PIO = \theta \Rightarrow \Delta APB$ isósceles
  Luego IP=BP = b.
  $m\measuredangle PIC = 3\alpha \Rightarrow \overline{IP} // \overline{FR}$
- De lo último y por ser $\overline{FI} // \overline{RP}$
- Se concluye que FRPI es un paralelogramo $\Rightarrow$ a=b .

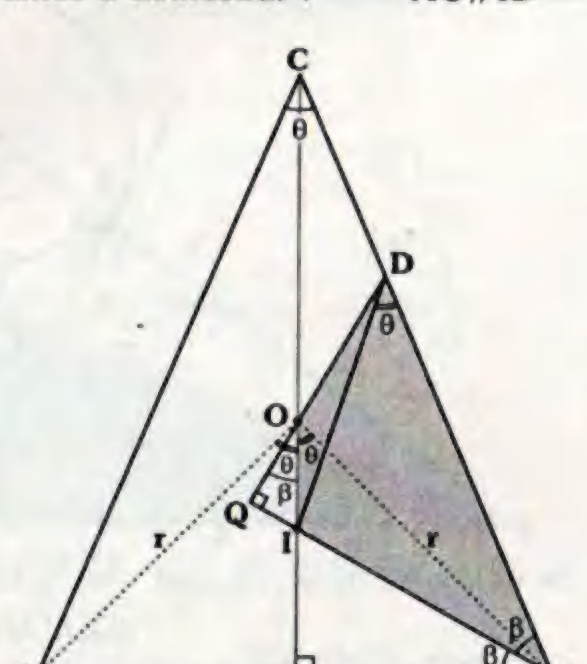
$\therefore$ **FR = BP**

## RESOLUCIÓN N° 205




O e I son circuncentro e incentro del triángulo ABC respectivamente.

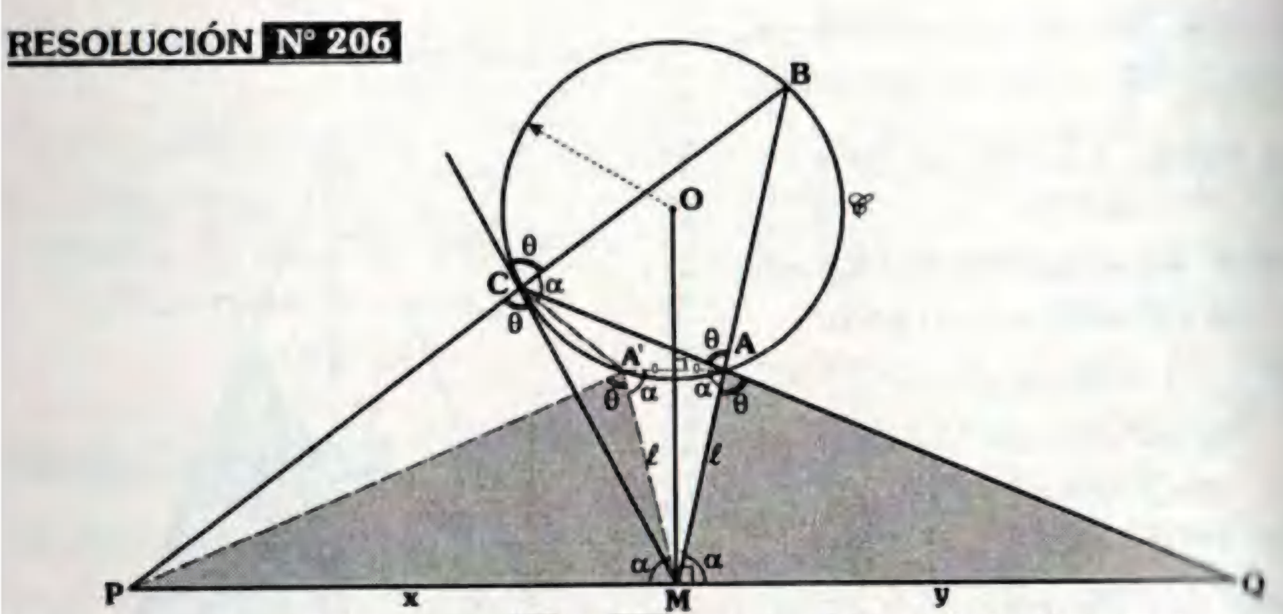
Vamos a demostrar : $\overline{AC} // \overline{ID}$




- Debido a que el triángulo ACB es isósceles, luego C, O e I son colineales.
  $\Rightarrow$ La recta que los contiene es perpendicular a $\overline{AB}$ en su punto medio.
- Por teorema del circuncentro :
  $m\measuredangle AOB = 2(m\measuredangle ACB) = 2\theta$
  $\Delta AOC$ es isósceles $\Rightarrow m\measuredangle HOB = \theta$
- En el ⊿IHB y ⊿IQO se cumple :
  $m\measuredangle QOI = \beta$
  $\Rightarrow$ ⌂IODB es inscriptible
- Luego $m\measuredangle IDB = m\measuredangle IOB = \theta$
- Se tendrá entonces :
  $m\measuredangle ACB = m\measuredangle IDB = \theta$

$\therefore$ $\overline{\mathbf{DI}} // \overline{\mathbf{CA}}$

## RESOLUCIÓN N° 206




- Se ubica A' en $\mathscr{C}$, tal que $\overline{AA'} \perp \overline{OM} \Rightarrow AM=A'M=\ell$ ($\Delta A'AM$ : isósceles) y $m\measuredangle A'AM = m\measuredangle AMQ = \alpha$
- $\triangle$ AA'CB : Inscrito $\Rightarrow$ $m\measuredangle A'CB = \alpha$
- $\triangle$ PCA'M : Inscriptible $\Rightarrow$ $m\measuredangle PA'M=\theta$
- $\Delta PA'M \cong \Delta MAQ$ (ALA)

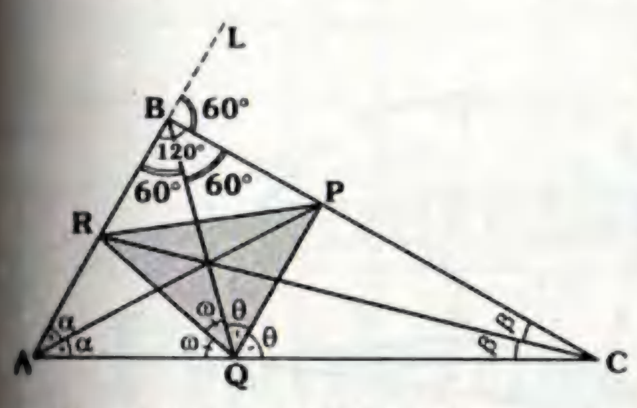
$$\therefore\ \mathbf{x = y}$$

## RESOLUCIÓN N° 207

- P : Incentro del $\Delta BQC$
  $\Rightarrow m\measuredangle BQP = m\measuredangle PQC = 45°$
- Q : Excentro $\Delta BPE$
  $\Rightarrow m\measuredangle AEQ = m\measuredangle QEP = 45°$
- Q : Excentro $\Delta PDC$
  $\Rightarrow m\measuredangle PDQ = m\measuredangle QDA = 45°$
- Al prolongar $\overline{EQ}$ y $\overline{DQ}$, nos damos cuenta que $\overline{DM}$ y $\overline{EN}$ son alturas del $\Delta AED$, por lo tanto Q es ortocentro del $\triangle$ADE.

## RESOLUCIÓN N° 208

- Al prolongar $\overline{AB}$ hasta L, $m\measuredangle LBP = 60°$
- P : Excentro del $\Delta ABQ \Rightarrow m\measuredangle BQP = m\measuredangle PQC = \theta$




- R : Excentro del $\Delta BQC$

$\Rightarrow\ m\measuredangle BQR = m\measuredangle RQA = \omega$

- En "Q" : $2\omega + 2\theta = 180^\circ$

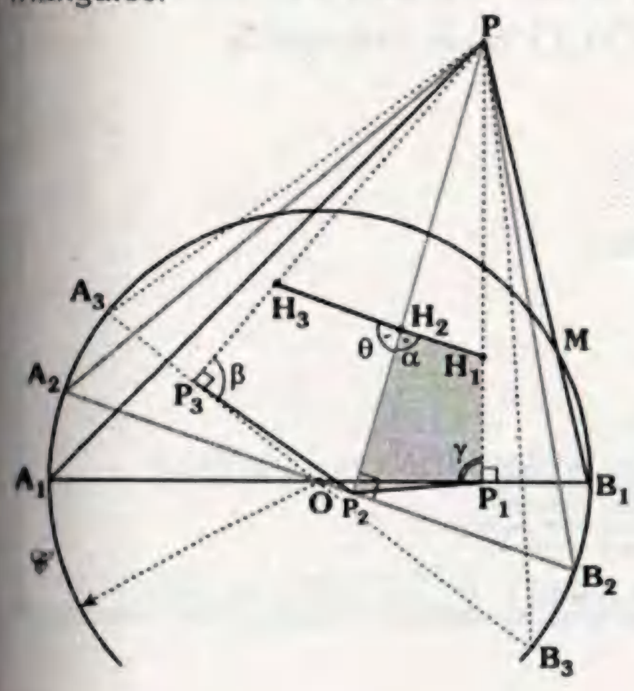
$\Rightarrow\ \omega + \theta = 90^\circ$

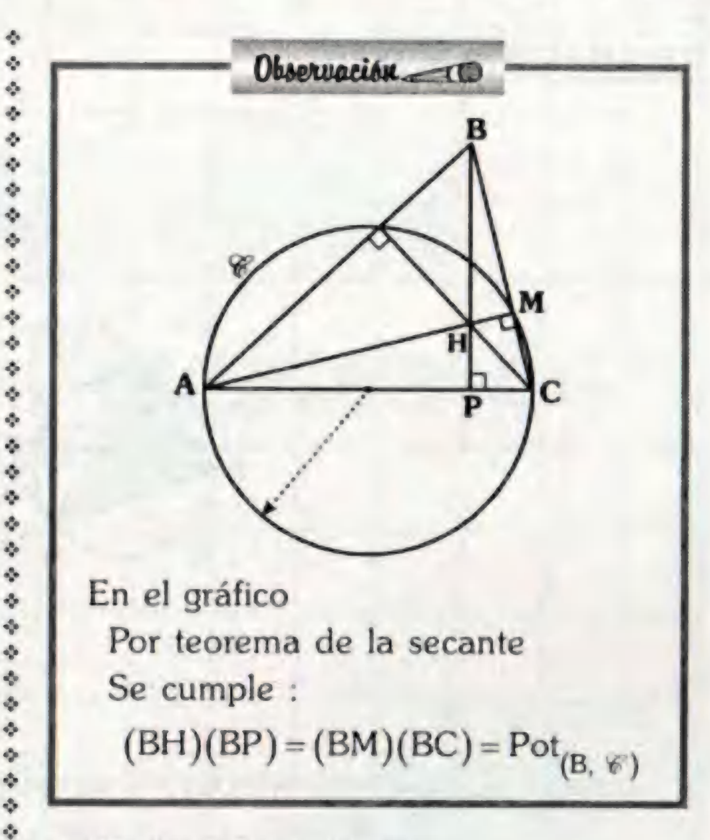
$\therefore$ **m∡PQR = 90°**

## RESOLUCIÓN Nº 209

Puesto que para todos los triángulos ABP tienen como mediana "fija": $\overline{PO}$, el baricentro también es fijo, luego el lugar geométrico de los circuncentros será la misma que el descrito por el ortocentro, dado que son homotéticos.

Analicemos los ortocentros para tres triángulos.




En el gráfico

Por teorema de la secante

Se cumple :

$(BH)(BP) = (BM)(BC) = Pot_{(B,\ \mathscr{C})}$

- De la observación :

$$(PM)(PB_1) = (PH_1)(PP_1) = (PH_2)(PP_2) = \\ = (PH_3)(PP_3)$$

$\Rightarrow$ ⏢$P_1H_1H_2P_2$ , ⏢$P_2P_3H_3H_2$ y ⏢$P_1P_2P_3P$ son inscriptibles.

- Luego :

$$\left.\begin{array}{l}\theta + \beta = 180^\circ \\ \alpha + \gamma = 180^\circ \\ \beta + \gamma = 180^\circ\end{array}\right\} \alpha = \beta$$

$\Rightarrow\ \theta + \alpha = 180^\circ$

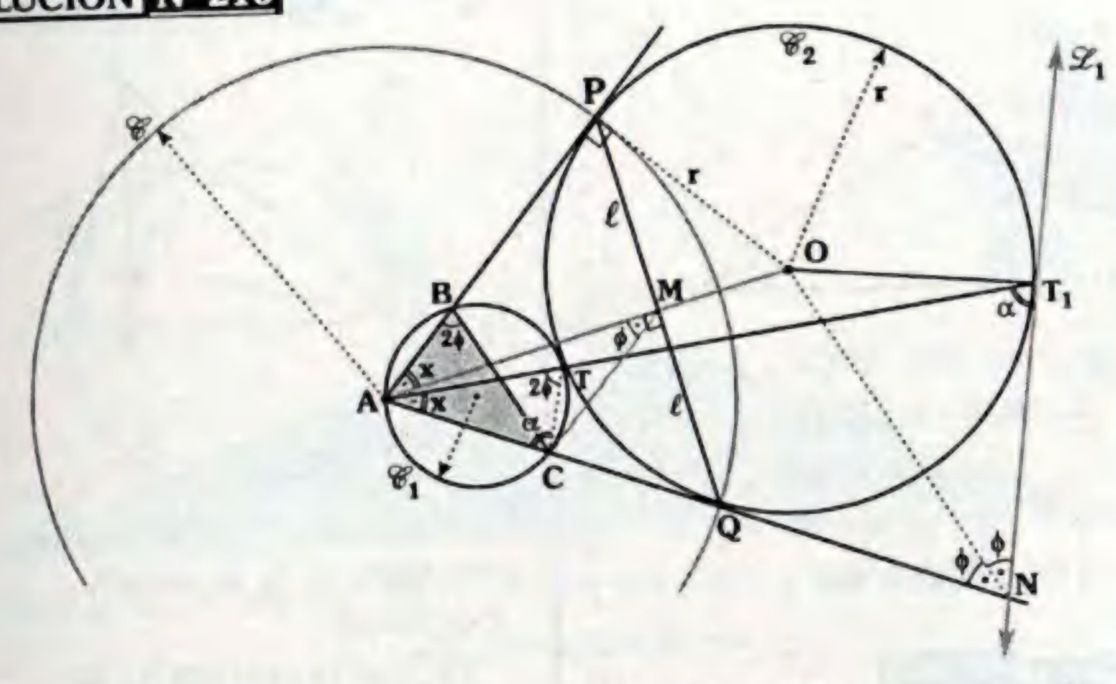
$\Rightarrow\ H_1, H_2$ y $H_3$ son colineales

$\therefore$ **El lugar geométrico es una recta**

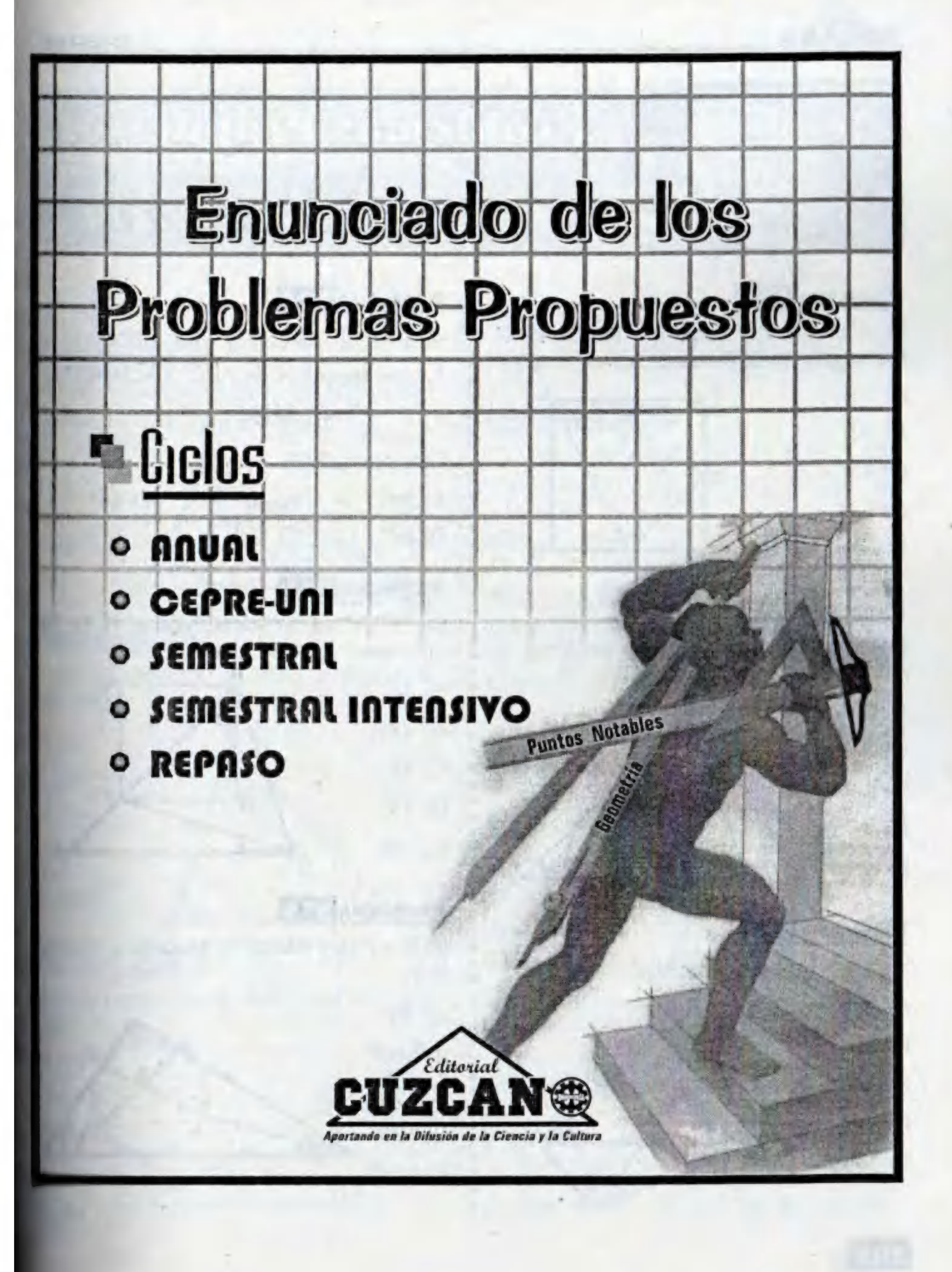




**ESOLUCIÓN N° 210**




- $\Delta APQ$ : Isósceles $\Rightarrow PM = MQ$ y $m\measuredangle MAP = m\measuredangle MAQ$ con centro en A y radio AP trazamos la circunferencia $\mathscr{C}$, la cual será nuestra circunferencia de inversión.
- $\mathscr{C}_2$ es ortogonal a $\mathscr{C}$, entonces es su propio inverso.
- El inverso a $\mathscr{C}_1$ es $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ el cual es tangente a $\mathscr{C}_2$ en T' (inverso de T)
- Por teorema de circunferencia : $m\widehat{ABT} = m\measuredangle\widehat{TQT'} \Rightarrow m\measuredangle ACT = m\measuredangle TT'N = \alpha$
  $\Rightarrow \square CTT'N$ es inscriptible
- Luego $m\measuredangle CTA = m\measuredangle CNT' = 2\phi$
- En $\mathscr{C}_1$: $m\measuredangle ABC = m\measuredangle ATC = 2\phi$
- Por relaciones métricas : $(AP)^2 = (AM)(AO)$
- En $\mathscr{C}_2$: $(AP)^2 = (AT)(AT')$
- En $\square CTT'N$ : $(AT)(AT') = (AC)(AN)$
  $(AM)(AO) = (AC)(AN) \Rightarrow \square CMON$ es inscriptible
- Luego : $m\measuredangle AMC = m\measuredangle ONA = \phi$
- Finalmente en el $\Delta ABC$ : $m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle AMC)$ y $m\measuredangle BAM = m\measuredangle MAC$
- Se concluye que M es excentro.


Enunciado de los Problemas Propuestos
Ciclos
ANUAL
CEPRE-UNI
SEMESTRAL
SEMESTRAL INTENSIVO
REPASO
Puntos Notables
Geometría
Editorial
CUZCANO
Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura

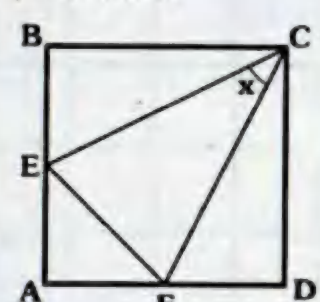
# Problemas Propuestos

## Ciclo Anual

**PROBLEMA Nº 1**

Si el centro del cuadrado ABCD es el baricentro de ECF, calcule x.

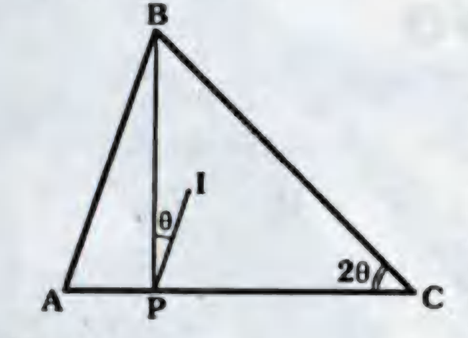
A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°




**PROBLEMA Nº 2**

En el gráfico I es incentro de ABC, si AP=PI y PC=4, calcule AB.

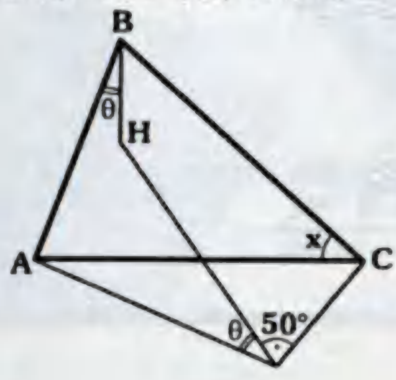
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6




**PROBLEMA Nº 3**

Si H es ortocentro de ABC, calcule x

A) 25°
B) 30°
C) 35°
D) 40°
E) 50°




**PROBLEMA Nº 4**

Se tiene el paralelogramo ABCD, $I_1$ e $I_2$ son incentros de ABD y BCD, si :

$$m\measuredangle BAD = m\measuredangle I_1BI_2$$

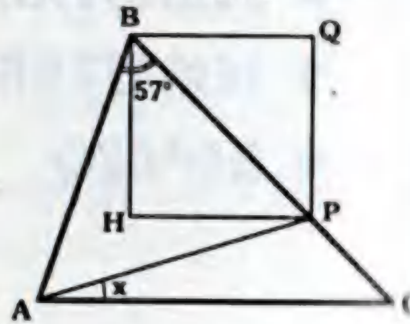
Calcule $m\measuredangle BCD$ .

A) 30° B) 36° C) 45°
D) 60° E) 75°

**PROBLEMA Nº 5**

Si HBQP es un cuadrado y H es el ortocentro de ABC, calcule x.

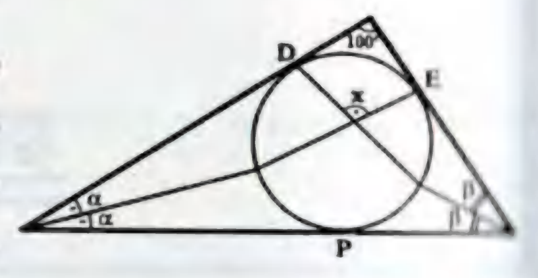
A) 12°
B) 13°
C) 14°
D) 15°
E) 16°




**PROBLEMA Nº 6**

D, E y P son puntos de tangencia, calcule x.

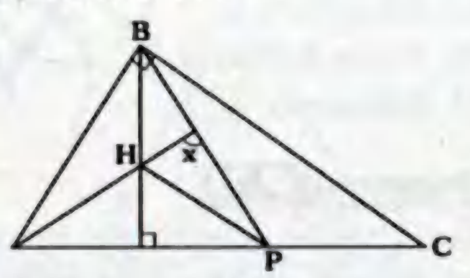
A) 90°
B) 100°
C) 110°
D) 120°
E) 135°



**PROBLEMA Nº 7**

Si $\overline{HP}//\overline{BC}$, calcule "x".

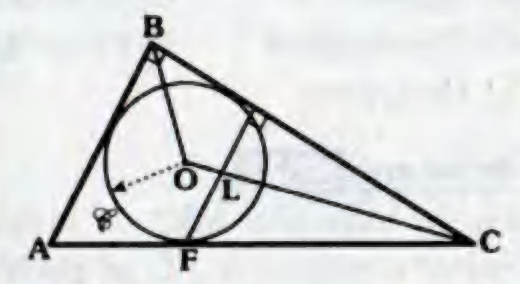
A) 60°
B) 75°
C) 80°
D) 90°
E) 120°




**PROBLEMA Nº 8**

𝒞 esta inscrita en ABC, si $BO = 4\sqrt{2}$, calcule FL.

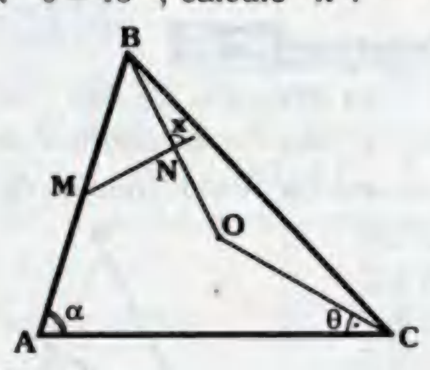
A) 5
B) 4
C) 3
D) 2
E) 1




**PROBLEMA Nº 9**

O es circuncentro de ABC, si AM=MB, BN=NO y $\alpha - \theta = 40°$, calcule "x".

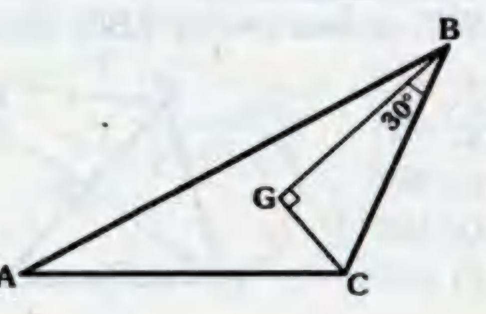
A) 60°
B) 70°
C) 80°
D) 90°
E) 100°




**PROBLEMA Nº 10**

Si G es baricentro de ABC y CG=2, calcule AC.

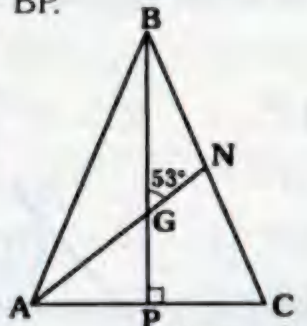
A) $2\sqrt{7}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $3\sqrt{7}$
D) $\sqrt{7}$
E) 4




**PROBLEMA Nº 11**

En el gráfico, AB = 2(BN) = 2(NC) y GN=10, calcule BP.

A) 20
B) 28
C) 30
D) 36
E) 40




**PROBLEMA Nº 12**

En un paralelogramo ABCD, M es punto medio de $\overline{BC}$, $\overline{BD} \cap \overline{AM} = F$, si BD=12 calcule BF.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**PROBLEMA Nº 13**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B) de incentro I, si AI=4 y $CI = 6\sqrt{2}$, calcule AC.

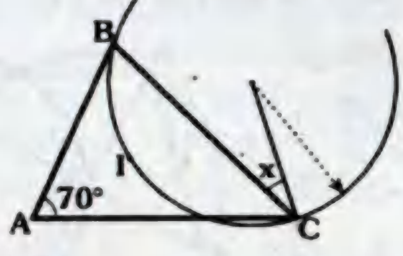
A) $2\sqrt{17}$ B) $3\sqrt{17}$ C) $2\sqrt{34}$

D) $3\sqrt{34}$ E) $4\sqrt{34}$

**PROBLEMA Nº 14**

I es incentro de ABC, calcule x :

A) 35°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°




**PROBLEMA Nº 15**

Dado un triángulo ABC, I es incentro y E es el excentro relativo a $\overline{BC}$, si :

$m\measuredangle EIC = 50° + m\measuredangle IEC$, calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 32° C) 34° D) 38° E) 40°

**PROBLEMA Nº 16**

es incentro de ABC, P y Q son puntos e tangencia, calcule $m\overset{\frown}{IP}$.

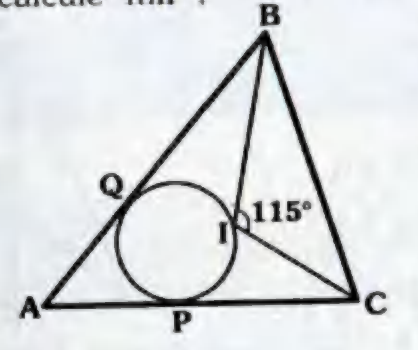
) 100°

) 115°

) 120°

) 135°

) 140°




**PROBLEMA Nº 17**

En un triángulo ABC, H y O son el ortocentro y circuncentro respectivamente, si OB=13 y AC=24, calcule BH.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

**PROBLEMA Nº 18**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, si el inradio es 3 y el perímetro de la región triangular ABC es 40, calcule su circunradio.

A) 6 B) $\frac{13}{2}$ C) $\frac{17}{2}$

D) 12 E) 14

**PROBLEMA Nº 19**

Calcule el inradio del triángulo $ABO_1$.

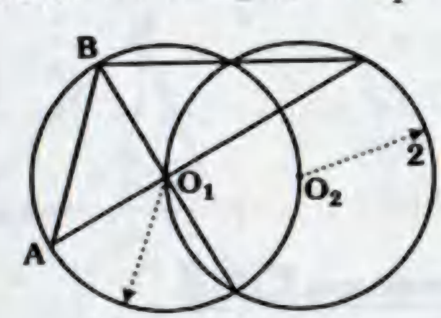
A) $2-\sqrt{2}$

B) $\sqrt{2}-1$

C) $3-\sqrt{2}$

D) $4-\sqrt{2}$

E) $\sqrt{2}+1$




**PROBLEMA Nº 20**

¿Qué punto notable es P de ABC?

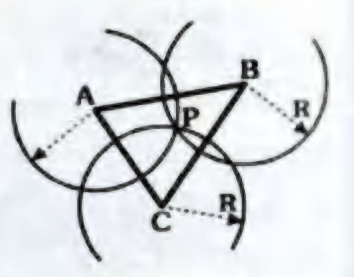
A) Incentro

B) Circuncentro

C) Ortocentro

D) Punto de Brune

E) Baricentro




**PROBLEMA Nº 21**

En la región interior del triángulo ABC se ubica el punto P, si AP=PC y

$$m\measuredangle ABC + m\measuredangle PAC = 90°,$$

indique que punto notable es P de ABC.

A) Incentro B) Baricentro

C) Circuncentro D) Punto de Miquel

E) Ortocentro

**PROBLEMA Nº 22**

En un triángulo ABC de incentro I y excentro relativo a $\overline{AC}$ el punto E, calcule $m\measuredangle AIC + m\measuredangle AEC$.

A) 90° B) 120° C) 135°

D) 180° E) 200°

**PROBLEMA Nº 23**

Si E es excentro de ABC, AB=BC=8 y AC=6, calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AE}$.

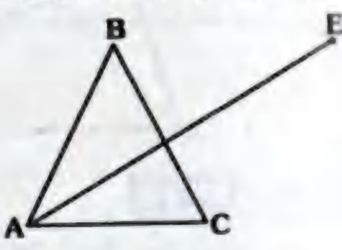
A) 1/4

B) 1/2

C) 1

D) 1,5

E) 2




**PROBLEMA Nº 24**

Si C es excentro de ABD, calcule x.

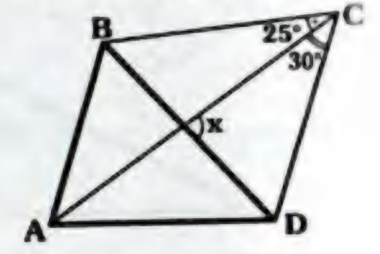
A) 85°

B) 90°

C) 95°

D) 100°

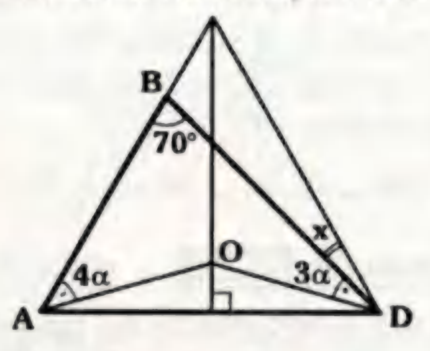
E) 105°



**PROBLEMA Nº 25**

Si O es circuncentro de ABD, calcule x.

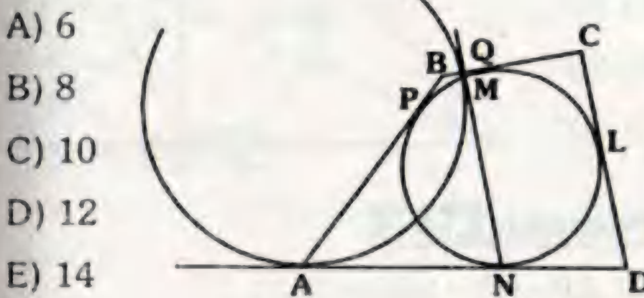
A) 14°
B) 13°
C) 12°
D) 11°
E) 10°




**PROBLEMA Nº 26**

A, M, P, Q, L, A y N son puntos de tangencia, AB – BC = 2 y CD=6, calcule MN+ND.

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 14




**PROBLEMA Nº 27**

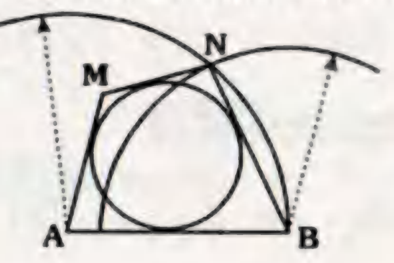
En el lado $\overline{AD}$ de un rectángulo ABCD se ubica el punto P, tal que $m\measuredangle BPC = 90°$, si AB=12 y $m\measuredangle PCD = 37°$, calcule la distancia de A al incentro de BPC.

A) $\sqrt{274}$ B) $2\sqrt{74}$ C) $3\sqrt{14}$
D) $4\sqrt{7}$ E) 9

**PROBLEMA Nº 28**

Si 5(AL)=2(LB)=20, calcule AM – MN.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5




**PROBLEMA Nº 29**

En un triángulo ABC se traza la mediana BM y se ubica los baricentros $G_1$ y $G_2$ de ABM y MBC, si $m\measuredangle ABC = 72°$, calcule $m\measuredangle G_1MG_2$.

A) 36° B) 40° C) 48° D) 60° E) 72°

**PROBLEMA Nº 30**

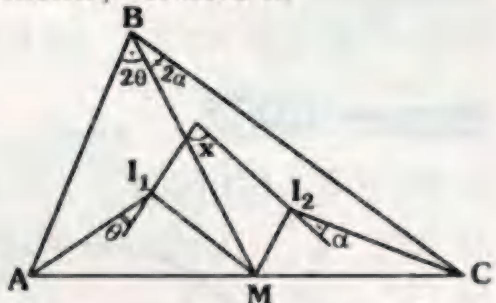
En un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AB}$, incentro I y ortocentro H, si $m\measuredangle ACB = 20°$, BH=20, calcule la distancia de H a $\overline{BI}$.

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

**PROBLEMA Nº 31**

$I_1$ e $I_2$ son incentros de ABM y MBC respectivamente, calcule x.

A) 60°
B) 75°
C) 90°
D) 95°
E) 120°




**PROBLEMA Nº 32**

En un trapecio isósceles circunscrito a una circunferencia, la diferencia entre las longitudes de un lado lateral y la base menor es 10, calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 10

**PROBLEMA Nº 33**

L es punto de tangencia y T es ortocentro de ABC, si BT=16 y BL=31, calcule TQ.

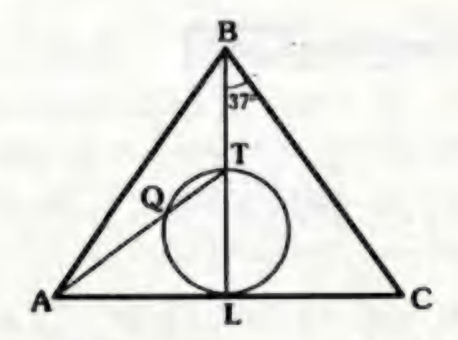
A) 9

B) 8

C) 7

D) 6

E) 5




**PROBLEMA Nº 34**

En un triángulo rectángulo, la longitud de un cateto es igual a la distancia de su ortocentro a su circuncentro, calcule la medida del menor ángulo interior.

A) 30° B) 37° D) 45° D) 53° E) 60°

**PROBLEMA Nº 35**

El radio de la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero es 1, calcule la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

**PROBLEMA Nº 36**

Si AN=CB y CN=2(NO), calcule x.

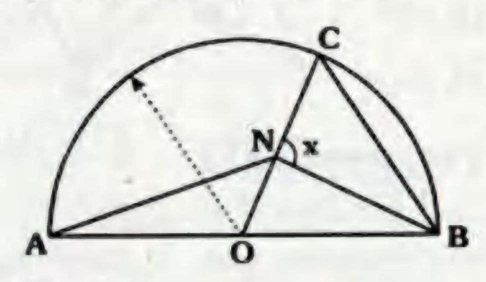
A) 90°

B) 75°

C) 60°

D) 53°

E) 45°




**PROBLEMA Nº 37**

Si AB=BC y O es circuncentro de AFC, calcule x.

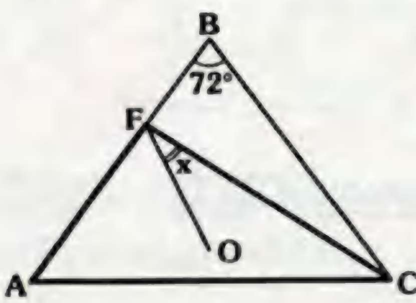
A) 30°

B) 32°

C) 34°

D) 36°

E) 38°




**PROBLEMA Nº 38**

En un triángulo isósceles ABC (AB=BC), el punto F es su excentro relativo a $\overline{BC}$ y su altura BH mide 8, calcule la distancia de F a $\overline{BC}$.

A) 10 B) 8 C) 6 D) 1 E) 2

**PROBLEMA Nº 39**

Si A y B son puntos de tangencia, calcule $m\widehat{PQ}$.

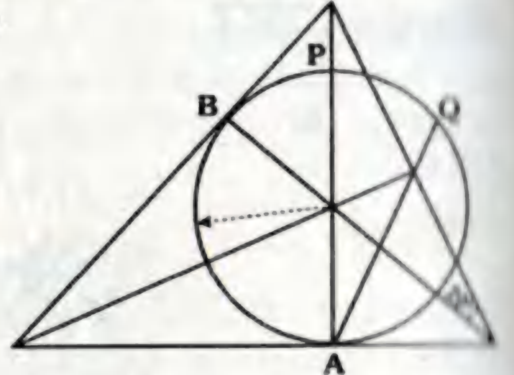
A) 20°

B) 25°

C) 30°

D) 35°

E) 40°




**PROBLEMA Nº 40**

Si AP=BC, calcule x.

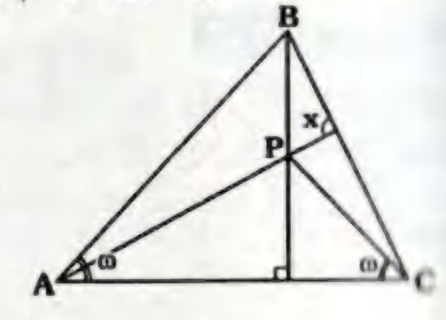
A) 90°

B) 60°

C) 75°

D) 120°

E) 80°




**PROBLEMA Nº 41**

Calcule el circunradio de un triángulo ABC, si m∡BAC = 53° y BC=12.

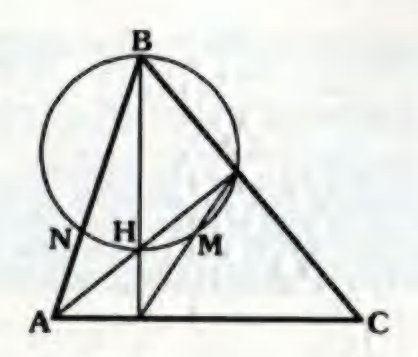
A) 5 B) 5,5 C) 6

D) 7,5 E) 8

**PROBLEMA Nº 42**

Si H es ortocentro de ABC y $m\widehat{HM} = 40°$, calcule $m\widehat{HN}$.

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 60°




**PROBLEMA Nº 43**

En un triángulo ABC, N es el excentro relativo a $\overline{BC}$, luego se ubica el excentro E del $\Delta BNC$, relativo a $\overline{BC}$, tal que :

$$m\measuredangle BEC = 2m\measuredangle BAC = 2x,$$

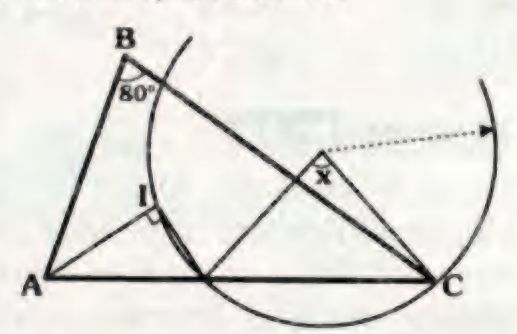
calcule x.

A) 180°/7 B) 200°/7 C) 90°/7
D) 60° E) 53°

**PROBLEMA Nº 44**

I es incentro ABC, calcule x.

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°




**PROBLEMA Nº 45**

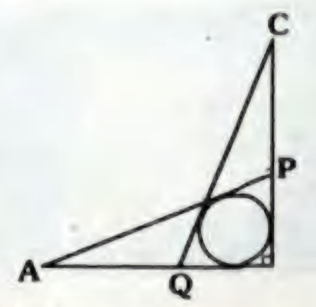
En un triángulo ABC de ortocentro H se traza la altura AR, en $\overline{HR}$ y $\overline{BR}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente tal que $\overline{QP} // \overline{BH}$, si $m\measuredangle QAC = 65°$, calcule $m\measuredangle PCA$.

A) 20° B) 25° C) 26°
D) 28° E) 30°

**PROBLEMA Nº 46**

Si AP=CQ y CP=4, calcule AQ.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5




**PROBLEMA Nº 47**

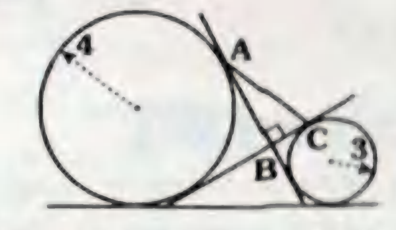
En un triángulo ABC de incentro I, $E_1$ y $E_2$ son excentros relativos a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, si $m\measuredangle ABC = 20°$, calcule $m\measuredangle E_1IE_2$.

A) 40° B) 60° C) 80°
D) 100° E) 120°

**PROBLEMA Nº 48**

Calcule el inradio de ABC.

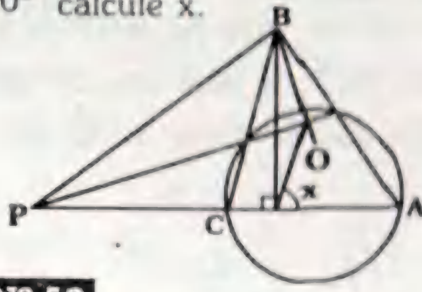
A) 0,5
B) 1
C) 1,5
D) 2
E) 2,5




**PROBLEMA Nº 49**

Si O es circuncentro de ABC y $m\measuredangle PBO = 70°$ calcule x.

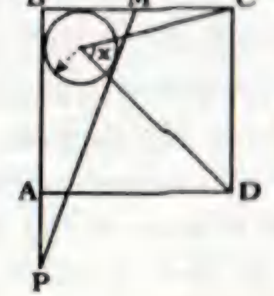
A) 60°
B) 62°
C) 65°
D) 68°
E) 70°

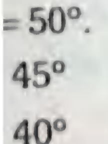



**PROBLEMA Nº 50**

ABCD es un cuadrado, si BM=MC=5 y AP=2, calcule x.

A) 41°
B) 43°
C) 47°
D) 55°
E) 59°



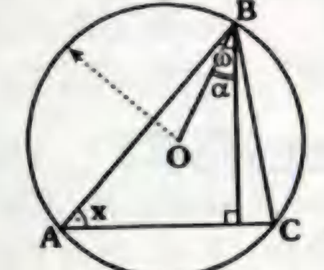


# Problemas Propuestos

## Ciclo Cepre-Uni

**PROBLEMA Nº 51**

la figura, hallar x, si $\alpha = 30^\circ$ y $= 50^\circ$.




45°
40°
50°
55°
60°

**PROBLEMA Nº 52**

tiene un triángulo acutángulo ABC en cual se trazan las alturas $\overline{BH}$ y $\overline{CJ}$, sobre las prolongaciones $\overrightarrow{HB}$ y $\overrightarrow{JC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente de modo que AC=BP y AB=CQ. Si $Q = 6\sqrt{3}$, la distancia del vértice A a la recta que contiene a $\overline{PQ}$ es :

) 3 B) 4 C) $2\sqrt{3}$

) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

**PROBLEMA Nº 53**

ea el triángulo ABC, cuyo ángulo interno en B mide 120° y cuyos lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden a y b unidades $(a < b)$. La bisectriz del ángulo B y la mediatriz de $\overline{AC}$ se intersecan en P y desde P se traza el segmento $\overline{PQ}$ perpendicular a $\overline{BC}$ (Q en BC). Calcule QC.

A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{a+b}{4}$ C) $\frac{b-a}{2}$

D) $b-a$ E) $b-2a$

**PROBLEMA Nº 54**

La circunferencia exinscrita al lado $\overline{AB}$ del triángulo ABC, determina el punto de tangencia M en la prolongación del lado $\overline{CA}$. Se traza $\overline{AF}$ perpendicular a $\overline{OB}$ (O es el centro de la circunferencia) tal que: $m\measuredangle AMF = m\measuredangle ACB$

Calcule $m\measuredangle ACB$

A) 45° B) 30° C) 60°

D) 75° E) 67,5°

**PROBLEMA Nº 55**

En un cuadrilátero ABCD se trazan las bisectrices interiores formándose un nuevo cuadrilátero, calcular la suma de dos ángulos opuestos de este cuadrilátero

A) 120° B) 180° C) 150°

D) 140° E) 110°

**PROBLEMA Nº 56**

En un triángulo ABC$(AC > AB)$ se traza la circunferencia exinscrita relativa al lado $\overline{BC}$ de centro O. $\overline{AO} \cap \overline{BC} = \{F\}$, por F se traza una recta tangente a la circunferencia que intercepta a $\overline{AB}$ en E y a $\overline{AC}$ en J, si $AB = 6\mu$ y $FJ = 2\mu$, entonces AJ – BF (en u) es :

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

**PROBLEMA Nº 57**

En un triángulo ABC recto en B, AB<BC. La circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en los puntos N y P respectivamente. Exteriormente se construye el trapezoide BDEC circunscrito a una circunferencia siendo M y Q los puntos de tangencia con los lados $\overline{BD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $DE=5\mu$, $AC=CE$ y $DM+AN=3\mu$. Calcule PQ (en $\mu$).

A) 3 B) 1,5 C) 2,5 D) 1 E) 2

**PROBLEMA Nº 58**

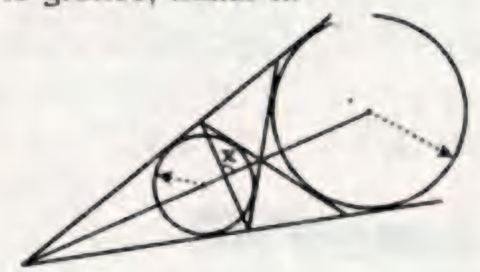
Sea el triángulo ABC, recto en B, se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, si $\overline{BM}$ es la bisectriz del ángulo ABH, $\overline{BN}$ la bisectriz del ángulo HBC y r el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, entonces la longitud de $\overline{MN}$ es :

A) r/3 B) r/2 C) r D) 3r/2 E) 2r

**PROBLEMA Nº 59**

Del siguiente gráfico, hallar x.

A) 75°
B) 90°
C) 100°
D) 120°
E) 135°




**PROBLEMA Nº 60**

Dos triángulos equiláteros ABC y CDE están ubicados de modo que A, C y E son colineales y los puntos B y D se encuentran en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{AE}$. $G_1$ y $G_2$ son los baricentros de los triángulos ABC y CDE respectivamente. Si AB=2(DE) y $G_1D=L$, entonces la distancia entre los puntos $G_1$ y $G_2$ es :

A) L/2 B) L/3 C) L
D) 2L E) 2/3L

**PROBLEMA Nº 61**

En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$, si la diferencia de las longitudes de los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos AHB y BHC es L unidades. Halle la distancia del incentro del triángulo ABC a la altura $\overline{BH}$.

A) L/5 B) L/4 C) L/3
D) L/2 E) L

**PROBLEMA Nº 62**

Sea el triángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$, sean $I_1$ e $I_2$ son incentros de los triángulos BHA y BHC; I es el incentro del triángulo ABC e $\overrightarrow{I_1I_2} \cap \overline{BC} = \{D\}$. Halle la medida del ángulo $I_1DB$ y que punto notable es I del triángulo $I_1BI_2$.

A) 45° ; incentro
B) 45° ; ortocentro
C) 45° ; circuncentro
D) 30° ; incentro
E) 30° ; ortocentro

**PROBLEMA Nº 63**

Dado el triángulo ABC; donde la $m\measuredangle BAC=32°$ y $m\measuredangle ACB=88°$. Además O, I y H son circuncentro, incentro y ortocentro respectivamente. Halle $m\measuredangle OIH$.

A) 150°　B) 151°　C) 152°
D) 153°　E) 155°

**PROBLEMA Nº 64**

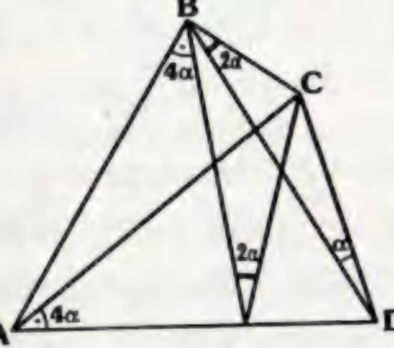
En un triángulo ABC, se ubica el incentro I, por I se traza una recta secante que intersecta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en M y N respectivamente. Si $m\measuredangle INA = 60°$, $MI/IN = \sqrt{3}$, halle la medida del ángulo BAC.

A) 60°　B) 75°
C) 90°　D) Hay dos respuestas
E) 120°

**PROBLEMA Nº 65**

En la figura adjunta, AB=AD. Halle el valor de $\alpha$.

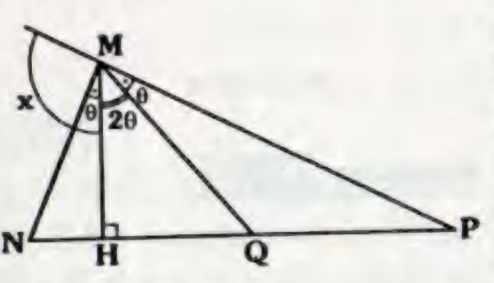
A) 6°
B) 8°
C) 10°
D) 12°
E) 15°




**PROBLEMA Nº 66**

En el siguiente gráfico $\overline{MQ}$ es mediana del triángulo MNP. Halle x.

A) 60°
B) 90°
C) 67,5°
D) 12,5°
E) 112,5°




**PROBLEMA Nº 67**

Hallar el perímetro de un triángulo rectángulo si los radios de las circunferencias inscritas y circunscritas miden r y R unidades respectivamente.

A) $4R-r$　B) $3R-r$
C) $2(R+r)$　D) $2(2R+r)$
E) $4(R+r)$

**PROBLEMA Nº 68**

En un triángulo ABC, halle la longitud de la flecha relativa a $\overline{AC}$, si los radios de los círculos inscritos y exinscrito relativo a $\overline{AC}$, miden r y R respectivamente $(R>r)$.

A) $\dfrac{2R+r}{3}$　B) $\dfrac{R-r}{3}$　C) $\dfrac{R-r}{2}$

D) $2R-r$　E) $\dfrac{2R-r}{4}$

**PROBLEMA Nº 69**

Se tiene un triángulo rectángulo ABC (recto en B), el cual está inscrito en una circunferencia, E es excentro relativo a $\overline{BC}$, $\overline{AE}$ corta a la circunferencia en P. Si BP=3. Calcule EC.

A) 3　B) $3\sqrt{2}$　C) 6
D) $3\sqrt{3}$　E) 4,5

**PROBLEMA Nº 70**

Sea el cuadrilátero ABCD convexo, $M \in \overline{AB}$ y $N \in \overline{DC}$, sea $O_1$ el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero AMND, $O_2$ el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero NMBC. Si AB+CD=40m, AD+BC=24m. Halle MN.

A) 8m　B) 9m　C) 10m
D) 11m　E) 12m

**PROBLEMA Nº 71**

En un triángulo ABC recto en B, sobre $\overline{AC}$ se ubica el punto F y se trazan $\overline{FP} \perp \overline{AB}$ y $\overline{FQ} \perp \overline{BC}$ respectivamente :

$$\left(P \in \overline{AB} \wedge Q \in \overline{BC}\right)$$

Si AB+BC=PF+AC y los inradios de los triángulos APF y FQC miden 3 y 4 unidades, entonces $\overline{PF}$ mide (en μ).

A) 14 B) 12 C) 10 D) 8 E) 6

**PROBLEMA Nº 72**

En un triángulo rectángulo, si el semiperímetro es p y la hipotenusa mide h, entonces el inradio mide :

A) $p-\frac{h}{2}$ B) $\frac{p-h}{2}$ C) $p-h$

D) $2p-h$ E) $\frac{p+h}{2}$

**PROBLEMA Nº 73**

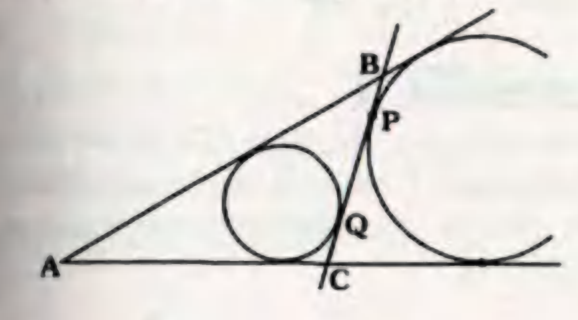
En un triángulo rectángulo ABC (recto e B) se traza la altura $\overline{BH}$, si I es el incentro. Halle la distancia trazada de I a $\overline{BH}$ si se sabe que:

BH=12 y $r_1=3$ ($r_1$ es el inradio del triángulo AHB).

A) 1,5 B) 2 C) 1 D) 2,5 E) 1,25

**PROBLEMA Nº 74**

Si AC=b y AB=c. Halle PQ.




A) $\frac{c-b}{5}$ B) $\frac{c-b}{4}$ C) $\frac{c-b}{3}$

D) $\frac{c-b}{2}$ E) $c-b$

**PROBLEMA Nº 75**

ABCD es un cuadrilátero exinscriptible y circunscriptible. Si AB = 8μ entonces AD (en μ) es :

A) 6 B) 8 C) 9

D) 10 E) 15

**PROBLEMA Nº 76**

ABCD es un cuadrilátero en donde BC=CD, m∡BCD = m∡DAB = 90° se traza $\overline{BE}$ de manera que $E \in \overline{AD}$, EBCD es un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, se traza $\overline{CH} \perp \overline{AD}$ $\left(H \in \overline{AD}\right)$ tal que : CH − HD = 8μ, EH = 6μ, calcule el radio de la circunferencia inscrita en ABE (en μ).

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

**PROBLEMA Nº 77**

En la figura AN=18μ, AD+DC=14μ, OC=8μ. Halle el radio R (en μ).

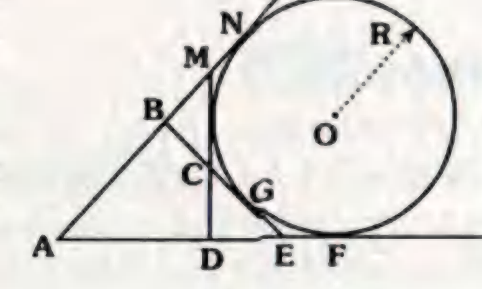
A) $4\sqrt{5}$

B) $4\sqrt{6}$

C) 6

D) $4\sqrt{3}$

E) 4



**PROBLEMA Nº 78**

un triángulo ABC, $AB = 5\mu$ , $BC = 7\mu$ $AC = 6\mu$ se inscribe una circunferencia ngente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q. el arco menor PQ se traza una tannte que interseca a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ E y F respectivamente. Halle el períetro del triángulo EBF (en $\mu$).

4 B) 5 C) 6
7 E) 8

**PROBLEMA Nº 79**

n un cuadrilátero convexo MNPQ, se aza $\overline{RS}$ tal que : $S \in \overline{QP}$ , $R \in \overline{MN}$ . Si Q+NP=a y QP+MN=b y los cuadriláros RMQS y RSPN son circunscriptibles, ntonces la razón RS/(b – a) es igual a :

) 10,3 B) 0,1 C) 0,2
) 0,8 E) 0,5

**PROBLEMA Nº 80**

e tiene el triángulo ABC, $AB = 6\mu$, $C = 8\mu$ , se inscribe una circunferencia ngente al lado $\overline{BC}$ en M, se exinscribe na circunferencia tangente al lado $\overline{BC}$ n N. Halle MN (en $\mu$).

) 1 B) 3 C) 1,5
) 2 E) 2,5

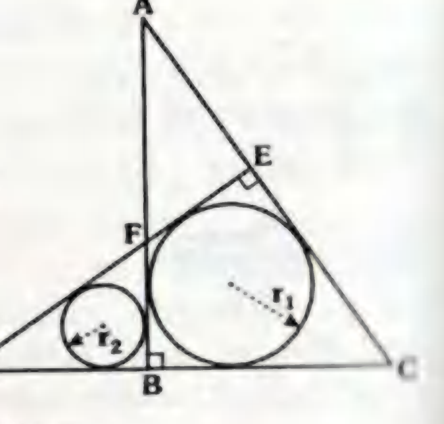
**PROBLEMA Nº 81**

n un triángulo ABC, se cumple $m\measuredangle BAC = 76°$ , $m\measuredangle BCA = 44°$ y la disncia del incentro al circuncentro es $\sqrt{2}$ . Calcule la distancia del ircuncentro al ortocentro.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

**PROBLEMA Nº 82**

En la figura hallar FE en función de $r_1$ y $r_2$.




A) $r_2 - r_1$

B) $r_2 + r_1$

C) $(r_1 + r_2)/2$

D) $2r_1 - r_2$

E) $2r_2 - r_1$

**PROBLEMA Nº 83**

Si el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo mide 4 cm y uno de sus catetos 10 cm; entonces la distancia del incentro al circuncentro del triángulo rectángulo dado es :

A) $\sqrt{65}$ cm B) 12 cm C) $\sqrt{51}$ cm
D) 8 cm E) 9 cm

**PROBLEMA Nº 84**

En el $\Delta ABC$ $(m\measuredangle B = 40°)$ , M es el punto medio del segmento que une el incentro con el excentro relativo a $\overline{AC}$ . Hallar $m\measuredangle AMC$ .

A) 60° B) 80° C) 120°
D) 140° E) 90°

**PROBLEMA Nº 85**

En un triángulo equilátero su lado mide a unidades. Entonces, la longitud del radio de una circunferencia exinscrita al triángulo es :

A) 2a B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{3a}{2}$

D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

**PROBLEMA Nº 86**

Se tiene un triángulo ABC cuyos lados miden AC=b, AB=c y BC=a. Si a+c=b+2r donde "r" es el inradio del triángulo ABC. Calcule m∡ABC.

A) 60º B) 45º C) 75º

D) 90º E) 120º

**PROBLEMA Nº 87**

Del siguiente gráfico. Calcular :

$$\frac{m+n}{m+n+p+q}$$

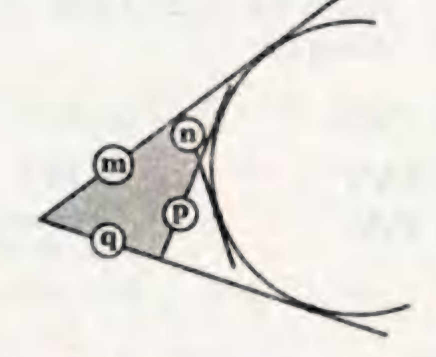
A) 4/5

B) 3/4

C) 2/3

D) 2/3

E) 1/2




**PROBLEMA Nº 88**

En un triángulo ABC: el ortocentro de su triángulo mediano es el .................. del triángulo ABC.

A) Ortocentro

B) Incentro

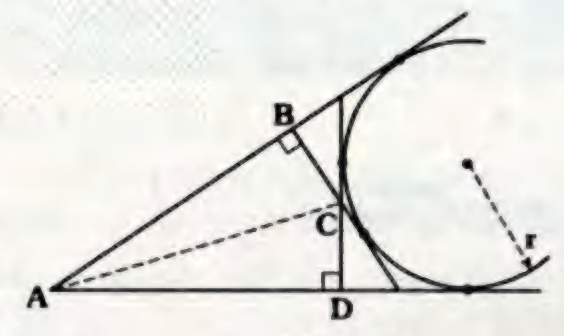
C) Baricentro

D) Circuncentro

E) Punto de Feuerbach

**PROBLEMA Nº 89**

Con respecto a los inradios de los triángulos ABC y ADC $r_1$ y $r_2$ respectivamente se puede afirmar que :




A) $r_1 > r_2$ B) $r_1 < r_2$

C) $r_1 = r_2$ D) Falta información

E) $r_1 + r_2 = r$

**PROBLEMA Nº 90**

Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas :

**I.** Sean A y B dos puntos de una circunferencia de centro O; $\overleftrightarrow{L}$ es la recta que contiene a los puntos medios de la cuerda AB y el arco AB, luego: $O \in \overleftrightarrow{L}$.

**II.** En todo triángulo : ortocentro, incentro y baricentro son puntos de una misma recta.

**III.** Todo trapecio es inscriptible.

A) Sólo I B) Sólo II

C) I y II D) I y III

E) Sólo III

**PROBLEMA Nº 91**

Se tiene un triángulo rectángulo ABC. Para hallar la longitud de la hipotenusa $\overline{BC}$ es necesario conocer.

Los radios de los círculos exinscritos relativos a los catetos.

El inradio y exradio relativo a la hipotenusa.

Sólo I B) Sólo II

I y II D) Falta información

I ó II

**OBLEMA Nº 92**

licar verdadero o falso según corresnda :

) El incentro está ubicado en el interior para todo triángulo.

) El ortocentro de un triángulo rectángulo está ubicado en el punto medio de la hipotenusa.

) El baricentro de un triángulo puede estar ubicado en el exterior.

) El circuncentro de un triángulo obtusángulo está ubicado en uno de sus vértices.

) Todo triángulo tiene tres excentros.

A) VVFFV B) FVFVF

C) VVVFF D) VFFFV

E) VVFVV

**PROBLEMA Nº 93**

Diga el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

**I.** Las alturas de un triángulo acutángulo son las bisectrices interiores de los ángulos del triángulo pedal.

**II.** En todo triángulo acutángulo la distancia del ortocentro al vértice es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto al vértice considerado.

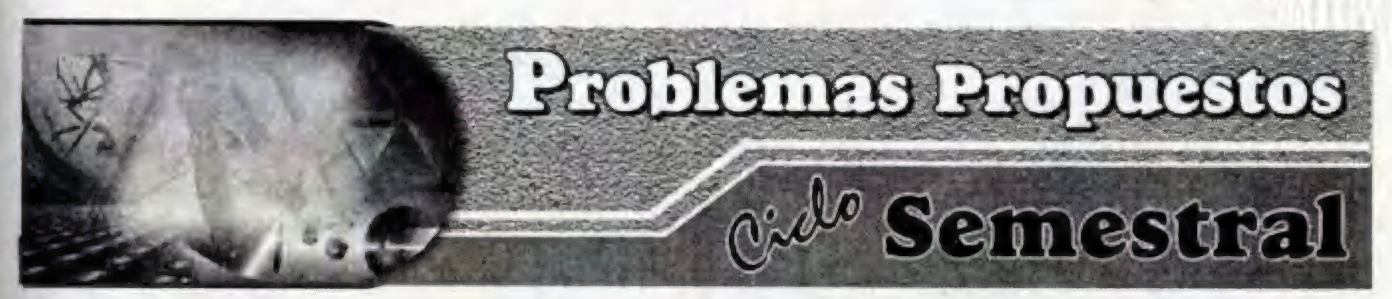
**III.** La circunferencia que pasa por 2 vértices de un triángulo y por su incentro, tiene su centro en la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

A) VVF B) VFV

C) VVV D) FFF

E) FVV

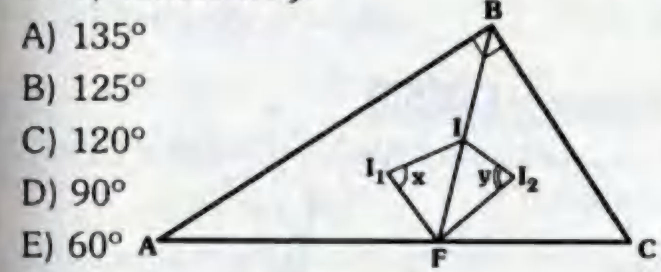





**PROBLEMA Nº 94**

I, $I_1$ e $I_2$ son incentros de ABC, ABF y BFC, calcule x+y.

A) 135°
B) 125°
C) 120°
D) 90°
E) 60°




**PROBLEMA Nº 95**

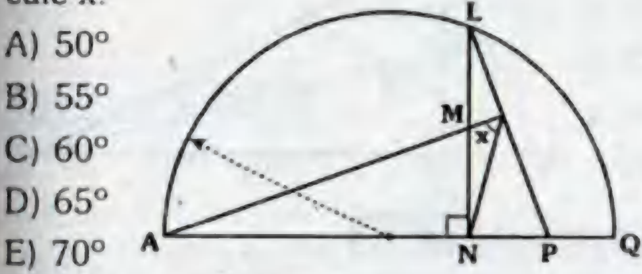
Se tiene un triángulo ABC (recto en B), la bisectriz del ángulo exterior en B corta a la circunferencia circunscrita en M, si N es punto medio de $\overline{AC}$, calcule $m\measuredangle MNA$.

A) 60° B) 70° C) 80°
D) 90° E) 100°

**PROBLEMA Nº 96**

Si LM=MN, NP=PQ y $m\widehat{AL}=110°$, calcule x.

A) 50°
B) 55°
C) 60°
D) 65°
E) 70°




**PROBLEMA Nº 97**

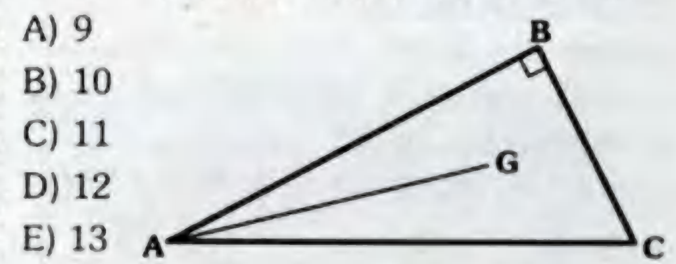
En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, I y E son el incentro y excentro relativo a $\overline{BC}$, si AC=IE=6, calcule AB.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**PROBLEMA Nº 98**

Si G es baricentro de ABC y AC=18, calcule el mayor valor entero de AG.

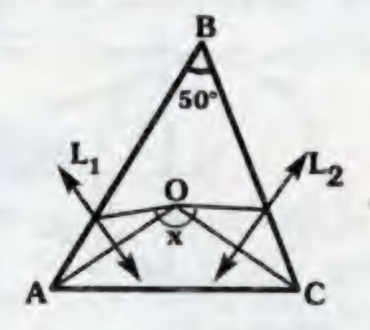
A) 9
B) 10
C) 11
D) 12
E) 13




**PROBLEMA Nº 99**

O es circuncentro de ABC, si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{AO}$ y $\overline{OC}$, calcule x.

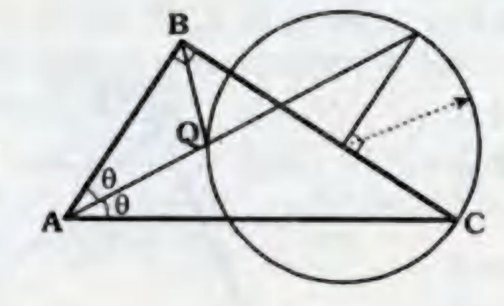
A) 110°
B) 120°
C) 130°
D) 140°
E) 150°




**PROBLEMA Nº 100**

Si $BQ=3\sqrt{2}$, calcule el inradio de ABC.

A) 3
B) 3,5
C) $3\sqrt{2}$
D) 4
E) 5



**PROBLEMA Nº 101**

E es excentro de ABC, calcule x :

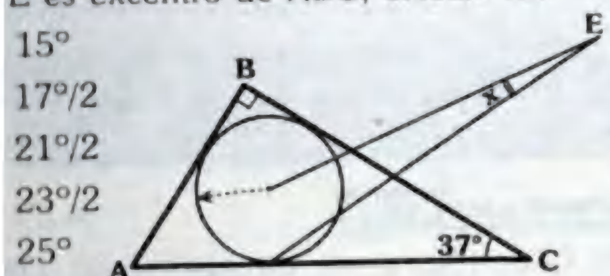
15°

17°/2

21°/2

23°/2

25°




**PROBLEMA Nº 102**

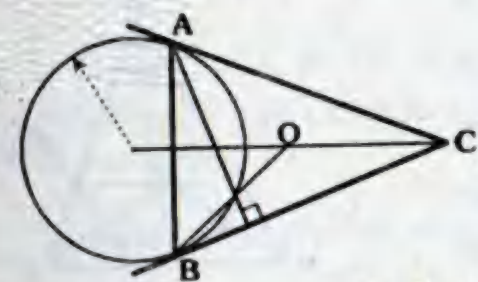
tiene el triángulo rectángulo ABC, recen B, m∡BAC = 30° y $AC=\sqrt{3}$, si O circuncentro de ABC, calcule la distancia entre los circuncentros de AOB y BOC.

) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$

) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$

**PROBLEMA Nº 103**

y B son puntos de tangencia. ¿Qué punto notable es O de ABC?.




) Circuncentro B) Baricentro

) Punto de Georgone D) Incentro

) Ortocentro

**PROBLEMA Nº 104**

Si I es incentro de ABC, AI=IP y PC=6, calcule el mínimo valor entero de AC.

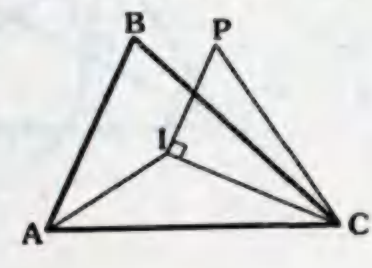
) 5

) 6

) 7

) 8

) 9




**PROBLEMA Nº 105**

Si P es punto de tangencia y baricentro de ABC, MP=2, calcule r.

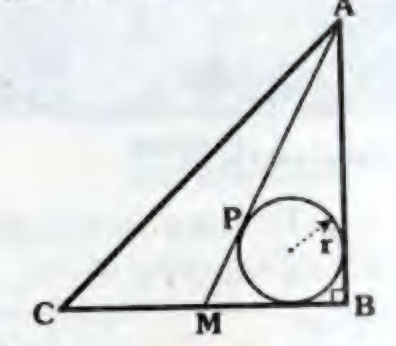
A) $3\sqrt{5}$

B) $2\sqrt{5}-1$

C) $\sqrt{15}-3$

D) $\sqrt{17}-3$

E) $2\sqrt{7}$




**PROBLEMA Nº 106**

I es incentro de ABC, MC=CN y CI=3, calcule PQ.

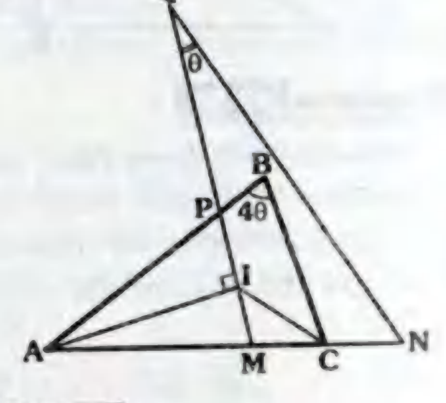
A) 6

B) 6,5

C) $6\sqrt{2}$

D) 8

E) 9




**PROBLEMA Nº 107**

I es incentro de ABC y $a-b=4$, calcule x.

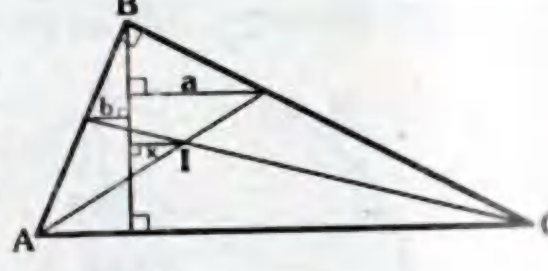
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5




**PROBLEMA Nº 108**

Dado los triángulos equiláteros ABC, de baricentro $G_1$, CDE, de baricentro $G_2$, tal que A, C y E son colineales y B, C y D no son colinelales, si AC=2(CD) y $G_1G_2=5$, calcule $G_1D$.

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

**PROBLEMA Nº 109**

Se tiene el $\Delta ABC$, se trazan la altura BH y la ceviana interior CP, tal que BC=CP, si $m\measuredangle PCA = 15°$ y $m\measuredangle BAC = 60°$, calcule $m\measuredangle PHA$.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

**PROBLEMA Nº 110**

En un cuadrilátero ABCD, si :

$m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle ABD) = 120°$ ;

$m\measuredangle ADB = 40°$ y

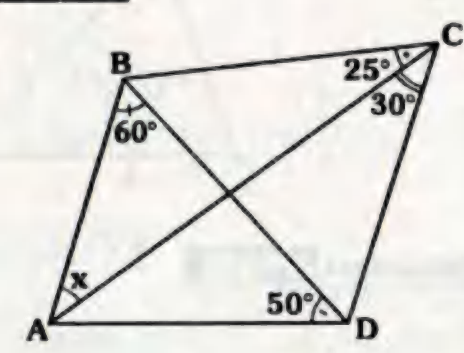
$m\measuredangle ADC = 110°$

Calcule la medida del ángulo entre las diagonales.

A) 60° B) 65° C) 70°
D) 75° E) 80°

**PROBLEMA Nº 111**

Calcule x.




A) 30°
B) 40°
C) 35°
D) 45°
E) 50°

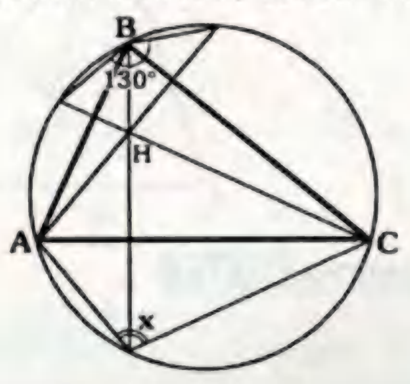
**PROBLEMA Nº 112**

En un $\Delta ABC$, se ubica O en la ceviana interior BH, tal que $m\measuredangle BAO = m\measuredangle BCO$ $m\measuredangle AOC = 90° + m\measuredangle BAO$, si $m\measuredangle OAC = 15°$ y BC=12, calcule la distancia de H a $\overline{BC}$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

**PROBLEMA Nº 113**

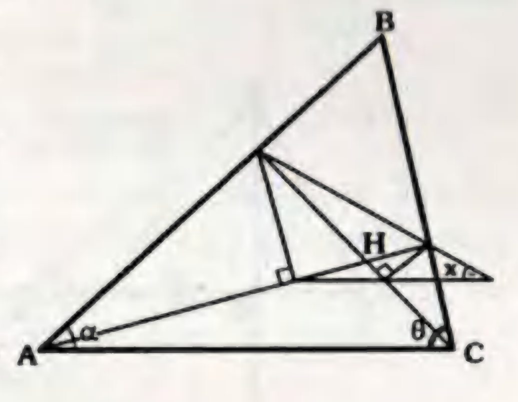
Si H es ortocentro de ABC, calcule x.




A) 115°
B) 95°
C) 100°
D) 105°
E) 110°

**PROBLEMA Nº 114**

H es ortocentro de ABC, calcule x.




A) $\theta + \alpha$
B) $\theta - \alpha$
C) $\dfrac{\alpha + \theta}{2}$
D) $\dfrac{\theta - \alpha}{2}$
E) $2\alpha - \theta$

**PROBLEMA Nº 115**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se construye el triángulo equilátero APC (exterior a ABC), si $m\measuredangle ACB = 15°$ y AB+BC=12, calcule la distancia del baricentro de APC a $\overline{BC}$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

**PROBLEMA Nº 116**

Si G es baricentro de ABC, BGP es un triángulo equilatero, AN=3(NC), PM=MC y BP=4, calcule MN.

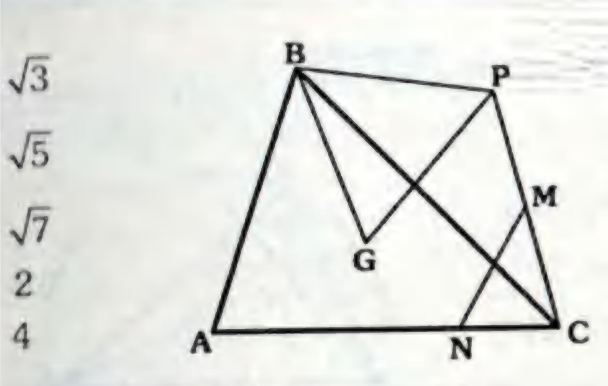
$\sqrt{3}$

$\sqrt{5}$

$\sqrt{7}$

2

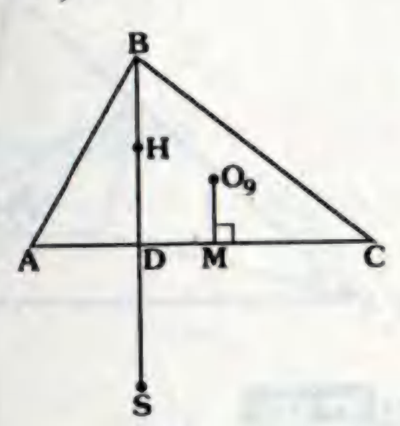
4




**PROBLEMA Nº 117**

el gráfico H y $O_9$ son ortocentro y ntro de la circunferencia de Euler del ángulo ABC. Si BD=DS.

lcule: $\dfrac{HS}{O_9M}$




2 B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$

) 3 E) 4

**PROBLEMA Nº 118**

es el circuncentro de ABC y ortocentro EDC, si $\alpha+\beta=75^\circ$, calcule x.

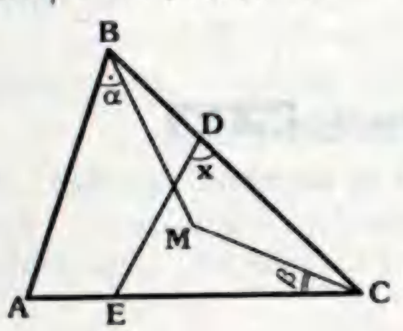
) 60°

) 65°

) 70°

) 75°

) 80°




**PROBLEMA Nº 119**

Si H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC respectivamente y AC=3(BH), calcule x.

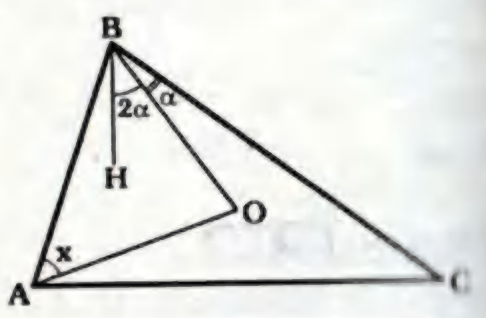
A) 53°

B) $\dfrac{429^\circ}{8}$

C) 45°

D) $\dfrac{245^\circ}{60}$

E) 60°




**PROBLEMA Nº 120**

Calcule el cincunradio de ABC, si H y O son su ortocentro y circuncentro respectivamente, además el perímetro de la región triangular equilátera HLO es 6 y $\overline{HO} // \overline{AC}$.

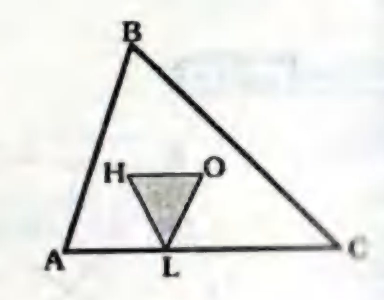
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6




**PROBLEMA Nº 121**

En un $\Delta ABC$, H es el ortocentro y O es el circuncentro, si $m\measuredangle ABH = 2(m\measuredangle HBO)$ y BH=BO, calcule $m\measuredangle HAO$.

A) 6° B) 7° C) 8°

D) 9° E) 10°

**PROBLEMA Nº 122**

Se tiene un triángulo ABC, se ubica el punto O en la altura BH, K y O son el circuncentro y ortocentro de ABC

respectivamente, si $m\measuredangle ABC = 60°$ y $m\measuredangle AOH = 40°$, calcule $m\measuredangle HOK$.

A) 90° B) 95° C) 100°
D) 105° E) 110°

**PROBLEMA Nº 123**

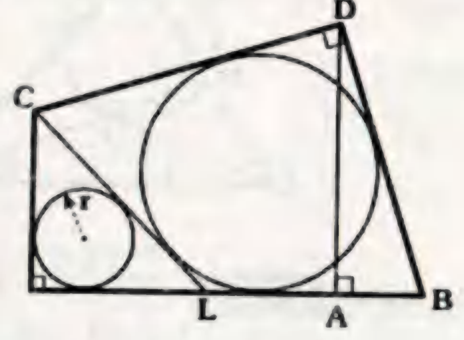
Se tiene el $\Delta ABC$; $I_1$, $I_2$ e $I_3$ son sus excentros ($I_1$ es relativo a $\overline{AB}$), además I es el incentro de ABC, si $m\measuredangle I_3I_1I_2 = 50°$, calcule $m\measuredangle I_2I\,I_3$.

A) 100° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 140°

**PROBLEMA Nº 124**

Si $AD - AB = 6$, AL=4 y CD=DB, calcule r

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5




**PROBLEMA Nº 125**

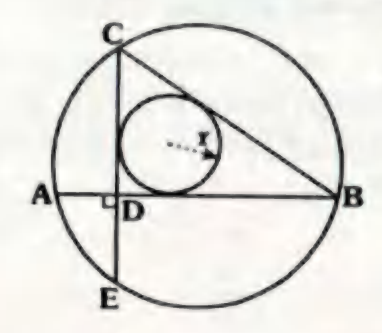
Dado un triángulo rectángulo ABD, recto en B, se construye el triángulo rectángulo BCD, recto en C, si AB=4(BC), AD=5(BC)–7 y la suma de los inradios de ABD y BCD es 5, calcule CD.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

**PROBLEMA Nº 126**

Si $m\overset{\frown}{CA} = 2\left(m\overset{\frown}{AE}\right)$, y $CD - AD = 16$. Calcule r.

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9




**PROBLEMA Nº 127**

En un cuadrilátero ABCD circunscrito, AB=AC y $m\measuredangle ACD = 90°$, si BC=12. Calcule el inradio de ACD.

A) 3 B) 1 C) 5
D) 6 E) 7

**PROBLEMA Nº 128**

Se tiene el trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B, dicho trapecio es circunscrito, si $m\measuredangle ACD = 90°$ y los inradios de ABC y ACD son $r_1$ y $r_2$ respectivamente, calcule BC.

A) $2r_1 - r_2$ B) $\frac{r_1 + r_2}{2}$

C) $r_1 + 2r_2$ D) $3r_1 - 2r_2$

E) $r_1 + r_2$

**PROBLEMA Nº 129**

Se tiene el cuadrilátero inscrito ABCD, se ubica E en $\overline{BC}$, si CD=3, $m\measuredangle BAD = 2(m\measuredangle EDC)$ y ED toma su máximo valor entero, calcule AB. (Siendo ABED circunscrito de perímetro 26).

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

**PROBLEMA Nº 130**

...do un octógono circunscrito ...CDEFGH, si AB=2(BC)=DE=2, ...=1,5, EF=2,5, GH=3 y AH=4, ...ule FG.

...1 B) 1,5 C) 2
...2,5 E) 3

**PROBLEMA Nº 131**

... un triángulo ABC, de incentro I y ...ectriz interior AD, se traza $\overline{IE}$ perpen-...ular a BC $\left(E \in \overline{BC}\right)$, calcule :

$$\frac{m\measuredangle BID}{m\measuredangle EIC}$$

... 0,5 B) 1 C) 1,5
... 2 E) 2,5

**PROBLEMA Nº 132**

...n un cuadrilátero ABCD, ...$\measuredangle BAD = 105°$ , $m\measuredangle ABC = 130°$ , ...$\measuredangle BAC = 30°$ y $m\measuredangle ACD = 80°$ , calcule ... medida del ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ .

...) 60° B) 65° C) 75°
...) 85° E) 90°

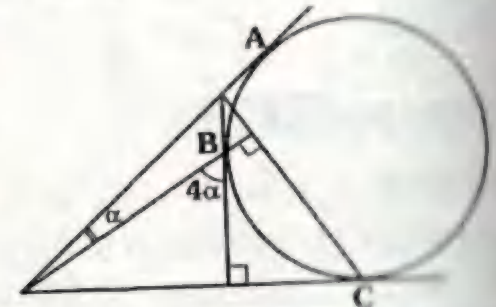
**PROBLEMA Nº 133**

...e tiene el triángulo rectángulo ABC, rec-...o en B, en el cual BQ es mediana, traza-...mos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overline{BQ}$ , $\overline{AM} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $\overline{CN} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ (M ... N$\in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ ), si MN=24, calcule la distan-...cia del ortocentro de ABC a $\overline{AC}$ .

...A) 8 B) 10 C) 12
...D) 14 E) 16

**PROBLEMA Nº 134**

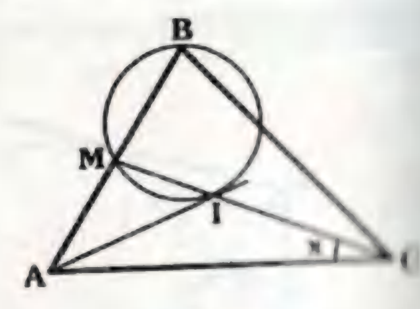
A, B y C son puntos de tangencia, cal-cule α .




A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 16°
E) 18°

**PROBLEMA Nº 135**

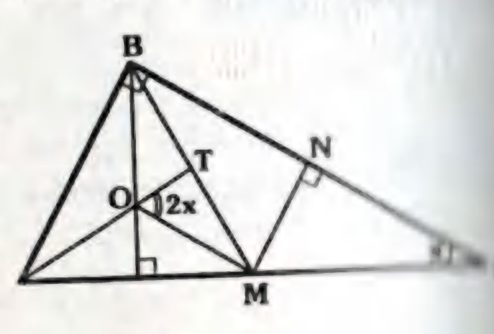
I es punto de tangencia e incentro de ABC, si MB=20 y el inradio de ABC mide 15, calcule x.




A) 30°
B) 37°
C) 37°/2
D) 15°
E) 14°

**PROBLEMA Nº 136**

Si : $\overline{OM} // \overline{BC}$ y MT=MN, calcule x.




A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 15°
E) 14°

**PROBLEMA Nº 137**

En un triángulo acutángulo ABC de circuncentro O, la prolongación de BO corta a $\overline{AC}$ en P, si $m\measuredangle ABP = 30°$ y $m\measuredangle PBC = 20°$ , calcule $m\measuredangle BPC$ .

A) 90°　　B) 25°　　C) 80°

D) 100°　　E) 40°

**PROBLEMA Nº 138**

Se tiene un triángulo isósceles ABC (AB=BC) cuyo excentro relativo a $\overline{BC}$ es E, en el $\Delta BEC$ se traza la altura EH, si BH=2, calcule AC.

A) 3　　B) 4　　C) 5

D) 6　　E) 7

**PROBLEMA Nº 139**

Se tiene un triángulo equilátero ABC, inscrito en una circunferencia de centro O, se traza una cuerda $\overline{CQ}$, tal que $\overline{CQ} \perp \overline{AC}$, si el circunradio de BQO mide 4, calcule BC.

A) 12　　B) $12\sqrt{2}$　　C) $12\sqrt{3}$

D) 13　　E) 24

**PROBLEMA Nº 140**

En los lados AB y BC de un triángulo ABC se ubican los puntos P y Q respectivamente, de modo que $\overline{PQ}$ es tangente a la circunferencia inscrita a dicho triángulo, si los perímetros de las regiones triangulares ABC y PBQ son 24 y 12, calcule AC.

A) 5　　B) 6　　C) 7

D) 8　　E) 9

**PROBLEMA Nº 141**

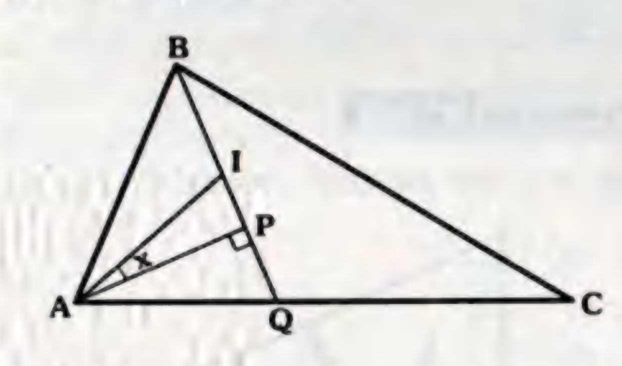
En un paralelogramo ABCD en $\overline{CD}$ se ubica el punto M tal que CM=MD=3, en $\overline{BM}$ se ubica N de modo que BN=2(MN) y $m\measuredangle NDA = m\measuredangle BCD$. Calcule DN.

A) 2　　B) 3　　C) 4

D) 5　　E) 6

**PROBLEMA Nº 142**

I es incentro de ABC, si AB=BQ y QC=2(AP), calcule x.




A) 10°　　B) 11°　　C) 12°

D) 14°　　E) 15°

**PROBLEMA Nº 143**

Dado un triángulo acutángulo ABC, calcule la distancia del circuncentro de ABC a la altura BF, siendo su circunradio 12 y $m\measuredangle BAC - m\measuredangle BCA = 30°$.

A) 3　　B) 4　　C) 5

D) 6　　E) 7

# Problemas Propuestos

Ciclo Semestral Intensivo

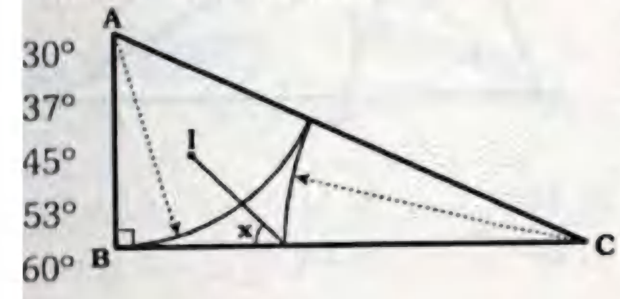
**PROBLEMA Nº 144**

...tiene el $\Delta ABC$ de circuncentro O, se ...ca el punto P exterior y relativo a $\overline{BC}$. ...PC es igual al circunradio de ABC y ...BPC = m∡BAC, calcule m∡PBC.

...30° B) 37° C) 45°
...53° E) 60°

**PROBLEMA Nº 145**

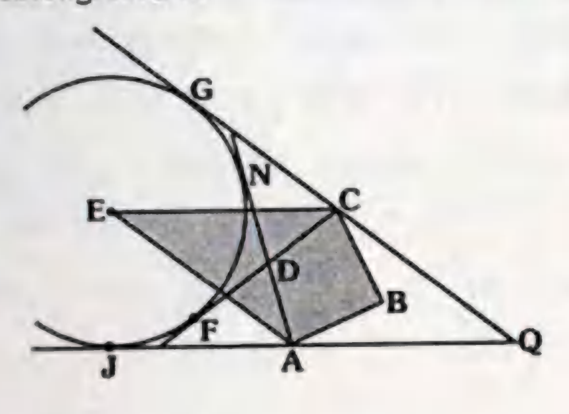
... incentro de ABC, calcule x.




...30°
...37°
...45°
...53°
...60°

**PROBLEMA Nº 146**

...el gráico J, F, N y G son puntos de ...gencia, indique que tipo de cuadrilá...o es ABCE, si ABCD y AECQ son ...ralelogramos.




A) Circunscriptible B) Exinscriptible
C) Trapecio D) Inscriptible
E) Bicéntrico

**PROBLEMA Nº 147**

Se tiene el cuadrilátero ABCD, se prolonga $\overline{AB}$ hasta E, si m∡ADB = 54°, m∡BDC = 30°, m∡DBC = 78° y m∡EBC = 48°, calcule m∡BAC.

A) 10° B) 12° C) 14°
D) 16° E) 18°

**PROBLEMA Nº 148**

O es circuncentro de ABC y punto de tangencia, si $\overline{AO} // \overline{O_1Q}$, calcule AO/r.

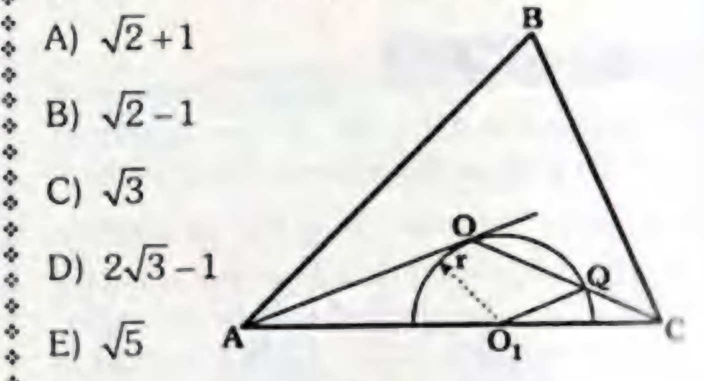
A) $\sqrt{2}+1$

B) $\sqrt{2}-1$

C) $\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}-1$

E) $\sqrt{5}$




**PROBLEMA Nº 149**

Dado el triángulo acutángulo ABC, H y O son el ortocentro y circuncentro de ABC, si AB=2 y $BH = BO = \sqrt{2}$, calcule m∡HBO.

A) 14° B) 15° C) 20°
D) 30° E) 45°

**PROBLEMA Nº 150**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior AD, si $CD=2(AB)$, $BD=2\sqrt{3}$ y $m\measuredangle BCA=15^{\circ}$, calcule la distancia del ortocentro de ABC al circuncentro de ABD.

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{3}$ E) 2

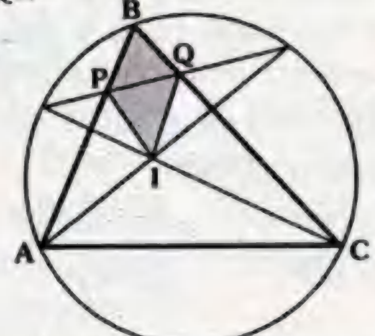
**PROBLEMA Nº 151**

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior BD, I es el incentro de ABC, si $BI=7\sqrt{2}$ y $DI=5\sqrt{2}$, calcule AC.

A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

**PROBLEMA Nº 152**

I es incentro de ABC, ¿Qué tipo de cuadrilátero es PBQI?




A) Rombo

B) Rectángulo

C) Inscriptible

D) Romboide

E) Cuadrado

**PROBLEMA Nº 153**

Se tiene el triángulo ABC de incentro I y circuncentro O, si K es el circuncentro de AIC, $m\measuredangle BCA=20^{\circ}$ y $m\measuredangle BAC=60^{\circ}$. Calcule $m\measuredangle KIO$.

A) 14° B) 16° C) 30°

D) 20° E) 50°

**PROBLEMA Nº 154**

Dado un $\Delta ABC$ de circuncentro O, la recta de Euler de ABC corta a $\overline{AB}$ en L, luego se ubican M y N en dicha recta, si $m\measuredangle BLO=60^{\circ}$, $m\measuredangle MAC=m\measuredangle NCA=90^{\circ}$, AM=2 y NC=4, calcule BO.

A) 3 B) 4 C) 4,5 D) 5 E) 6

**PROBLEMA Nº 155**

Por el vértice C de un $\Delta ABC$ se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ paralela a la mediana BN, la prolongación de la mediana AM corta a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ en F, si G es el baricentro de ABC y la suma de las longitudes de las medianas del $\Delta ABC$ es $\ell$, calcule el perímetro de la región limitada por el triángulo mediano del $\Delta GCF$.

A) $\frac{\ell}{4}$ B) $\frac{\ell}{3}$ C) $\frac{\ell}{2}$

D) $\ell$ E) $\frac{3\ell}{2}$

**PROBLEMA Nº 156**

Se tiene el pentágono ABCDE, si :

$m\measuredangle BAC=m\measuredangle CAD$ y

$m\measuredangle DEC=m\measuredangle CEB$,

$m\measuredangle ABE+m\measuredangle ADE=180^{\circ}$

y AE=30, calcule la distancia entre el baricentro y circuncentro de ACE.

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

**PROBLEMA Nº 157**

En los lados AB y CD de un cuadrilátero ABCD se ubican los puntos P y Q, si PBCQ y APQD son circunscriptibles, calcule:

$$\frac{PQ}{CD+AB-BC-AD}$$

A) $\frac{1}{4}$   B) $\frac{1}{3}$   C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{2}$   E) 1

**PROBLEMA Nº 158**

Si AC=4 y $BC=4\sqrt{2}$, calcule $r_1+r_2$ :

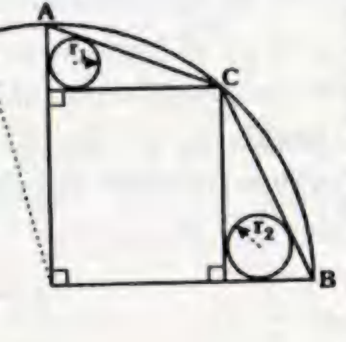
A) $\sqrt{10}-\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{10}-1$

C) $\sqrt{10}-\sqrt{3}-1$

D) $\sqrt{10}-\sqrt{2}-1$

E) $2(\sqrt{10}-\sqrt{2}-1)$




**PROBLEMA Nº 159**

Dado un triángulo ABC cuyo ortocentro es H, las prolongaciones de $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, cortan a la circunferencia circunscrita al $\Delta ABC$ en M, N y L, respectivamente. Si el perímetro de la región hexagonal ALBMCN es 18, calcule la suma de los circunradios de los triángulos LHN, NHM y LHM.

A) 9   B) 12   C) 14

D) 16   E) 18

**PROBLEMA Nº 160**

Si $m\widehat{AM}=m\widehat{MB}$, $m\widehat{NB}=m\widehat{NC}$, $m\widehat{PQ}=90°$ y las distancias de M y N a $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ son 5 y 12 respectivamente, calcule el inradio de ABC.

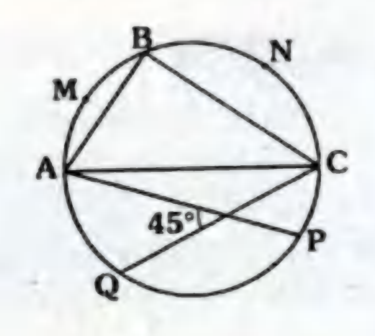
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6




**PROBLEMA Nº 161**

En una circunferencia se inscribe un triángulo ABC, $m\measuredangle ABC=90°$, se traza la altura BH, en el arco BC se ubica el punto Q, tal que sea el excentro de AHB, si $\overline{AQ}\cap\overline{BH}=\{P\}$. ¿Qué punto notable es P de ABC?

A) Incentro   B) Baricentro

C) Circuncentro   D) Punto de Miquel

E) Ortocentro

**PROBLEMA Nº 162**

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, $m\measuredangle ACB=18°$, la mediatriz del segmento que une el ortocentro y el circuncentro corta a $\overline{AC}$ en D, luego la bisectriz del ángulo BAC corta en E a $\overline{BD}$, si O es el punto medio de $\overline{AC}$, calcule $m\measuredangle DEO$.

A) 36°   B) 38°   C) 54°

D) 60°   E) 45°

**PROBLEMA Nº 163**

En un triángulo acutángulo ABC se traza la altura BM, calcule la distancia del circuncentro O de dicho triángulo a $\overline{AC}$, si AM=2, $m\measuredangle MBO=31°$ y $m\measuredangle OBC=14°$.

A) 2   B) 3   C) 4   D) 5   E) 6

**PROBLEMA Nº 164**

Dado un triángulo rectángulo ABC, recto en B, gira 60° alrededor de A, siendo su posición final AB'C', si $BC = 3\sqrt{10}$ y $m\measuredangle BAC = 37°$, calcule la distancia entre los incentros del triángulo en su posición inicial y final.

A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) 10

D) $\sqrt{18}$ E) $2\sqrt{5}$

**PROBLEMA Nº 165**

Si T es punto de tangencia, G es el baricentro de PQT y $4(BP) = 3(PG)$, Calcule x.

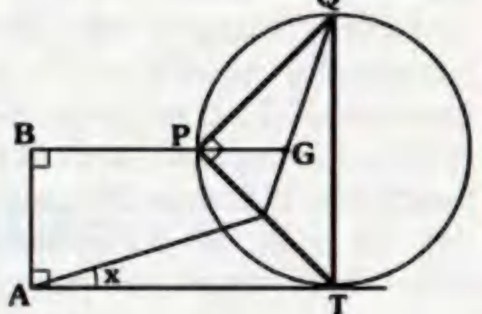
A) 14°

B) 15°

C) 37°/2

D) 53°/2

E) 30°




**PROBLEMA Nº 166**

Dado el cuadrilátero convexo ABCD, se traza $\overline{BH} \perp \overline{CD}$ $(H \in \overline{CD})$, si A es el circuncentro de BCD, AB=CD y $m\measuredangle HBC = m\measuredangle BAC$, calcule la medida del ángulo entre sus diagonales.

A) 80° B) 82° C) 84°

D) 86° E) 90°

**PROBLEMA Nº 167**

E y T son puntos de tangencia, E es el circuncentro de ABC y EDCF es un cuadrado, calcule x.

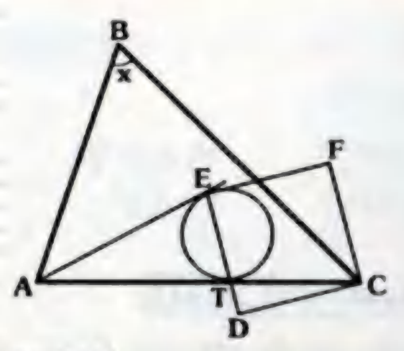
A) 90°

B) 45°

C) 53°

D) 75°

E) 60°




**PROBLEMA Nº 168**

En el gráfico $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son rectas de Simson de B y C respecto a los triángulos ACD y ABD respectivamente. Si EF= 6 y ST=5. Calcule $m\overset{\frown}{BC}$.

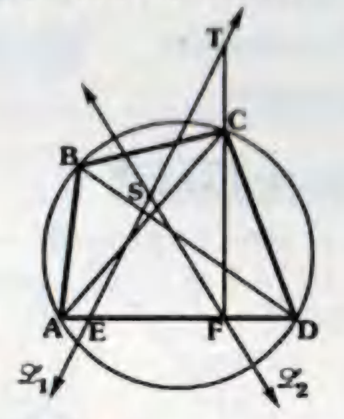
A) 60°

B) 74°

C) 106°

D) 53°

E) 78°




**PROBLEMA Nº 169**

Del gráfico, I es incentro y E es excentro de ABC, si DP+DQ=6, calcule el exradio del $\Delta ABC$, relativo a $\overline{BC}$.

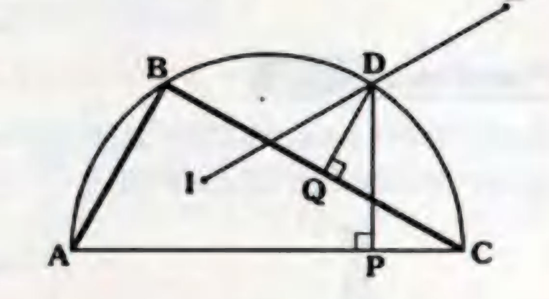
A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7




**PROBLEMA Nº 170**

Se tiene el triángulo acutángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro O, se trazan las alturas CH y AQ. Si

$\cap\overline{OB}=\{F\}$ y HF=2(FO), calcule FHO.

37°/2 B) 53°/2 C) 30°
37° E) 45°

**OBLEMA Nº 171**

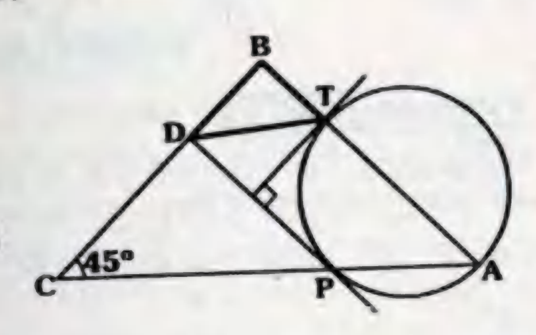
do un cuadrante AOB, de centro O, inscribe una circunferencia tangente a $\overline{O}$, $\overline{OB}$ y el arco AB en P, Q y T respectivamente. ¿Qué punto notable es B ATQ?

Incentro B) Baricentro
Circuncentro D) Ortocentro
Excentro

**ROBLEMA Nº 172**

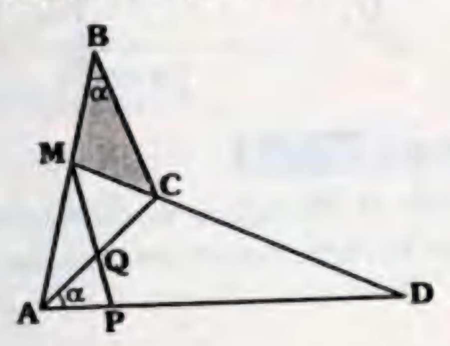
y P son puntos de tangencia, si T − DC = 1 y TD=5, calcule el inradio e TBD.

) 1
) 2
) 3
) 3,5
) 4




**PROBLEMA Nº 173**

Si m∡MAD = m∡MCA y AQ=AP. ¿Qué punto notable es Q de MBC?

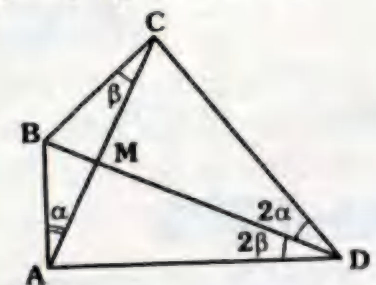



A) Ortocentro B) Circuncentro
C) Excentro D) Punto de Nagel
E) Punto de Steiner

**PROBLEMA Nº 174**

Si AM=MC=5 y AD+CD=26, calcule el inradio del triángulo AMD.

A) 0,5
B) 1
C) 1,5
D) 2
E) 3




**PROBLEMA Nº 175**

Se tiene el triángulo ABC, de inradio 3 incentro I y m∡ABC = 60°, las prolongaciones de CI y AI intersectan a la circunferencia circunscrita en M y N respectivamente, la cuerda MN corta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en E y F, calcule el perímetro de la región triangular EBF.

A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) 4
D) 6 E) $6\sqrt{3}$

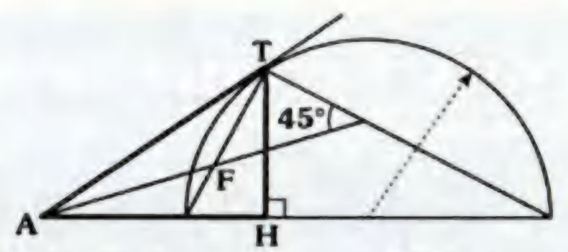
**PROBLEMA Nº 176**

Sea H e I el ortocentro e incentro respectivamente de un ΔABC, tal que $I \in \overline{BH}$, si m∡BCA + m∡HCI = 90°, calcule m∡BAC.

A) 70° B) 72° C) 74°
D) 76° E) 90°

**PROBLEMA Nº 177**

T es punto de tangencia. ¿Qué punto notable es F de ATH?




A) Incentro B) Baricentro
C) Punto de Brocard D) Ortocentro
E) Circuncentro

**PROBLEMA Nº 178**

En un triángulo ABC de ortocentro H, se trazan las alturas BQ y AM, luego la prolongación de $\overline{AM}$ corta a la circunferencia circunscrita al $\Delta ABC$ en P, si $m\measuredangle ACB = 60°$, calcule la medida del ángulo entre $\overline{QM}$ y $\overline{CP}$.

A) 14° B) 15° C) 16°
D) 30° E) 45°

**PROBLEMA Nº 179**

En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, si M es punto medio de $\overline{BC}$, AB=5 y $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle AMB)$, calcule la distancia entre su baricentro y circuncentro de ABC.

A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

**PROBLEMA Nº 180**

Se tiene un trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B, $\overline{BD}$ corta a $\overline{CA}$ en P, tal que $AP = 2(PC)$. ¿Qué tipo de triángulo es ACD?.

A) Acutángulo B) Obtusángulo
C) Escaleno D) Isósceles
E) Equilátero

**PROBLEMA Nº 181**

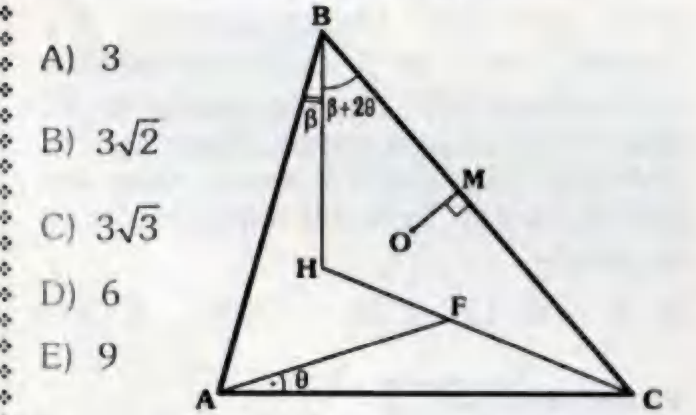
Dado un $\Delta ABC$, se traza el cuadrado BNPQ, tal que $P \in \overline{BC}$ y N es incentro de ABC, $\overleftrightarrow{AN} \cap \overleftrightarrow{BQ} = \{S\}$, si SQ=m y NS=n, calcule CN − CP.

A) $n - m\sqrt{2}$ B) $2n - m$
C) $n + m\sqrt{2}$ D) $n\sqrt{2} - m$
E) $\frac{\sqrt{2}}{2}(n - m)$

**PROBLEMA Nº 182**

H y O son ortocentro y circuncentro de ABC, si OM=3, calcule HF.

A) 3
B) $3\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{3}$
D) 6
E) 9




**PROBLEMA Nº 183**

Dado un triángulo ABC, con centro en $\overline{AC}$ se traza la circunferencia tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, dicha circunferencia contiene al circuncentro y ortocentro, calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 45° B) 53° C) 60°
D) 75° E) 90°

# Problemas Propuestos

## Ciclo Repaso

**OBLEMA Nº 184**

un triángulo ABC, se ubica en su ión interior el punto P, tal que =PC, m∡ABP = 80°, m∡BAP = 30° m∡BPC = 140°, calcule m∡ACP.

20° B) 25° C) 30° D) 35° E) 40°

**OBLEMA Nº 185**

do un triángulo acutángulo ABC ins-ta en una circunferencia $\mathscr{C}$, ∡ABC = 45°, se prolongan las alturas l triángulo ABC hasta un punto de $\mathscr{C}$ terminando una región triangular de rímetro 52, calcule el menor valor en-o del mayor lado del triángulo órtico ABC.

7 B) 11 C) 6 D) 8 E) 9

**OBLEMA Nº 186**

O es centro y baricentro del cuadrado QRS y del triángulo ABC respectivamen-, $G_1$ y $G_2$ son baricentros de AQP y RC, calcule : $\dfrac{RS}{G_1G_2}$

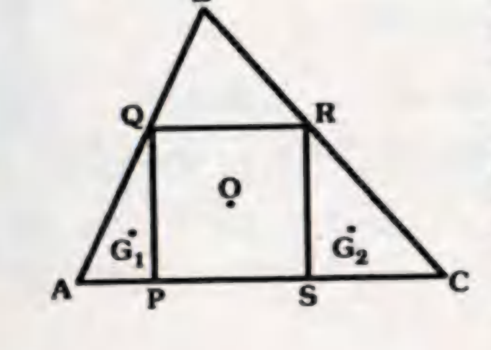
) 2/3

) 3/4

) 3/5

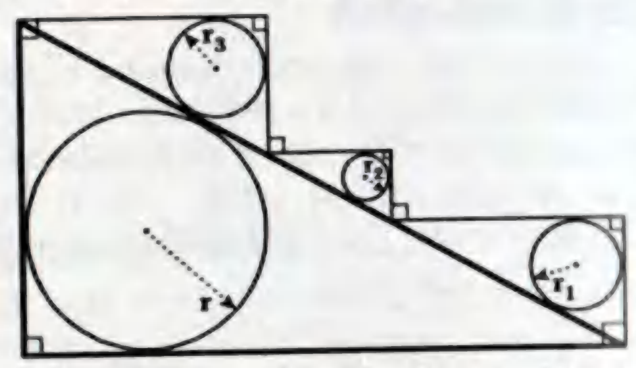
) 5/3

) 3/2




**PROBLEMA Nº 187**

Si $r_1 + r_2 + r_3 = 7$, calcule r.




A) 3,5 B) 4 C) 4,5 D) 7 E) 14

**PROBLEMA Nº 188**

Si ED=12 y AE + AB + BC + CD = 24, calcule r.

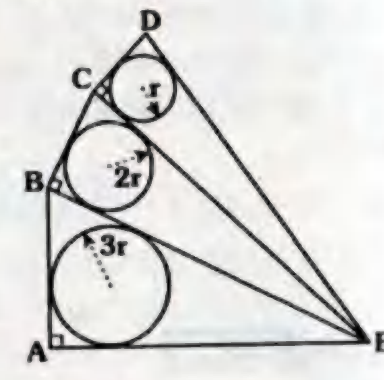
A) 1/2

B) 1

C) 3/2

D) 2

E) 5/2




**PROBLEMA Nº 189**

Dado un triángulo isósceles ABC, AB=BC se traza la ceviana interior AM, tal que MC = 2(MB), en $\overline{AM}$ se ubica el punto L, tal que m∡BLC = 90°, si Q es punto medio de $\overline{AC}$, calcule m∡ALQ.

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 135°

**PROBLEMA Nº 190**

Si H es punto de tangencia y ortocentro de ABC, calcule x.

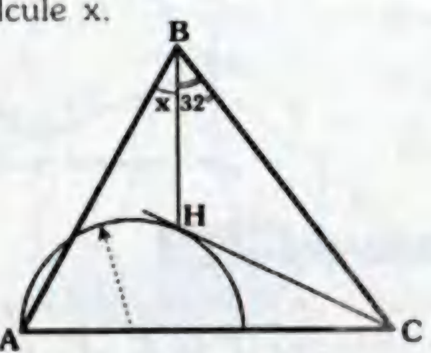
A) 26°

B) 27°

C) 28°

D) 29°

E) 30°




**PROBLEMA Nº 191**

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, tal que AB=DC, si :

$$m\measuredangle ABD = \frac{m\measuredangle BAD}{2} = \frac{m\measuredangle BCD}{4}$$

Calcule $m\measuredangle ABD$.

A) 5° B) 7° C) 9° D) 8° E) 10°

**PROBLEMA Nº 192**

Se tiene un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AB}$, si la ceviana interior BN pasa por el circuncentro de ABC y $m\measuredangle ABC = m\measuredangle ANB$, calcule $m\measuredangle NBC$.

A) 22°30' B) 10°30' C) 15°
D) 20° E) 25°

**PROBLEMA Nº 193**

Si E, B y F son puntos de tangencia y EF=15, calcule r.

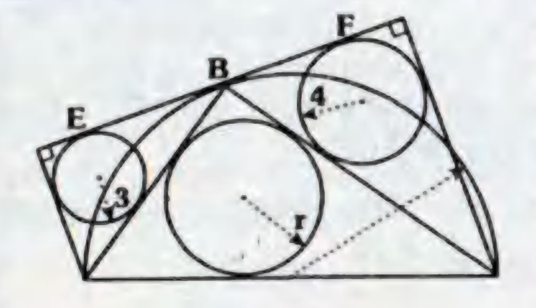
A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8




**PROBLEMA Nº 194**

Del gráfico, AB=6 y BM=MC, calcule R.

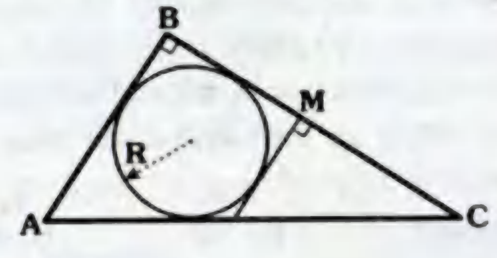
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6




**PROBLEMA Nº 195**

En un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia de centro O, donde P es el punto de tangencia con $\overline{BC}$, si $m\measuredangle ABC = 90°$, $AB + CD = 21$ y $AD + OC = 17$, calcule el inradio de OPC.

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

**PROBLEMA Nº 196**

I es incentro de ABC, AB=13, BC=15, AC=14 y BI=IP, calcule x.

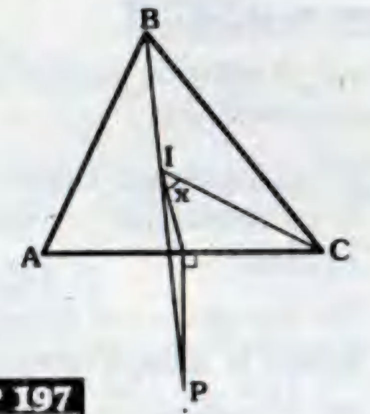
A) 42°

B) 44°

C) 45°

D) 49°30'

E) 46




**PROBLEMA Nº 197**

Si PB=2(BQ), calcule x.

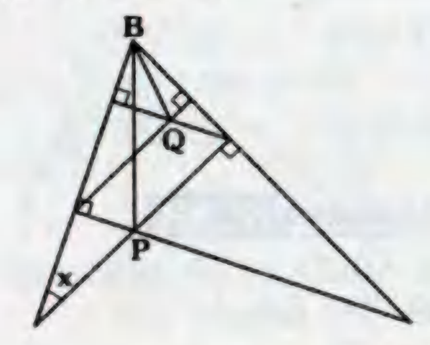
A) 10°

B) 20°

C) 30°

D) $\frac{53°}{2}$

E) $\frac{37°}{2}$







**[PR]OBLEMA Nº 198**

[En] un triángulo ABC, se trazan la altura [BH] y la bisectriz interior AL, S es la pro[yec]ción ortogonal de L sobre la paralela [a] $\overline{AC}$ traza por B, tal que el circuncentro [del] HBS se encuentra en $\overline{AL}$, calcule [m∡]ABC.

[A)] 60°   B) 75°   C) 90°
[D)] 120°   E) 135°

**[PR]OBLEMA Nº 199**

[En] un triángulo ABC de incentro I, sea [M] punto medio de $\overline{AC}$, las rectas AI y [CI] cortan en P y Q a $\overline{BM}$ respectivamen[te], si BP=6, QM=4 y 2(BI)=3(ID) [(BC] > AB y $\overline{BD}$ es bisectriz interior), cal[cule] PQ.

[A)] 6   B) 5   C) 4
[D)] 3   E) 2

**[PR]OBLEMA Nº 200**

[Ind]ique el valor de verdad de las siguien[tes] proposiciones :

[I.] Un triángulo exincentral es equilátero si su respectivo triángulo órtico es equilátero.

[II.] Un triángulo y su triángulo mediano tienen la misma recta de Euler.

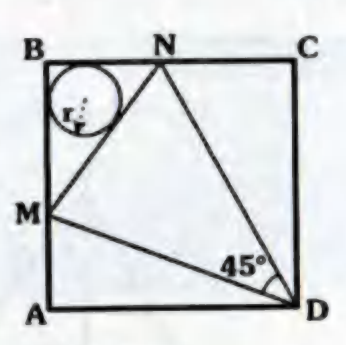
[III]. El triángulo tangencial puede ser rectángulo.

[A)] VVV   B) VFV   C) FFV

[D)] VVF   E) FFF

**[PR]OBLEMA Nº 201**

[Si] ABCD es un cuadrado, MN=12 y [MD]=16, calcule r.




A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

**PROBLEMA Nº 202**

Se tiene un triángulo acutángulo ABC de circuncentro O, si A', B' y C' son los circuncentros de COB, AOC y AOB, ¿Qué punto notable es O del triángulo A'B'C'?

A) Incentro   B) Baricentro
C) Ortocentro   D) Circuncentro
E) Excentro

**PROBLEMA Nº 203**

Se tiene un trapecio isósceles ABCD $(\overline{AB}//\overline{CD})$, si BD=10, calcule la distancia entre los ortocentros de ABC y ADC.

A) 5   B) 6   C) 7
D) 8   E) 10

**PROBLEMA Nº 204**

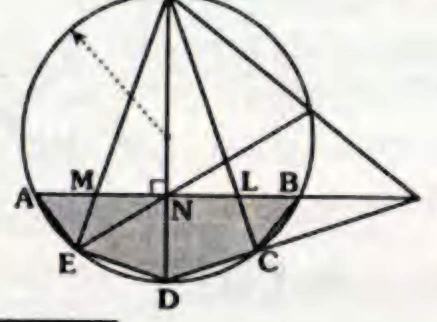
Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se diferencian en 20°, la mediatriz de $\overline{AC}$ corta en P al arco BC de la circunferencia circunscrita, luego se traza $\overline{PE}$ perpendicular a $\overline{AB}$ (E esta en la prolongación de $\overline{AB}$ ), siendo O el circuncentro de ABC, calcule la medida del ángulo entre OE y la recta de euler de ABC.

A) 3°   B) 5°   C) 7°
D) 10°   E) 15°

**PROBLEMA Nº 205**

Si MN=3, LB=2, CD=5 y AE=1, calcule el perímetro de la región pentagonal ABCDE.

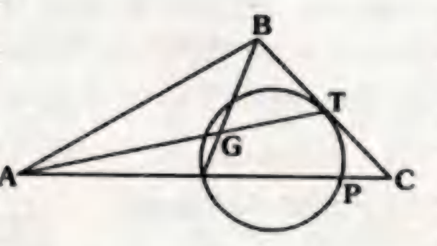
A) 10
B) 15
C) 22
D) 25
E) 30




**PROBLEMA Nº 206**

T es punto de tangencia y G es baricentro de ABC, ¿Qué tipo de cuadrilátero es ABTP?

A) Inscriptible
B) Trapezoide
C) Rombo
D) Bicentrico
E) Trapecio




**PROBLEMA Nº 207**

Exteriormente al triángulo ABC se construyen los triángulos equiláteros ABE y BCH, si M, N y P son los baricentros de ABE, ABC y BHC respectivamente, calcule m∡MNP.

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 135°

**PROBLEMA Nº 208**

Calcule el perímetro de la región trapecial inscrita en una circunferencia, sabiendo que dicho trapecio esta circunscrito a otra circunferencia de radio R, además uno de sus ángulos interiores mide 30°.

A) 10R B) 12R C) 14R
D) 16R E) 18R

**PROBLEMA Nº 209**

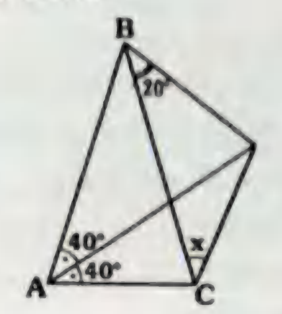
En un triángulo ABC, se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{BC}$, tal que AC, BD y el circunradio de ABC son iguales y m∡ADC = 30°, calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.

A) 60° B) 18° C) 24° D) 30° E) 37°

**PROBLEMA Nº 210**

Si AB=BC, calcule x.

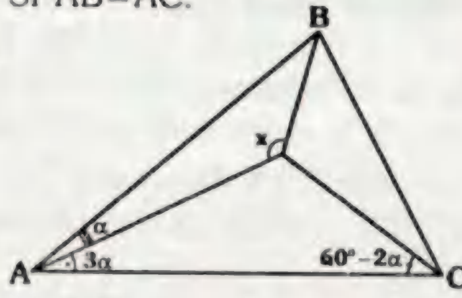
A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 45°




**PROBLEMA Nº 211**

Calcule x. Si AB=AC.

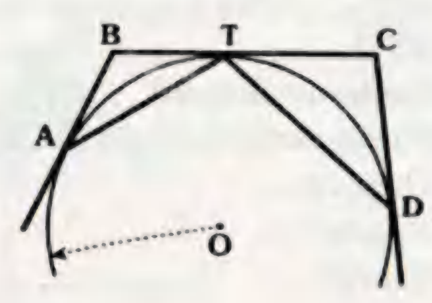
A) 90°
B) 150°
C) 110°
D) 120°
E) 135°




**PROBLEMA Nº 212**

Si A, T y D son puntos de tangencia, $O_1$ y $O_2$ son circuncentros de ABT y TCD, calcule la medida del ángulo entre $\overline{O_1O_2}$ y $\overline{OT}$.

A) 60°
B) 75°
C) 90°
D) 120°
E) 135°



**ROBLEMA Nº 213**

e tiene el cuadrilátero ABCD, las iagonales se cortan en E, si AB=BE, $\measuredangle$EDC = m$\measuredangle$ABC = 2(m$\measuredangle$BEA), ¿qué unto notable es A del triángulo BCD?

) Excentro B) Ortocentro
) Punto de Steiner D) Circuncentro
) Punto de Miquel

**ROBLEMA Nº 214**

ado un triángulo rectángulo ABC, rec- en B, exteriormente se construyen los iángulos equiláteros ARB y BSC, si $\overline{RC}$ $\overline{SA}$ se cortan en L, indique que punto otable es B de RSL.

) Baricentro B) Incentro
) Ortocentro D) ircuncentro
) Punto de Brocard

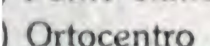
**ROBLEMA Nº 215**

n un triángulo ABC se trazan las evianas interiores AM y CN que se cor- n en T, si los triángulos AMB y BNC on isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y T=AC. ¿Qué punto notable es T de BC?

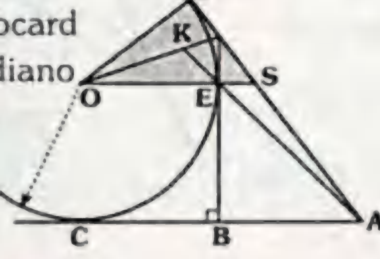
) Incentro B) Baricentro
) Ortocentro D) Circuncentro
) Cevacentro

**ROBLEMA Nº 216**

D, E y C son puntos de tangencia y B=BC, indique que punto notable es k SDO.



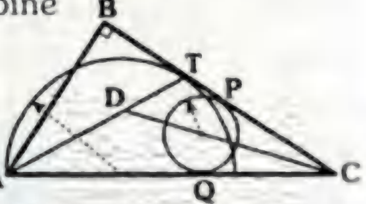
) Punto de Brocard
) Punto exmediano
) Ortocentro
) Baricentro
) Incentro




**PROBLEMA Nº 217**

T, P y Q son puntos de tangencia. ¿Qué punto notable es D del triángulo ABC?

A) Baricentro
B) Punto de Lemoine
C) Ortocentro
D) Circuncentro
E) Incentro




**PROBLEMA Nº 218**

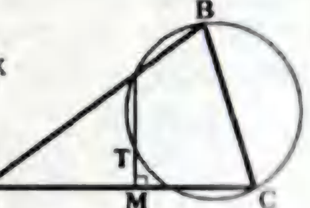
La circunferencia inscrita en el triángulo ABC, es tangente a los lados AB, BC y AC en M, N y P respectivamente, las bisectrices interiores de los ángulos BAC y ACB cortan a $\overline{MN}$ en R y Q respectivamente. ¿Qué punto notable es el incentro de ABC del triángulo PQR?

A) Incentro B) Baricentro
C) Ortocentro D) Circuncentro
E) Punto de Nagel

**PROBLEMA Nº 219**

Si AM=MC, ¿Qué punto notable es T de ABC?

A) Baricentro
B) Punto de Jerabeck
C) Ortocentro
D) Incentro
E) Circuncentro



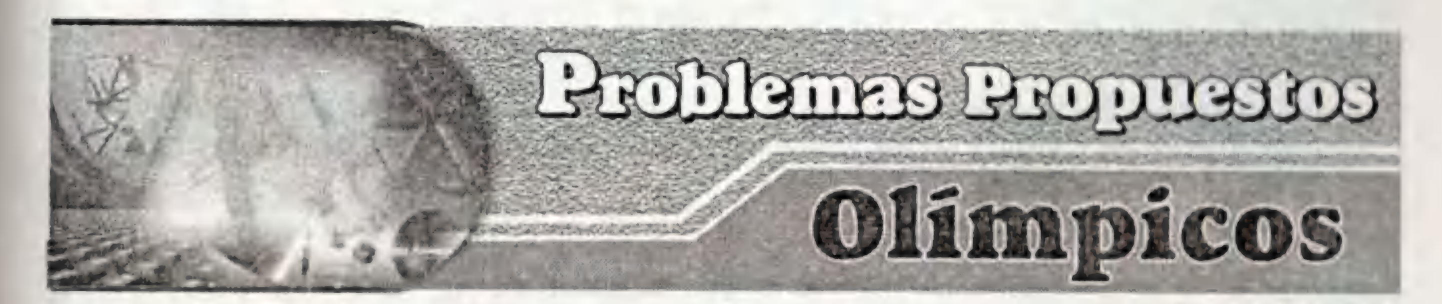

**PROBLEMA Nº 220**

En un cuadrilátero ABCD, tal que AB=BC, m$\measuredangle$BDC = 2(m$\measuredangle$BAC) y

m$\measuredangle$BDA = 2(m$\measuredangle$BCA)

¿Qué punto notable es D de ABC?

A) Cevacentro B) Circuncentro
C) Excentro D) Ortocentro
E) Punto de Brocard




**PROBLEMA Nº 1**

**XX Olimpiada Iberoaméricana Cartagena de Indias, 2005**

Sea O el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC y D un punto en el menor arco BC de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. Sean E y F punto de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, tales que $m\measuredangle BDE = m\measuredangle OAC$ y $m\measuredangle CDF = m\measuredangle OAB$.

Demuestre que EF pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

**PROBLEMA Nº 2** **41° IMO 2 000**

P es un punto en el interior del triángulo ABC. Las perpendiculares desde P sobre los lados BC, CA y AB intersecan a dichos lados en D, E y F respectivamente. Demostrar que P es el circuncentro si uno de los triángulos AEF, BDF, CDE tiene perímetro no mas que DEF.

**PROBLEMA Nº 3**

**Prueba de selección para IMO 2000 Brasil**

Sean CC', BB' alturas del triángulo ABC, suponga $AB \neq AC$. Sea M punto medio de $\overline{BC}$, H ortocentro del triángulo ABC y D la intersección de $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$. Demostrar $\overline{DH} \perp \overline{AM}$.

**PROBLEMA Nº 4**

**38° Olimpiada Internacional - Mar de Plata 1 997**

Se da un ángulo de vértice M y un punto B, una circunferencia arbitraria que pasa por M y B interseca a los lados del ángulo en los puntos C y D (distintos de M). Hallar el lugar geométrico de los baricentros de los triángulos MCD.

**PROBLEMA Nº 5**

Dado un triángulo no degenerado ABC, O es su circuncentro, H su ortocentro y R su circunradio.

Demostrar : $OH < 3R$

**PROBLEMA Nº 6**

**17° Olimpiada Brasil - 1 995**

Sea ABCD un cuadrilátero convexo al mismo tiempo inscriptible y circunscriptible, sean I su incentro, O su circuncentro y S el punto de intersección de las diagonales. Demostrar que si dos puntos I, O y S coinciden entonces ABCD es un cuadrado.

**PROBLEMA Nº 7**

**2° Olimpiada de matemática de Centroamérica y el Caribe - El Salvador 2 000**

Sea ABCDE un pentágono convexo sean P, Q, R y S los baricentros de los triángulos ABE, BCE, CDE y DAE respectivamente. Demostrar que PQRS es un paralelogramo y que el área de su región es $\frac{2}{9}$ del área de ABCD.

**PROBLEMA Nº 8**

**16° Olimpiada de Matemática de los países balcanicos - Macedonia - 1 999**

Dado un triángulo acutángulo, sea D el punto medio del arco BC de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, que no contiene A, sean E el simétrico de D con respecto a las rectas BC y F simétrico de D con respecto al circuncentro O. Finalmente sea K el punto medio del segmento EA. Probar que la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo ABC, también pasa por K y a su vez demostrar que la recta que pasa por K y el punto medio del segmento BC es perpendicular a la recta AF.

**PROBLEMA Nº 9**

**12° Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas - México 1 997**

En un triángulo ABC sean AE y BF dos alturas, y sea H el ortocentro. La recta simétrica de AE respecto a la bisectriz (interior) del ángulo en A y la recta simétrica de BF respecto a la bisectriz (interior) del ángulo en B se intersecan en O. Las rectas AE y AO cortan por segunda vez a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en los puntos M y N respectivamente. Sean P, la intersección de BC con HN; R, la intersección de BC con OM; y S, la intersección de HR con OP. Demostrar que AHSO es un paralelogramo.

**PROBLEMA Nº 10** **39° IMO 1 998**

Sea I el incentro del triángulo ABC. La circunferencia inscrita de ABC toca a los lados BC, CA y AB en K, L y M respectivamente. La línea que pasa por B y que es paralela a MK interseca a las líneas LM y LK en R y S respectivamente pruebe que el ángulo RIS es agudo.



# CLAVES DE RESPUESTAS

## ANUAL

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. B | 9. C | 17. D | 25. E | 33. A | 41. D | 49. E |
| 2. C | 10. A | 18. C | 26. B | 34. A | 42. C | 50. E |
| 3. D | 11. D | 19. A | 27. A | 35. C | 43. A | |
| 4. D | 12. B | 20. B | 28. D | 36. A | 44. E | |
| 5. A | 13. C | 21. C | 29. E | 37. D | 45. B | |
| 6. C | 14. A | 22. D | 30. A | 38. B | 46. D | |
| 7. D | 15. E | 23. C | 31. C | 39. E | 47. D | |
| 8. B | 16. B | 24. A | 32. E | 40. A | 48. B | |

## CEPRE-UNI

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 51. C | 58. E | 65 C | 72. C | 79. E | 86. D | 93. C |
| 52. D | 59. B | 66. E | 73. C | 80. D | 87. E | |
| 53. C | 60. C | 67. D | 74. E | 81. C | 88. D | |
| 54. C | 61. D | 68. C | 75. B | 82. B | 89. C | |
| 55. B | 62. B | 69. B | 76. A | 83. A | 90. A | |
| 56. C | 63. C | 70. A | 77. D | 84. D | 91. E | |
| 57. E | 64. C | 71. A | 78. C | 85. B | 92. D | |

## SEMESTRAL

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 94. A | 102. A | 110. E | 118. D | 126. D | 134. C | 142. E |
| 95. D | 103. A | 111. C | 119. B | 127. D | 135. C | 143. D |
| 96. B | 104. C | 112. A | 120. C | 128. E | 136. A | |
| 97. C | 105. D | 113. A | 121. A | 129. B | 137. D | |
| 98. C | 106. A | 114. B | 122. E | 130. C | 138. B | |
| 99. E | 107. B | 115. A | 123. D | 131. B | 139. A | |
| 100. A | 108. C | 116. C | 124. B | 132. D | 140. B | |
| 101.C | 109. C | 117. E | 125. E | 133. C | 141. C | |

## SEMESTRAL INTENSIVO

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 144. A | 150. E | 156. C | 162. C | 168. B | 174. D | 180. D |
| 145. C | 151. B | 157. D | 163. B | 169. D | 175. E | 181. E |
| 146. B | 152. D | 158. E | 164. C | 170. B | 176. B | 182. D |
| 147. E | 153. C | 159. A | 165. D | 171. E | 177. A | 183. C |
| 148. A | 154. E | 160. C | 166. A | 172. A | 178. D | |
| 149. D | 155. B | 161. A | 167. E | 173. C | 179. E | |

## REPASO

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 184. A | 190. A | 196. D | 202. A | 208. D | 214. B | 220. B |
| 185. B | 191. E | 197. C | 203. E | 209. A | 215. B | |
| 186. C | 192. A | 198. C | 204. D | 210. C | 216. E | |
| 187. D | 193. B | 199. E | 205. C | 211. B | 217. E | |
| 188. B | 194. A | 200. D | 206. A | 212. C | 218. A | |
| 189. C | 195. C | 201. D | 207. D | 213. A | 219. E | |





- **Olivera Diaz, Carlos** — Geometría Plana
- **Pogorelov, A.V. (1974)** — Geometría elemental. Editorial MIR Moscú
- **Shariguin, 9 (1989)** — Problemas de Geometría. Planimetría Editorial MIR. Moscú
- **Puig Adam, Pedro (1961)** — Curso de Geometría Métrica. Tomo I Nuevas gráficas S.A. Madrid
- **Levi S. Skively (1961)** — Introducción a la Geometría Moderna Compañía Editorial Continental S.A. México
- **Golovina L.9. -Yaglom 9.M (1976)** — Inducción en la Geometría. Editorial MIR Moscú
- **Coxeter - H.S.M (1971)** — Fundamentos de Geometría Editorial Limusa - Wiley - S.A
- **Francisco de la Borbolla y Monterrubio Luis de la Borbolla y Monterrubio (1966)** — Geometría Analítica y Cálculo Editorial Limusa - Wiley - S.A.
- **Vila, Antonio (1968)** — 40 temas de Matemáticas para Preuniversitario. Editorial Vinces - Vives - Barcelona
- **Miguel de Guzman (2002)** — Experiencias del Descubrimiento en Geometría Universidad Complutense de Madrid
- **Organización de los Estados Iberoamericanos para la Educación, la ciencia y la cultura (1996)** — 10 Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas. Fotojae, S.A. Madrid.
- **Material Bibliográfico de Diferentes Instituciones Preuniversitarias**
- **Material Bibliográfico del Centro Pre de la Universidad Nacional de Ingeniería** (Exámenes, Prácticas, Seminarios)

**Páginas web consultadas:**

- htttp:/www.campus-oei.org/oim/revistaoim/
- http:/xtec.cat/~qcastell/ttwesp/novedades.html
- www.arraki.es/~mcj/sangaku02.htm
- www.ctv.es/users/pacoga/bella/htm/
- http:/www.personal.vs.es/rbarroso/triánguloscabril/
- http:/www.oei.es/